STATISTICA: esercizi svolti su

ESPERIMENTI CASUALI, EVENTI e PROBABILITA'

1 ESPERIMENTI CASUALI, EVENTI E PROBABILITA'

1.1 Calcolo combinatorio.

1. Una squadra di calcio schiera ad ogni partita 1 portiere, 5 difensori e 5 attaccanti. La società "Aleas" sceglie in modo casuale ciascun gruppo di giocatori tra 2 portieri, 8 difensori e 12 attaccanti disponibili.

   a) Quante sono le formazioni possibili?

   b) Se Roberto e Ronaldo sono due attaccanti, quante sono le formazioni in cui giocano entrambi?

   c) Se Franco è un difensore, quante sono le formazioni in cui gioca con l'attaccante Roberto?

   Svolgimento
   Svolgimento punto a) Si osservi, innanzitutto, che due formazioni sono diverse se differiscono per almeno un giocatore, a prescindere dall'ordine in cui i giocatori sono estratti (senza riposizione) dalla società "Aleas". Fatta questa precisazione, si ha che:

   - il portiere può essere scelto in
   $$C_{2,1} = \binom{2}{1} = 2$$
   modi differenti;
   - il numero delle possibili formazioni schierate in attacco è dato dal numero delle combinazioni semplici di 12 oggetti distinti di classe 5 che risulta essere:
   $$C_{12,5} = \binom{12}{5}.$$
   - il numero delle possibili formazioni schierate in difesa è dato dal numero delle combinazioni semplici di 8 oggetti distinti di classe 5 che risulta essere:
   $$C_{8,5} = \binom{8}{5}.$$

   Il numero delle possibili formazioni, di conseguenza, risulta:
   $$\begin{aligned} 2 \cdot \binom{12}{5} \cdot \binom{8}{5} &= 2 \cdot \frac{12!}{5!7!} \cdot \frac{8!}{5!3!} \\ &= 2 \cdot \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 2 \cdot 8^2 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 7 = 88704 \end{aligned}$$

   Svolgimento punto b) Per completare la formazione in cui giocano gli attaccanti Roberto e Ronaldo, la società "Aleas" deve estrarre 9 giocatori di cui:

- un portiere;
- 5 difensori;
- 3 attaccanti.

Il portiere, analogamente al caso precedente, può essere scelto in 2 modi differenti mentre la formazione di difesa in $C_{8,5} = \binom{8}{5}$ modi differenti.
Per quanto riguarda invece la formazione d'attacco, si devono estrarre 3 attaccanti dai 10 restanti una volta esclusi Roberto e Ronaldo. Alla luce di ciò, il numero delle possibili formazioni d'attacco è dato dal numero delle combinazioni semplici di 10 oggetti distinti di classe 3:

$$C_{10,3} = \binom{10}{3}.$$

Si ha quindi che il numero delle formazioni in cui sono presenti gli attaccanti Roberto e Ronaldo è dato da:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \binom{8}{5}\binom{10}{3} &= 2 \cdot \frac{8!}{5!3!} \cdot \frac{10!}{3!7!} \\ &= 2 \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 7 \cdot 8^2 \cdot 3 \cdot 10 = 13440. \end{aligned}$$

Svolgimento punto c) Per completare la formazione in cui giocano il difensore Franco e l'attaccante Roberto, la società "Aleas" deve estrarre 9 giocatori di cui:

- un portiere;
- 4 difensori;
- 4 attaccanti.

Il portiere può essere scelto in $\binom{2}{1} = 2$ modi differenti. Al fine di completare la formazione di difesa, la società "Aleas" deve estrarre (senza riposizione) 4 difensori tra i 7 rimanenti una volta escluso Franco. Il numero delle possibili formazioni di difesa è di conseguenza dato dal numero delle combinazioni semplici di 7 oggetti distinti di classe 4 che risulta essere:

$$C_{7,4} = \binom{7}{4}.$$

Al fine di completare la formazione d'attacco, la società "Aleas" deve estrarre (senza riposizione) 4 attaccanti tra gli 11 rimanenti una volta escluso Roberto. Il numero delle possibili formazioni d'attacco è di conseguenza dato dal numero delle combinazioni semplici di 11 oggetti distinti di classe 4 che risulta essere:

$$C_{11,4} = \binom{11}{4}.$$

Il numero delle formazioni in cui sono presenti il difensore Franco e l'attaccante Roberto è quindi dato da:

$$\begin{aligned} 2 \cdot \binom{11}{4}\binom{7}{4} &= 2 \cdot \frac{11!}{4!7!} \cdot \frac{7!}{4!3!} \\ &= 2 \cdot \frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} \\ &= 2 \cdot 3 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 5 \cdot 7 = 23100 \ . \end{aligned}$$

2. Un'urna contiene sei palline numerate da 1 a 6. Ne vengono estratte 3 senza reinserimento.

   a) Si dica quante sono le possibili terne ordinate;
   b) si dica quante sono le terne ordinate che contengono il 2 in seconda posizione;
   c) si dica quante sono le possibili terne ordinate che contengono il 2.
   d) Rispondere ai quesiti a) b) c) se l'estrazione avviene con reimmissione.
   e) Rispondere ai quesiti a) c) se l'estrazione avviene senza reimmissione e non interessa l'ordine.

   Svolgimento
   Svolgimento punto a) Due terne ordinate si considerano diverse se differiscono per almeno una pallina o per l'ordine in cui le palline compaiono nel campione. Alla luce di ciò, dato che le palline sono tra di loro distinguibili e le estrazioni avvengono senza riposizione, il numero delle possibili terne ordinate di numeri è dato dal numero di disposizioni semplici di 6 oggetti distinti di classe 3:

   $$D_{6,3} = \frac{6!}{(6-3)!} = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120.$$

   In altri termini:

   - la prima pallina, e quindi il primo numero, può essere scelta in 6 modi diversi;
   - la seconda pallina, e quindi il secondo numero, può essere scelta in 5 modi diversi;
   - l'ultima pallina, e quindi l'ultimo numero, può essere scelta in 4 modi diversi.

   Il numero delle possibili terne ordinate è di conseguenza dato da:

   $$6 \cdot 5 \cdot 4 = 120 = D_{6,3}.$$

   Svolgimento punto b) Il numero delle terne che contengono il 2 in seconda posizione è dato dal numero di disposizioni semplici di 5 oggetti distinti di classe 2:

   $$D_{5,2} = \frac{5!}{3!} = 5 \cdot 4 = 20.$$

   In alternativa, osserviamo che:

- la prima pallina, e quindi il primo numero, può essere scelta in 5 modi differenti;
- la seconda pallina deve essere quella numerata con il due e di conseguenza può essere scelta in un solo modo;
- la terza pallina, e quindi il terzo numero, può essere scelta in 4 modi differenti.

