Titolo nota 20/05/2019

MICROECONOMETRIA — LEZIONE 6

PANEL LONGITUDINALI (N > T)

MODELLO PANEL CON EFFETTI INDIVIDUALI "RANDOM"

$$\alpha_i = \alpha + \mu_i$$

$$(1) \quad y_{it} = \underline{\underline{\alpha}} + \sum_{z=2}^{K} \underline{\underline{\beta_z}} x_{zit} + \underbrace{(\mu_i + v_{it})}_{\nu_{it}}$$

EFFETTO INDIVIDUALE RANDOM

AGGREGANDO RISPETTO A t :

$$(2) \quad \underset{(T\cdot 1)}{y_i} = \underset{(1\cdot 1)}{\alpha}\,\underset{(T\cdot 1)}{J} + \underset{T(K-1)}{x_i^*}\cdot\underset{(K-1)\cdot 1}{\beta} + \underset{(T\cdot 1)}{v_i}$$

$$\underset{K\cdot 1}{\delta} = \begin{pmatrix} \alpha \\ - \\ \beta \end{pmatrix} \qquad \text{DOVE} \quad \underset{(T\cdot 1)}{v_i} = \underset{(1\cdot 1)}{\mu_i}\,J + \underset{(T\cdot 1)}{u_i}$$

$$y_i = x_i\,\delta + v_i \quad \text{DOVE} \quad \underset{T\cdot K}{x_i} = \left(J \;\vdots\; x_i^*\right)$$

IPOTESI: x_i NON RANDOM (NO CORRELAZIONE CON μ_i)

u_i CLASSICO

μ_i CLASSICO $\Rightarrow$ $E(\mu_i) = 0, \ \forall i$

$VAR(\mu_i) = \sigma^2_\mu, \ \forall i$

$COV(\mu_i, \mu_j) = 0, \ \forall i \neq j$

$COV(\mu_i, u_{jt}) = 0, \ \forall i, j, t$

IPOTESI: <u>NO CORRELAZIONE TRA x_i</u>

<u>E μ_i</u>

$$\underset{T\cdot 1}{y_i} = x_i \delta + v_i \quad , \quad v_i = \mu_i J + U_i$$

MINIMI QUADRATI

$$\underset{(T\cdot T)}{E(v_i v_i')} = E\left[(\mu_i J + U_i)(\mu_i J + U_i)'\right] =$$

$$= E(\mu_i^2) J J' + \underset{(T\cdot T)}{E(U_i U_i')}$$

$$= \underline{\underline{\sigma_\mu^2}}\, \underline{\underline{J J'}} + \underline{\underline{\sigma_u^2}}\, I_T$$

$$\underset{T \cdot T}{E\left(v_i \cdot v_i'\right)} = \begin{pmatrix} \sigma_\mu^2 + \sigma_u^2 & \cdots & \sigma_\mu^2 \\ \sigma_\mu^2 & \ddots & \sigma_\mu^2 + \sigma_u^2 \end{pmatrix} \equiv V$$

→ OMOSCHEDASTICITÀ

→ AUTOCORRELAZIONE TRA GLI ERRORI v_{it} COSTANTE NEL TEMPO (*)

→ INDIPENDENTE DA $i = 1 \ldots N$

(*) ESEMPI DI AUTOCORRELAZIONE DI v_i ALTERNATIVI

$$AR(1): \quad v_i = \phi_i v_{i,-1} + \varepsilon_i \quad , \quad |\phi_i| < 1$$

$$\Downarrow$$

$$E(v_i v_i') = \begin{pmatrix} 1 & \phi_i & \phi_i^2 & \cdots & \phi_i^{T-1} \\ \phi_i & 1 & \phi_i & \phi_i^2 & \cdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ \phi_i^{T-1} & \cdots & & & 1 \end{pmatrix}$$

→ AUTOCORRELAZIONE TRA ERRORI DIPENDE DA t

→ OMOSCHEDASTICITÀ

$$MA(1): \quad v_i = \varepsilon_i + \vartheta_i \varepsilon_{i,-1}$$

$$E(v_i v_i') = \begin{pmatrix} 1+\vartheta_i^2 & \vartheta_i & & 0 \\ \vartheta_i & 1+\vartheta_i^2 & \vartheta_i & \\ & \vartheta_i & \ddots & \vartheta_i \\ 0 & & \vartheta_i & 1+\vartheta_i^2 \end{pmatrix}$$

↳ AUTOCORRELAZIONE NULLA PER DIFFERENZE TEMPORALI SUPERIORI A 1 PERIODO

↳ AUTOCORRELAZIONE TRA GLI ERRORI TRA t E $t-1$ (COSTANTE)

↳ OMOSCHEDASTICITÀ

$y_i = x_i' \delta + v_i$, DOVE $V \equiv E(v_i v_i') = \sigma_\mu^2 J J' + \sigma_w^2 I_T$

$\hat{\delta}$?

$$\boxed{\hat{\delta}_{GLS} = (x_i' V^{-1} x_i)^{-1} x_i' V^{-1} y_i}$$

N.B. GLS = OLS APPLICATI A VARIABILI APPROPRIATAMENTE TRASFORMATE

→ TRASFORMAZIONE GLS

TRASFORMAZIONE GLS

$$V = \sigma_\mu^2 \iota\iota' + \sigma_u^2 I_T$$

$$\pm \sigma_u^2 C_T$$

$$= T\sigma_\mu^2 \overbrace{\frac{\iota\iota'}{T}}^{C_T} + \sigma_u^2 C_T + \sigma_u^2 I_T - \sigma_u^2 C_T$$

$$= \underbrace{(T\sigma_\mu^2 + \sigma_u^2)}_{\sigma_1^2} C_T + \sigma_u^2 \underbrace{(I_T - C_T)}_{D_T}$$

$$\Downarrow \quad \underset{(T\cdot T)}{V} = \underset{(1\cdot 1)}{\sigma_1^2}\, C_T + \overset{(1\cdot 1)}{\sigma_u^2}\, D_T \qquad \text{DOVE } \sigma_1^2 = T\sigma_\mu^2 + \sigma_u^2$$