Il numero delle possibili terne che contengono il 2 nella seconda posizione è quindi dato da:

$$5 \cdot 1 \cdot 4 = 20 = D_{5,2}.$$

Svolgimento punto c) In ciascuna delle terne ordinate di numeri contenenti il 2, questo ultimo numero può assumere la prima, la seconda o la terza posizione. Si supponga che il 2 occupi la seconda posizione. Come si osserva dallo svolgimento del punto precedente, il numero di possibili terne in cui il 2 occupa la seconda posizione è 20. Allo stesso risultato si arriva ripercorrendo i passi fatti nello svolgimento del punto precedente anche nel caso in cui il 2 occupi la prima o la terza posizione. Si ha così che il numero di terne possibili che contengono il 2 è dato da:

$$20 + 20 + 20 = 60.$$

Svolgimento punto d)

α) Nel caso di estrazioni con riposizione, due terne ordinate sono diverse se differiscono:

- per almeno una pallina;
- per l'ordine in cui le palline compaiono;
- per il numero di volte in cui si ripete una pallina.

In tal caso il numero di possibili terne ordinate è dato dal numero delle disposizioni con ripetizione di 6 oggetti distinti di classe 3:

$$D^r_{6,3} = 6^3 = 216.$$

Infatti si osservi che:

- la prima pallina, e quindi il primo numero, può essere scelta in 6 modi differenti;
- la seconda pallina, e quindi il secondo numero, può essere scelta in 6 modi differenti;
- la terza pallina, e quindi il terzo numero, può essere scelta in 6 modi differenti.

Il numero delle possibili terne ordinate è quindi dato da

$$6 \cdot 6 \cdot 6 = 216 = D^r_{6,3}.$$

β) Il numero delle possibili terne ordinate che contengono il 2 in seconda posizione è dato dal numero di disposizioni con ripetizione di 6 oggetti distinti di classe 2:

$$D^r_{6,2} = 6^2 = 36.$$

Infatti si osservi che:

- la prima pallina, e quindi il primo numero, può essere scelta in 6 modi differenti;
- la seconda pallina deve essere quella numerata con il due e di conseguenza può essere scelta in un solo modo;
- la terza pallina, e quindi il terzo numero, può essere scelta in 6 modi differenti.

Il numero delle possibili terne ordinate che contengono il due in seconda posizione è quindi dato da

$$6 \cdot 1 \cdot 6 = 36 = D^r_{6,2}.$$

γ) Si osservi che il numero delle possibili terne ordinate che contengono il due può essere calcolato come:

n° di possibili terne ordinate − n° di possibili terne che non contengono il due.

Il numero delle terne che non contengono il due coincide con il numero delle possibili terne che si possono ottenere estraendo con riposizione da un'urna contenente 5 palline così numerate:

$$1, 3, 4, 5, 6.$$

Il numero delle terne che non contengono il due è di conseguenza dato dal numero di disposizioni con ripetizione di 5 oggetti distinti di classe 3:

$$D^r_{5,3} = 5^3 = 125.$$

Si ha dunque che il numero di possibili terne ordinate che contengono il 2 è dato da:

$$D^3_{6,3} - D^3_{5,3} = 216 - 125 = 91.$$

Svolgimento punto e)

α) Supponendo che le estrazioni avvengano senza riposizione, abbiamo che il numero delle possibili terne non ordinate è dato dal numero delle combinazioni semplici di 6 oggetti distinti di classe 3:

$$C_{6,3} = \binom{6}{3} = \frac{6!}{3!3!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20.$$

γ) Il numero di possibili terne non ordinate che contengono il 2 coincide con il numero di possibili coppie non ordinate di numeri ottenibili estraendo senza reimmissione 2 palline da un'urna contenente 5 palline così numerate:

$$1, 3, 4, 5, 6.$$

Il numero di tali possibili coppie è di conseguenza dato dal numero di combinazioni semplici di 5 oggetti distinti di classe 2

$$C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 10$$

che coincide, per quanto osservato in precedenza, con il numero delle possibili terne non ordinate che contengono il numero 2.

3. Da un'urna contenente otto palline così numerate:

$$-3, \quad -2, \quad -1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6,$$

vengono estratte tre palline senza reinserimento.

a) Quali e quante sono le terne non ordinate che contengono solo numeri negativi?
b) Quante sono le terne ordinate che contengono solo numeri negativi?
c) Quante sono le terne ordinate che contengono due numeri positivi?
d) Quante sono le terne non ordinate che contengono due numeri positivi?

Svolgimento
Svolgimento punto a) Nell'urna da cui si effettuano le estrazioni senza reinserimento sono contenute 3 palline numerate negativamente. Si osservi che queste tre palline sono tra di loro distinguibili in quanto i numeri ad esse associati sono differenti. Il numero di terne non ordinate composte da numeri negativi coincide, di conseguenza, con il numero di combinazioni semplici di 3 oggetti distinti di classe 3:

$$C_{3,3} = \binom{3}{3} = \frac{3!}{3!0!} = 1.$$

Svolgimento punto b) Il numero di terne ordinate composte da numeri negativi è dato dal numero di disposizioni semplici di 3 oggetti distinti di classe 3:

$$D_{3,3} = \frac{3!}{0!} = 3! = 6.$$

Svolgimento punto c) Il numero delle terne ordinate che contengono due numeri positivi coincide con il numero delle terne ordinate che contengono un numero negativo. Questo numero negativo può occupare la prima, la seconda o la terza posizione. Supponiamo che occupi la prima posizione. Quante sono le possibili terne con un numero negativo nella prima posizione e numeri positivi nelle restanti? Al fine di rispondere a questo quesito, si osservi che:

- la prima pallina, che deve necessariamente essere numerata con un negativo, può essere scelta in 3 modi differenti;
- la seconda pallina, che deve necessariamente essere numerata con un numero positivo, può essere scelta in 5 modi differenti;
- la terza pallina, che deve essere necessariamente numerata con un numero positivo, può essere scelta il 4 modi differenti;

Il numero di terne ordinate che contengono un numero negativo in prima posizione e due numeri positivi nelle restanti posizioni è dato di conseguenza da:

$$3 \cdot 5 \cdot 4 = 60.$$

Seguendo un procedimento analogo, 60 risulta essere anche il numero di terne con un numero negativo in seconda posizione e due numeri positivi nelle altre e un numero negativo in terza posizione e due numeri positivi nelle altre. Abbiamo quindi che il numero di terne con due numeri positivi è dato da:

$$60 + 60 + 60 = 180.$$

Svolgimento punto d) Il numero di terne non ordinate che contengono due numeri positivi è ottenibile dividendo il numero di terne ordinate che contengono due numeri positivi per il numero di permutazioni di tre oggetti distinti. Il numero di permutazioni di tre oggetti è dato da:

$$P_3 = 3! = 6 \quad .$$

Il numero delle terne non ordinate che contengono due positivi è dato di conseguenza da:

$$\frac{180}{3!} = \frac{180}{6} = 30.$$

4. Quanti numeri di quattro cifre possono essere formati con i 10 numeri $0, 1, \ldots, 9$ se:

   a) uno stesso numero può essere ripetuto più volte?
   b) uno stesso numero non può essere ripetuto più volte?
   c) l'ultima cifra deve essere lo zero e uno stesso numero non può essere ripetuto più volte?

   Svolgimento
   Svolgimento punto a) Si osservi, innanzitutto, che un numero di 4 cifre, necessariamente, ha la prima cifra diversa da 0. Tenendo conto di questo, se una stessa cifra può ripetersi più volte all'interno dello stesso numero di 4 cifre, si ha che:

   - la prima cifra può essere scelta in 9 modi diversi;
   - la seconda cifra può essere scelta in 10 modi diversi;
   - la terza cifra può essere scelta in 10 modi diversi;
   - la quarta cifra può essere scelta in 10 modi diversi.

   Si ha quindi che, nel caso in cui una stessa cifra possa ripetersi più volte, il numero di numeri di 4 cifre che possono essere formati con le cifre $0, 1, ..., 9$ è dato da:

   $$9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 9000.$$

   Svolgimento punto b) Se una stessa cifra non può ripetersi più volte all'interno dello stesso numero di 4 cifre, si ha che:

- la prima cifra può essere scelta in 9 modi diversi (tutti tranne lo 0);
- la seconda cifra può essere scelta in 9 modi diversi (tutti tranne la prima cifra);
- la terza cifra può essere scelta in 8 modi diversi (tutti tranne le prime due cifre);
- la quarta cifra può essere scelta in 7 modi diversi (tutti tranne le prime tre cifre).

Si ha quindi che, nel caso in cui una stessa cifra non possa ripetersi più volte, il numero di numeri di 4 cifre che possono essere formati con le cifre $0, 1, ..., 9$ è dato da:

$$9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 4536.$$

Svolgimento punto c) Se una stessa cifra non può ripetersi più volte all'interno dello stesso numero e la quarta cifra deve essere pari a zero, si ha che:

- la quarta cifra deve essere necessariamente 0 e quindi può essere scelta in un solo modo;
- la prima cifra può essere scelta in 9 modi diversi (tutti tranne la prima cifra);
- la seconda cifra può essere scelta in 8 modi diversi (tutti tranne le prime due cifre);
- la terza cifra può essere scelta in 7 modi diversi (tutti tranne le prime tre cifre).

Si ha quindi che, nel caso in cui una stessa cifra non possa ripetersi più volte, il numero di numeri di 4 cifre che possono essere formati con le cifre $0, 1, ..., 9$ caratterizzati dall'avere lo 0 come quarta cifra è dato da:

$$1 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 504.$$

1.2 Eventi e probabilità

5. Descrivere gli spazi campionari dei seguenti esperimenti casuali:

   a) lancio di un dado;
   b) lancio di due dadi;
   c) lancio di tre dadi;
   d) lancio di n dadi;
   e) lancio di un dado e di una moneta.

Svolgimento
Svolgimento punto a) In questo caso, lo spazio campionario Ω coincide con l'insieme di tutti gli esiti che si possono ottenere dal lancio di un dado:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Svolgimento punto b) In questo caso lo spazio campionario coincide con l'insieme di tutti gli esiti che si possono ottenere dal lancio di due dadi:

$$\begin{aligned}
\Omega \;=\; & \{(1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);(1,6);\\
& (2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6);\\
& (3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);(3,6);\\
& (4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(4,6);\\
& (5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5);(5,6);\\
& (6,1);(6,2);(6,3);(6,4);(6,5);(6,6)\}.
\end{aligned}$$

Espressioni alternative e sintetiche per esprimere lo spazio campionario sono date da:

$$\Omega = \{(i,j) : i = 1,2,...,6 \;\; ; \;\; j = 1,2,...,6\}$$

$$\Omega = A \times A = A^2$$

dove $A = \{1,2,...,6\}$ e il simbolo $\times$ indica il prodotto cartesiano.
Svolgimento punto c) In questo caso lo spazio campionario coincide con l'insieme di tutti gli esiti che si possono ottenere dal lancio di tre dadi:

$$\begin{aligned}
\Omega \;=\{ \;\; & (1,1,1);(1,1,2);(1,1,3);(1,1,4);(1,1,5);(1,1,6);\\
& (1,2,1);(1,2,2);(1,2,3);(1,2,4);(1,2,5);(1,2,6);\\
& (1,3,1);(1,3,2);(1,3,3);(1,3,4);(1,3,5);(1,3,6);\\
& (1,4,1);(1,4,2);(1,4,3);(1,4,4);(1,4,5);(1,4,6);\\
& (1,5,1);(1,5,2);(1,5,3);(1,5,4);(1,5,5);(1,5,6);\\
& (1,6,1);(1,6,2);(1,6,3);(1,6,4);(1,6,5);(1,6,6);\\
& (2,1,1);(2,1,2);(2,1,3);(2,1,4);(2,1,5);(2,1,6);\\
& (2,2,1);(2,2,2);(2,2,3);(2,2,4);(2,2,5);(2,2,6);\\
& (2,3,1);(2,3,2);(2,3,3);(2,3,4);(2,3,5);(2,3,6);\\
& (2,4,1);(2,4,2);(2,4,3);(2,4,4);(2,4,5);(2,4,6);\\
& (2,5,1);(2,5,2);(2,5,3);(2,5,4);(2,5,5);(2,5,6);\\
& (2,6,1);(2,6,2);(2,6,3);(2,6,4);(2,6,5);(2,6,6);\\
& (3,1,1);(3,1,2);(3,1,3);(3,1,4);(3,1,5);(3,1,6);\\
& (3,2,1);(3,2,2);(3,2,3);(3,2,4);(3,2,5);(3,2,6);\\
& (3,3,1);(3,3,2);(3,3,3);(3,3,4);(3,3,5);(3,3,6);\\
& (3,4,1);(3,4,2);(3,4,3);(3,4,4);(3,4,5);(3,4,6);\\
& (3,5,1);(3,5,2);(3,5,3);(3,5,4);(3,5,5);(3,5,6);\\
& (3,6,1);(3,6,2);(3,6,3);(3,6,4);(3,6,5);(3,6,6);\\
& (4,1,1);(4,1,2);(4,1,3);(4,1,4);(4,1,5);(4,1,6);\\
& (4,2,1);(4,2,2);(4,2,3);(4,2,4);(4,2,5);(4,2,6);\\
& (4,3,1);(4,3,2);(4,3,3);(4,3,4);(4,3,5);(4,3,6);
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(4,4,1);(4,4,2);(4,4,3);(4,4,4);(4,4,5);(4,4,6);\\
&(4,5,1);(4,5,2);(4,5,3);(4,5,4);(4,5,5);(4,5,6);\\
&(4,6,1);(4,6,2);(4,6,3);(4,6,4);(4,6,5);(4,6,6);\\
&(5,1,1);(5,1,2);(5,1,3);(5,1,4);(5,1,5);(5,1,6);\\
&(5,2,1);(5,2,2);(5,2,3);(5,2,4);(5,2,5);(5,2,6);\\
&(5,3,1);(5,3,2);(5,3,3);(5,3,4);(5,3,5);(5,3,6);\\
&(5,4,1);(5,4,2);(5,4,3);(5,4,4);(5,4,5);(5,4,6);\\
&(5,5,1);(5,5,2);(5,5,3);(5,5,4);(5,5,5);(5,5,6);\\
&(5,6,1);(5,6,2);(5,6,3);(5,6,4);(5,6,5);(5,6,6);\\
&(6,1,1);(6,1,2);(6,1,3);(6,1,4);(6,1,5);(6,1,6);\\
&(6,2,1);(6,2,2);(6,2,3);(6,2,4);(6,2,5);(6,2,6);\\
&(6,3,1);(6,3,2);(6,3,3);(6,3,4);(6,3,5);(6,3,6);\\
&(6,4,1);(6,4,2);(6,4,3);(6,4,4);(6,4,5);(6,4,6);\\
&(6,5,1);(6,5,2);(6,5,3);(6,5,4);(6,5,5);(6,5,6);\\
&(6,6,1);(6,6,2);(6,6,3);(6,6,4);(6,6,5);(6,6,6)\}
\end{aligned}
$$