DATE LE PROPRIETÀ DI C_T E D_T, ALLORA :

$$V^{-1} = \frac{1}{\sigma_1^2} C_T + \frac{1}{\sigma_u^2} D_T$$

DI CONSEGUENZA

V^{*} TALE CHE $V^{*\prime} V^{*} = V^{-1}$

È PARI A : $\boxed{V^{*} = \frac{1}{\sigma_1} G_T + \frac{1}{\sigma_u} D_T}$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{\delta}_{GLS} = \left(x_{i\cdot}' V^{-1} x_{i\cdot}\right)^{-1} x_{i\cdot}' V^{-1} y_{i\cdot} = \left(x_{i\cdot}' V^{*\prime} V^{*} x_{i\cdot}\right)^{-1} x_{i\cdot}' V^{*\prime} V^{*} y_{i\cdot}$$

$$V^* = \frac{1}{\sigma_1} G_T + \frac{1}{\sigma_u} D_T =$$

$$= \frac{1}{\sigma_u}\left(\frac{\sigma_u}{\sigma_1} G_T + \underline{\underline{D_T}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sigma_u}\left[I_T + \frac{\sigma_u}{\sigma_1} G_T - G_T\right] =$$

$$= \frac{1}{\sigma_u}\left[I_T - \underbrace{\left(1 - \frac{\sigma_u}{\sigma_1}\right)}_{\vartheta} G_T\right] = \overbrace{\frac{1}{\sigma_u}\left[I_T - \vartheta G_T\right]}^{V^{**}}$$

$$\Downarrow$$

$$V^{*} = \frac{1}{\sigma_u} V^{**}, \text{ OVE } V^{**} \equiv I_T - \vartheta C_T$$

$$\hat{\delta}_{GLS} = \left(x_i' V^{-1} x_i\right)^{-1} x_i' V^{-1} y_i = \left(x_i' V^{*\prime} V^{*} x_i\right)^{-1} x_i' V^{*\prime} V^{*} y_i =$$

$$= \left[x_i' \left(\cancel{\tfrac{1}{\sigma_u}} V^{**}\right)' \left(\cancel{\tfrac{1}{\sigma_u}} V^{**}\right) x_i\right]^{-1} x_i' \left(\cancel{\tfrac{1}{\sigma_u}} V^{**}\right)' \left(\cancel{\tfrac{1}{\sigma_u}} V^{**}\right) y_i$$

$\hookrightarrow$ TRASFORMAZIONE QW $= V^{**} \equiv I_T - \vartheta C_T$

COMMENTO

MODELLO EFFETTI RANDOM

PER $\vartheta = 1$, LA TRASFORMAZIONE GLS COINCIDE $(I_T - \vartheta C_T)$ CON LA TRASFORMAZIONE WITHIN $(I_T - C_T)$

MODELLO EFFETTI FISSI

PER $\vartheta = 0$, LA TRASFORMAZIONE GLS COINCIDE CON LA "NON TRASFORMAZIONE" I_T

MODELLO "POOLING SEMPLICE"

3) AGGREGANDO RISPETTO A $i = 1 \dots N$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_i \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}}_{y \; NT \cdot 1} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_i \\ x_N \end{pmatrix}}_{X \; NT \cdot K} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{\delta \; K \cdot 1} + \underbrace{\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_i \\ v_N \end{pmatrix}}_{\tilde{v} \; NT \cdot 1}$$

y_i: $T \cdot 1$; x_i: $T \cdot K$; α: $1 \cdot 1$; β: $(K-1) \cdot 1$; v_i: $T \cdot 1$

$$y = X\delta + \nu$$

$$\underset{NT \cdot NT}{E(\nu\nu')} \equiv \Psi = I_N \otimes V$$

$$\hat{\delta}_{OLS} = (X'\Psi^{-1}X)^{-1}X'\Psi^{-1}y$$

N.B. **FGLS** PRESUPPONE LA STIMA DI ψ, CIOÈ ψ. VISTO CHE ψ DIPENDE DA V E V DIPENDE DA σ_μ^2 E σ_u^2, PER STIMARE ψ BISOGNA STIMARE σ_μ^2 E σ_u^2.

COME STIMARE σ_u^2 ?

$$\hat{\sigma}_u^2 = \frac{RSS(\text{WITHIN})}{NT-(N+K-1)}$$

MODELLO A EFFETTI FISSI

DIRETTAMENTE DAL MODELLO WITHIN/EFFETTI FISSI

COME STIMARE σ_μ^2 ?

INDIRETTAMENTE, DA σ_1^2

$$\sigma_1^2 = T\sigma_\mu^2 + \sigma_u^2$$

SE SIAMO IN GRADO DI OTTENERE LA STIMA DI σ_1^2, $\hat{\sigma}_1^2$,

ALLORA : $\hat{\sigma}_\mu^2 = \dfrac{\hat{\sigma}_1^2 - \hat{\sigma}_u^2}{T}$

COME STIMARE $\check{\sigma}_1^2$?

SFRUTTANDO LA TRASFORMAZIONE <u>BETWEEN</u>