Espressioni alternative e sintetiche per esprimere lo spazio campionario sono date da:

$$\Omega = \{(i,j,k) : i = 1,2,...,6 \;\; ; \;\; j = 1,2,...,6 \;\; ; \;\; k = 1,2,...,6\}$$

$$\Omega = A \times A \times A = A^3$$

Svolgimento punto d) In questo caso la descrizione dello spazio campionario attraverso l'elencazione di tutti gli esiti che si possono ottenere dal lancio di n dadi, oltre che molto laboriosa, risulterebbe poco chiara. Lo spazio campionario può comunque essere completamente descritto utilizzando le seguenti espressioni:

$$\Omega = \{(i_1, i_2, ..., i_n) : i_j = 1,2,...,6 \; ; j = 1,2,...,n\}.$$

$$\Omega = \underbrace{A \times A \times ... \times A}_{n \;\; volte} = A^n$$

Svolgimento punto e) In questo caso lo spazio campionario coincide con l'insieme di tutti gli esiti che si possono ottenere dal lancio di un dado e di una moneta. Indicando con c e t rispettivamente gli eventi elementari "croce" e "testa" che si possono ottenere dal lancio della moneta, abbiamo:

$$
\begin{aligned}
\Omega = \{&(1,c);(2,c);(3,c);(4,c);(5,c);(6,c);\\
&(1,t);(2,t);(3,t);(4,t);(5,t);(6,t)\}
\end{aligned}
$$

In alternativa lo spazio campionario può essere descritto utilizzando le seguenti espressioni:

$$\Omega = \{(i,j) : i = 1,2,...,3 \;\; ; \;\; j = c,t\}$$

$$\Omega = A \times M$$

dove $M = \{c, t\}$ coincide con lo spazio campionario dell'esperimento costituito dal lancio di una moneta.

6. Un'urna contiene cinque palline numerate da 1 a 5 delle quali le prime tre sono nere e le altre rosse. Si estrae un campione con reinserimento di ampiezza due. Sia E_1 l'evento "la prima pallina estratta è nera" e sia E_2 l'evento "la seconda pallina estratta è nera":

   a) descrivere lo spazio campionario Ω;
   b) descrivere gli eventi E_1, E_2 ed $E_1 \cap E_2$ e calcolarne le probabilità;
   c) se le estrazioni avvengono senza reimmissione come vengono modificati gli eventi Ω, E_1, E_2 ed $E_1 \cap E_2$ e le relative probabilità?

   Svolgimento
   Svolgimento punto a) Lo spazio campionario dell'esperimento casuale descritto nel testo dell'esercizio è dato da:

$$\begin{aligned}\Omega \ = \{ \ & (1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);\\ & (2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);\\ & (3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5);\\ & (4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);\\ & (5,1);(5,2);(5,3);(5,4);(5,5) \ \}\end{aligned}$$

   Espressioni alternative per descrivere lo spazio campionario sono:

$$\Omega = \{(i,j) : i = 1,2,...,5 \ \ ; \ \ j = 1,2,...,5\}$$

$$\Omega = A \times A$$

   dove $A = \{1, 2, ..., 5\}$ coincide con lo spazio campionario dell'esperimento "estazione di una pallina" dall'urna specificata nel testo dell'esercizio. Si osservi che lo spazio campionario Ω conta $5 \cdot 5 = 25$ elementi equiprobabili (n° dei casi possibili).
   Svolgimento punto b) Dato che le palline nere sono quelle numerate da 1 a 3, l'evento E_1 può essere così descritto:

$$\begin{aligned}E_1 \ = \{ \ & (1,1);(1,2);(1,3);(1,4);(1,5);\\ & (2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);\\ & (3,1);(3,2);(3,3);(3,4);(3,5) \ \}\end{aligned}$$

   Un'espressione alternativa per descrivere l'evento in questione è:

$$E_1 = \{(i,j) : i = 1,2,3 \ \ ; \ \ j = 1,2,...,5\}.$$

   Si osservi che l'insieme E_1 conta 15 elementi che costituiscono i possibili esiti dell'esperimento caratterizzati dal fatto che la prima pallina estratta è nera. Questi eventi possono essere chiamati "casi favorevoli" alla condizione "la prima pallina estratta è nera." La probabilità dell'evento E_1 è data da:

$$P(E_1) = \frac{\text{n}^\circ \text{ casi favorevoli}}{\text{n}^\circ \text{ casi possibili}} = \frac{15}{25} = 0.6 \quad .$$

L'evento E_2 può essere così descritto:

$$\begin{aligned} E_2 \;\; = \{ \;\; & (1,1);(2,1);(3,1);(4,1);(5,1); \\ & (1,2);(2,2);(3,2);(4,2);(5,2); \\ & (1,3);(2,3);(3,3);(4,3);(5,3) \;\; \}. \end{aligned}$$

Un'espressione alternativa per descrivere l'evento in questione è:

$$E_2 = \{(i,j) : i = 1,2,...,5 \;\; ; \;\; j = 1,2,3\}.$$

Si osservi che l'insieme E_2 conta 15 elementi che costituiscono i possibili esiti dell'esperimento caratterizzati dal fatto che la seconda pallina estratta è nera. Questi eventi possono essere chiamati "casi favorevoli" alla condizione "la seconda pallina estratta è nera." La probabilità dell'evento E_2 è data da:

$$P(E_2) = \frac{\text{n}^\circ \text{ casi favorevoli}}{\text{n}^\circ \text{ casi possibili}} = \frac{15}{25} = 0.6 \quad .$$

L'evento intersezione $E_1 \cap E_2$ può essere così descritto:

$$\begin{aligned} E_1 \cap E_2 \;\; = \{ \;\; & (1,1);(2,1);(3,1); \\ & (1,2);(2,2);(3,2); \\ & (1,3);(2,3);(3,3) \;\; \} \end{aligned}$$

Un'espressione alternativa per descrivere l'evento in questione è data da:

$$E_2 = \{(i,j) : i = 1,2,3 \;\; ; \;\; j = 1,2,3\}.$$

Si osservi che l'insieme $E_1 \cap E_2$ conta 9 elementi che costituiscono i possibili esiti dell'esperimento caratterizzati dal fatto che entrambe le palline estratte sono di colore nero (casi favorevoli alla condizione "le due palline estratte sono nere").
La probabilità dell'evento $E_1 \cap E_2$ è data da:

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{\text{n}^\circ \text{ casi favorevoli}}{\text{n}^\circ \text{ casi possibili}} = \frac{9}{25} = 0.36 \quad .$$

Si sarebbe potuto giungere al medesimo risultato osservando che, avvenendo le estrazioni con riposizione, gli eventi E_1 ed E_2 sono indipendenti e di conseguenza

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) = 0.6 \cdot 0.6 = 0.36 \quad .$$

Svolgimento punto c) Nel caso in cui le estrazioni avvengano senza riposizione lo spazio campionario è dato da:

$$\begin{aligned}\Omega \ = \{ \ & (1,2);(1,3);(1,4);(1,5);\\ & (2,1);(2,3);(2,4);(2,5);\\ & (3,1);(3,2);(3,4);(3,5);\\ & (4,1);(4,2);(4,3);(4,5);\\ & (5,1);(5,2);(5,3);(5,4) \ \}\\ = \ & \{(i,j) : i = 1,2,...,5 \ ; \ j = 1,2,...,5 \ ; \ i \neq j\}.\end{aligned}$$

Lo spazio campionario Ω contiene 20 eventi elementari (n° dei casi possibili).
L'evento E_1 è dato da:

$$\begin{aligned}E_1 \ = \{ \ & (1,2);(1,3);(1,4);(1,5);\\ & (2,1);(2,3);(2,4);(2,5);\\ & (3,1);(3,2);(3,4);(3,5) \ \}\\ = \ & \{(i,j) : i = 1,2,3 \ ; \ j = 1,2,...,5 \ ; \ i \neq j\}.\end{aligned}$$

L'evento E_1 contiene 12 eventi elementari (n° di casi favorevoli alla condizione "la prima pallina estratta è nera"). Si ha dunque che:

$$P(E_1) = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} = \frac{12}{20} = 0.60 \ .$$

L'evento E_2 è dato da:

$$\begin{aligned}E_2 \ = \{ \ & (2,1);(3,1);(4,1);(5,1);\\ & (1,2);(3,2);(4,2);(5,2);\\ & (1,3);(2,3);(4,3);(5,3) \ \}\\ = \ & \{(i,j) : i = 1,2,...,5 \ ; \ j = 1,2,3 \ ; \ i \neq j\}.\end{aligned}$$

L'evento E_2 contiene 12 eventi elementari (n° di casi favorevoli alla condizione "la seconda pallina estratta è nera"). Si ha dunque che:

$$P(E_2) = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} = \frac{12}{20} = 0.60 \ .$$

L'evento intersezione $E_1 \cap E_2$ è dato da:

$$\begin{aligned}E_1 \cap E_2 \ = \{ \ & (1,2);(1,3);(2,1);(2,3);(3,1);(3,2) \ \}\\ = \ & \{(i,j) : i = 1,2,3 \ ; \ j = 1,2,3 \ ; \ i \neq j\}\end{aligned}$$

L'evento $E_1 \cap E_2$ contiene 6 eventi elementari (casi favorevoli alla condizioni "entrambe le palline estratte sono nere"). Si ha dunque che:

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} = \frac{6}{20} = 0.30 \ .$$

Si osservi che il fatto che le estrazioni avvengano senza riposizione, implica che gli eventi E_1 e E_2 non sono indipendenti. Infatti:

$$P(E_1) \cdot P(E_2) = 0.36 \neq P(E_1 \cap E_2).$$

7. Un esperimento consiste nel lanciare due dadi regolari insieme. Dopo aver determinato lo spazio degli eventi elementari, calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

   a) $A =$ "nei due lanci le facce superiori sono uguali";

   b) $B =$ "nei due lanci le facce superiori hanno somma cinque";

   c) $C =$ "il numero riportato su una faccia è il doppio dell'altra".

   Svolgimento
   Svolgimento punto a) Lo spazio campionario è dato da:

$$\begin{aligned} \Omega \ = \{ \quad & (1,1); (1,2); (1,3); (1,4); (1,5); (1,6); \\ & (2,1); (2,2); (2,3); (2,4); (2,5); (2,6); \\ & (3,1); (3,2); (3,3); (3,4); (3,5); (3,6); \\ & (4,1); (4,2); (4,3); (4,4); (4,5); (4,6); \\ & (5,1); (5,2); (5,3); (5,4); (5,5); (5,6); \\ & (6,1); (6,2); (6,3); (6,4); (6,5); (6,6) \ \} \\ = \quad & \{(i,j) : i = 1,2,...,6 \ \ ; \ \ j = 1,2,...,6\}. \end{aligned}$$

   Come si osserva lo spazio campionario è composto da 36 eventi elementari equiprobabili (n° dei casi possibili).
   L'evento A è dato da:

$$\begin{aligned} A &= \{(1,1); (2,2); (3,3); (4,4); (5,5); (6,6)\} \\ &= \{(i,i) : i = 1,2,...,6\} \ . \end{aligned}$$

   L'evento A è composto da 6 eventi elementari (n° di casi favorevoli) e di conseguenza:

$$P(A) = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} = \frac{6}{36} = 0.1\bar{6} \ .$$

   Svolgimento punto b) L'evento B è dato da:

$$\begin{aligned} B &= \{(1,4); (2,3); (3,2); (4,1)\} \\ &= \{(i,j) \in \Omega : i + j = 5\} \ . \end{aligned}$$

   L'evento B è composto da 4 eventi elementari (n° di casi favorevoli) e di conseguenza:

$$P(B) = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} = \frac{4}{36} = 0.\bar{1}.$$

Svolgimento punto c) L'evento C è dato da:

$$\begin{aligned} B &= \{(1,2);(2,4);(3,6);(2,1);(4,2);(6,3))\} \\ &= \{(i,j) \in \Omega : i = (2 \cdot j) \text{ o } j = (2 \cdot i)\} \ . \end{aligned}$$

L'evento C è composto da 6 eventi elementari (n° di casi favorevoli) e di conseguenza:

$$P(C) = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} = \frac{6}{36} = 0.1\bar{6} \ .$$

8. Un esperimento casuale consiste nell'estrarre una pallina da un'urna contenente cinque palline numerate da 1 a 5. Se si estrae una pallina contrassegnata con un numero dispari si lancia una moneta, mentre se si ottiene un numero pari si lancia un dado.

   a) Descrivere lo spazio campionario Ω di tale esperimento;
   b) Descrivere gli eventi $A =$ "Si presentano solo numeri pari" e $B =$ "Esce testa" . Come sono tra di loro i due eventi?

   Svolgimento
   Svolgimento punto a) Indicando con c e t rispettivamente gli eventi elementari "croce" e "testa" che si possono ottenere dal lancio della moneta, lo spazio campionario dell'esperimento descritto dal testo dell'esercizio è dato da:

$$\begin{aligned} \Omega = \{ \quad & (1,t);(1,c); \\ & (2,1);(2,2);(2,3);(2,4);(2,5);(2,6); \\ & (3,t);(3,c); \\ & (4,1);(4,2);(4,3);(4,4);(4,5);(4,6); \\ & (5,t);(5,c) \ \} \ . \end{aligned}$$

   Si osservi che lo spazio campionario è composto da 18 eventi.
   Svolgimento punto b) L'evento A è dato da:

$$A = \{(2,2);(2,4);(2,6);(4,2);(4,4);(4,6)\} \ .$$

   L'evento B è dato da:

$$B = \{(1,t);(3,t);(5,t)\} \ .$$

   Si osservi che A e B sono incompatibili in quanto $A \cap B = \emptyset$.

9. Un gruppo di 180 individui è stato classificato in base all'età (in anni):

classi di età	$10 \vdash 20$	$20 \vdash 30$	$30 \vdash 40$	$40 \vdash 50$	$50 \vdash 60$	$60 \vdash 70$	$70 \vdash 80$	tot
frequenze	10	30	50	30	20	20	20	180

   Scelto a caso un individuo si calcoli la probabilità che abbia un'età:

   a) inferiore ai 50 anni;

b) non inferiore ai 20 anni ma inferiore ai 50 anni;

c) non inferiore a 60 anni.

Svolgimento

Svolgimento punto a) Al fine dello svolgimento dell'esercizio, predisponiamo la seguente tabella:

Classi di età	Frequenze f_j	Fr. cumulate C_j	Fr. retrocumulate R_j
$10 \vdash 20$	10	10	180
$20 \vdash 30$	30	40	170
$30 \vdash 40$	50	90	140
$40 \vdash 50$	30	120	90
$50 \vdash 60$	20	140	60
$60 \vdash 70$	20	160	40
$70 \vdash 80$	20	180	20
tot	180	$--$	$--$

Dalla tabella sopra riportata si osserva che il numero di individui che hanno un'età inferiore a 50 anni è dato dalla quarta frequenza cumulata $C_4 = 120$ che rappresenta il numero di casi favorevoli alla condizione "l'individuo estratto ha un'età inferiore a 50 anni". Il numero dei possibili esiti dell'estrazione casuale di un individuo dalla popolazione considerata (n° di casi possibili) è dato dalla numerosità della popolazione stessa : 180. Alla luce di ciò, la probabilità dell'evento

$$A = \text{“l'individuo estratto ha un'età inferiore ai 50 anni”}$$

è data da:

$$P(A) = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} = \frac{120}{180} = \frac{2}{3} = 0.\bar{6} \quad .$$

Svolgimento punto b) Il numero di individui che, nella popolazione in considerazione, ha un'età non inferiore a 20 ma inferiore a 50 anni è dato da:

$$C_4 - C_1 = 120 - 10 = 110.$$

Tale quantità coincide con il numero di casi favorevoli alla condizione "l'individuo estratto ha un'età non inferiore a 20 ma inferiore a 50 anni". La probabilità dell'evento

$$B = \text{“l'individuo estratto ha un'età non inferiore a 20 anni ma inferiore a 50 anni”}$$

è data da:

$$P(B) = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} = \frac{110}{180} = 0.6111 \quad .$$

Si osservi che, dato che $B \subset A$, la probabilità appena ricavata può essere così calcolata:

$$P(B) = P(A) - P(C)$$

dove

$$C = \text{“l'individuo estratto ha un'età inferiore ai 20 anni”}.$$

Infatti, il numero di individui che hanno un'età inferiore a 20 anni (casi favorevoli) è dato dalla prima frequenza cumulata: 10. Si ha dunque

$$P(C) = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} = \frac{10}{180} = 0.0555$$

$$P(B) = P(A) - P(C) = 0.6666 - 0.0555 = 0.6111 \quad .$$

Svolgimento punto c) Il numero di individui che, nella popolazione in considerazione, ha un'età non inferiore a 60 è dato dalla penultima frequenza retrocumulata: 40. Tale quantità coincide con il numero di casi favorevoli alla condizione "l'individuo estratto ha un'età non inferiore a 60 anni" e di conseguenza la probabilità dell'evento

$$D = \{\text{“l'individuo estratto ha un'età non inferiore a 60 anni”}\}$$

è data da:

$$P(D) = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} = \frac{40}{180} = 0.2222 \quad .$$

10. Da un'urna contenente venti palline numerate da 1 a 20 si estrae una pallina. Determinare la probabilità che il numero della pallina sia dispari sapendo che è divisibile per tre.

Svolgimento
Lo spazio campionario dell'esperimento "estrazione di una pallina" dall'urna specificata dal testo dell'esercizio è dato da:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

Lo spazio campionario è composto dai 20 eventi elementari equiprobabili (casi possibili). Si considerino gli eventi:

$$\begin{aligned} A &= \text{“ Il numero della pallina estratta è dispari''} \\ &= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\} \\ &= \{i \in \Omega : i = 1 + (2 \cdot j) \;\; ; \;\; j = 0, 1, ..., 9\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B &= \text{“ Il numero della pallina estratta è divisibile per tre''} \\ &= \{3, 6, 9, 12, 15, 18\} \\ &= \left\{ i \in \Omega : \frac{i}{3} \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A \cap B &= \text{“il numero della pallina estratta è dispari e divisibile per tre''} \\ &= \{3, 9, 15\} \\ &= \left\{ i \in \Omega : \left(\frac{i}{3} \in \mathbb{N} \right) \;\; \wedge \;\; (i = 1 + (2 \cdot j) \;\; ; \;\; j = 0, 1, ..., 9) \right\} \quad . \end{aligned}$$

L'evento $A \cap B$ è composto da 3 eventi elementari (casi favorevoli alla condizione "il numero della pallina estratta è dispari e divisibile per 3") e, di conseguenza, si ha:

$$P(A \cap B) = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} = \frac{3}{20} = 0.2 \ .$$

L'evento B è composto da 6 eventi elementari (casi favoreli alla condizione "il numero della pallina estratta è divisibile per 3") e, di conseguenza, si ha:

$$P(B) = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} = \frac{6}{20} \ .$$

La probabilità di estrarre una pallina con un numero dispari sapendo che è divisibile per tre è data quindi da:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{3}{20} \cdot \frac{20}{6} = \frac{1}{2} \ .$$

11. Siano A e B due eventi in Ω tali che $P(A) = 0.7$ e $P(A \cup B) = 0.8$. Determinare $P(B)$ nei casi in cui:

    a) A e B sono eventi incompatibili;

    b) A e B sono eventi indipendenti;

    c) $P(A|B) = 0.6$.

    Svolgimento
    Svolgimento punto a) Si ricordi che

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{1}$$

da cui

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) + P(A \cap B).$$

Nell'ipotesi in cui gli eventi A e B siano incompatibili, e quindi $A \cap B = \emptyset$, si ha:

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A) - P(\emptyset) = 0.8 - 0.7 + 0 = 0.1 \ .$$

Svolgimento punto b) Se gli eventi A e B sono indipendenti si ha che:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Di conseguenza:

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= P(A) + P(B) - P(A) \cdot P(B) \\ &= P(A) + P(B)[1 - P(A)] \ . \end{aligned}$$

Si ha così che:

$$P(A \cup B) - P(A) = P(B)[1 - P(A)]$$

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{P(A \cup B) - P(A)}{1 - P(A)} \\ &= \frac{0.8 - 0.7}{1 - 0.7} = \frac{0.1}{0.3} = \frac{1}{3} \ . \end{aligned}$$

Svolgimento punto c) Si ricordi che

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

da cui consegue

$$P(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A|B)} \ .$$

Dall'espressione (1) si ha che

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

e quindi

$$P(B) = \frac{P(A) + P(B) - P(A \cup B)}{P(A|B)}$$

$$P(B) \cdot P(A|B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

$$P(B) \cdot P(A|B) - P(B) = P(A) - P(A \cup B)$$

$$P(B) \cdot [P(A|B) - 1] = P(A) - P(A \cup B)$$

$$\begin{aligned} P(B) &= \frac{P(A) - P(A \cup B)}{P(A|B) - 1} \\ &= \frac{0.7 - 0.8}{0.6 - 1} = \frac{-0.1}{-0.4} = \frac{1}{4} \ . \end{aligned}$$

12. Nel lancio di un dado sia A l'evento "esce un numero dispari", B l'evento "esce un numero pari".

    a) Gli eventi A e B sono incompatibili?
    b) Gli eventi A e B sono complementari?
    c) Gli eventi A e B sono indipendenti?

Svolgimento
Svolgimento punto a) Lo spazio campionario dell'esperimento casuale "lancio di un dado" è dato da:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \ .$$

Gli eventi A e B sono dati da:

$$A = \{1, 3, 5\} \qquad\qquad B = \{2, 4, 6\} \ .$$

Si osservi che $A \cap B = \emptyset$ e quindi gli eventi in considerazione sono incompatibili.
Svolgimento punto b) Si osservi che:

$$A \cup B = \{1, 3, 5, 2, 4, 6\} = \Omega \ .$$

Come visto nel punto precedente, $A \cap B = \emptyset$ e di conseguenza gli eventi in considerazione sono complementari, infatti:

$$\bar{A} = B \quad \text{e} \quad \bar{B} = A \ .$$

Svolgimento punto c) Dato che A e B sono incompatibili, abbiamo che:

$$P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \ .$$

Si osservi che:

$$P(A) = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° si casi possibili}} = \frac{3}{6} = 0.5$$

$$P(B) = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° si casi possibili}} = \frac{3}{6} = 0.5 \ .$$

Inolte:

$$P(A) \cdot P(B) = 0.5^2 \neq 0 = P(A \cap B) \ .$$

Di conseguenza, i due eventi in considerazione non sono indipendenti.

13. Siano A e B due eventi tali che $P(A) = 2/7$, $P(B) = 1/3$ e $P(A \cup B) = 10/21$. Calcolare le seguenti probabilità:

    a) $P(A \cap B)$;
    b) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$;
    c) $P(\bar{A} \cap B)$;
    d) $P(A \cup \bar{B}$;
    e) $P(\bar{A} \cup \bar{B})$.

    Svolgimento
    Svolgimento punto a) Dall'espressione (1) si ha che:

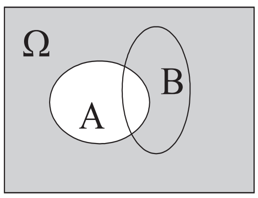
$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= \frac{2}{7} + \frac{1}{3} - \frac{10}{21} = \frac{3}{21} \quad . \end{aligned}$$

Svolgimento punto b) Si osservi che

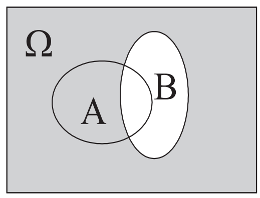
$$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$$

come è possibile intuire guardando le figure di seguito riportate:

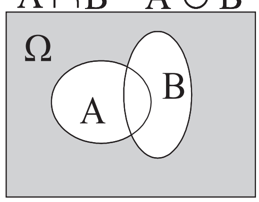
Ā



B̄



$\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{A \cup B}$



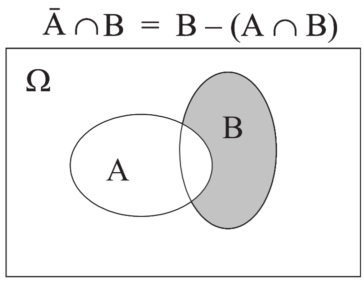
Si ha dunque che:

$$\begin{aligned} P(\bar{A} \cap \bar{B}) &= P(\overline{A \cup B}) \\ &= 1 - P(A \cup B) = 1 - \frac{10}{21} = \frac{11}{21} \quad . \end{aligned}$$

Svolgimento punto c) Si osservi che

$$\bar{A} \cap B = B - (A \cap B)$$

come è possibile intuire guardando la figura di seguito riportata.



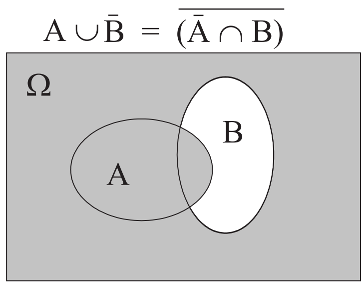
Si osservi inoltre che $(A \cap B) \subset B$ e di conseguenza:

$$\begin{aligned}
P(\bar{A} \cap B) &= P[B - (A \cap B)] \\
&= P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - \frac{3}{21} = \frac{4}{21} \quad .
\end{aligned}$$

Svolgimento punto d) Si osservi che

$$A \cup \bar{B} = \overline{(\bar{A} \cap B)}$$

come è possibile intuire guardando la figura di seguito riportata.



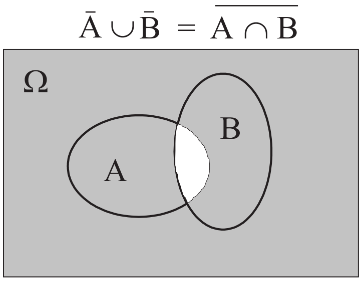
Si ha dunque che:

$$P(A \cup \bar{B}) = P\left(\overline{(\bar{A} \cap B)}\right) = 1 - P(\bar{A} \cap B) = 1 - \frac{4}{21} = \frac{17}{21}.$$

Svolgimento punto e) Si osservi che

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}$$

come è possibile intuire guardando alla figura di seguito riportata.



Si ha dunque che:

$$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{3}{21} = \frac{6}{7}.$$

1.3 Problemi

14. Si supponga di estrarre in blocco, senza reinserirle nel mazzo, 13 carte da un mazzo di 52 (13 carte di cuori, 13 di picche, 13 di fiori, 13 di quadri). Si calcoli la probabilità che le 13 carte contengano:

    a) il due di picche;

    b) una sola carta di picche;

    c) tre carte di fiori e cinque carte di cuori;

    d) solo tre figure.

    Svolgimento
    Svolgimento punto a) Si osservi innanzitutto che, poichè le estrazioni avvengono in blocco, due campioni sono diversi se differiscono per almeno una carta, a prescindere da considerazioni relative all'ordine con cui le stesse vengono disposte all'interno del campione. Il numero di tutti i possibili esiti dell'esperimento (n° di casi possibili) è dato quindi dal numero di combinazioni semplici di 52 oggetti distinti di classe 13:

$$C_{52,13} = \binom{52}{13} \quad .$$

Il numero dei campioni che contengono il due di picche (n° di casi favorevoli) coincide con il numero di possibili campioni che si possono ottenere estraendo 12 carte dal mazzo di 51 carte ottenuto togliendo il due di picche da quello descritto nel testo dell'esercizio. Il numero di casi favorevoli è di conseguenza dato dal numero di combinazioni semplici di 51 oggetti distinti di classe 12:

$$C_{51,12} = \binom{52}{12} \quad .$$

La probabilità dell'evento

$$A = \text{“le carte estrarre contengono il due di picche”}$$

è di conseguenza data da:

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° si casi possibili}} \\ &= \frac{\binom{51}{12}}{\binom{52}{13}} = \frac{51!}{12! \cdot 39!} \cdot \frac{13! \cdot 39!}{52!} \\ &= \frac{13}{52} = 0.25 \quad . \end{aligned}$$

Svolgimento punto b) Il numero di modi in cui la carta di picche può essere scelta è dato dal numero di combinazioni semplici di 13 oggetti distinti (le 13 carte di picche) di classe 1:

$$C_{13,1} = \binom{13}{1} \quad .$$

Il numero di modi in cui le restanti 12 carte possono essere scelte è dato dal numero di combinazioni semplici di 39 oggetti distinti (le 39 carte non di picche) di classe 12:

$$C_{39,12} = \binom{39}{12} \quad .$$

Il numero di possibili campioni contenenti una sola carta di picche (casi favorevoli) è dunque data da:

$$\binom{13}{1}\binom{39}{12} \quad .$$

Indicando con B l'evento "le carte estratte contengono una sola carta di picche" si ha quindi:

$$\begin{aligned}
P(B) &= \frac{\text{n}^\circ \text{ di casi favorevoli}}{\text{n}^\circ \text{ si casi possibili}} \\
&= \frac{\binom{13}{1}\binom{39}{12}}{\binom{52}{13}} = \frac{\frac{13!}{12!\cdot 1!}\cdot\frac{39!}{12!\cdot 27!}}{\frac{52!}{13!\cdot 39!}} \\
&= \frac{13!}{12!\cdot 1!}\cdot\frac{39!}{12!\cdot 27!}\cdot\frac{13!\cdot 39!}{52!} \\
&= \frac{13\cdot 39\cdot 38\cdot 37\cdot 36\cdot 35\cdot 34\cdot 33\cdot 32\cdot 31\cdot 30\cdot 29\cdot 28\cdot 13}{52\cdot 51\cdot 50\cdot 49\cdot 48\cdot 47\cdot 46\cdot 45\cdot 44\cdot 43\cdot 42\cdot 41\cdot 40} \\
&= \frac{13\cdot 17\cdot 19\cdot 29\cdot 31\cdot 37\cdot 39}{2\cdot 5\cdot 5\cdot 41\cdot 43\cdot 46\cdot 47\cdot 51} = 0.0806 \quad .
\end{aligned}$$

Svolgimento punto c) Si supponga di fissare una terna di carte di fiori e una cinquina di carte di cuori. Il numero dei possibili campioni estratti in blocco che contengono queste 8 carte e le rimanenti di quadri o picche, è dato dal numero di campioni che si possono ottenere estraendo in blocco $(13-8) = 5$ carte dal mazzo di $(52-13-13) = 26$ ottenuto togliendo da quello iniziale le carte di cuori e fiori. Questo numero coincide con il numero di combinazioni semplici di 26 oggetti distinti di classe 5:

$$C_{26,5} = \binom{26}{5} \quad .$$

Il numero di possibili campioni di 5 elementi estratti in blocco dal mazzo di carte di seme cuori è dato dal numero di combinazioni semplici di 13 elementi di classe 5:

$$C_{13,5} = \binom{13}{5} \quad .$$

Il numero di possibili campioni di 3 elementi estratti in blocco dal mazzo di carte di seme fiori è dato dal numero di combinazioni semplici di 13 elementi di classe 3:

$$C_{13,3} = \binom{13}{3} \quad .$$

Di conseguenza il numero di possibili campioni di 13 elementi, estratti in blocco dal mazzo di 52 carte, che contengono 3 carte di fiori e 5 di cuori (n° di casi favorevoli), è dato da:

$$\binom{13}{3}\binom{13}{5}\binom{26}{5}.$$

Indicando con C l’evento “il campione estratto contiene 5 carte di cuori e 3 di fiori”, si ha che;

$$\begin{aligned} P(C) &= \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} \\ &= \frac{\binom{13}{3}\binom{13}{5}\binom{26}{5}}{\binom{52}{13}} \\ &= \frac{\frac{13!}{3!\cdot 10!}\cdot\frac{13!}{5!\cdot 8!}\cdot\frac{26!}{5!\cdot 21!}}{\frac{52!}{13!\cdot 39!}} \\ &= \frac{3^2\cdot 11^3\cdot 13^3}{2\cdot 5\cdot 17\cdot 41\cdot 43\cdot 47\cdot 49} = 0.038 \quad . \end{aligned}$$

Svolgimento punto d) Il numero di possibili campioni di 10 carte che possono essere estratti dal mazzo di 40 ottenuto togliendo tutte le figure a quello di 52, è dato dal numero di combinazioni di 40 oggetti distinti di classe 10:

$$C_{40,10} = \binom{40}{10} \quad .$$

Il numero di possibili campioni di 3 carte che possono essere estratti dal mazzo delle 12 figure è dato dal numero di combinazioni di 12 oggetti distinti di classe 3:

$$C_{12,3} = \binom{12}{3} \quad .$$

Il numero di possibili campioni di 13 carte che contengono solo tre figure (n° di casi favorevoli) è di conseguenza dato da:

$$\binom{40}{10}\binom{12}{3} \quad .$$

Indicando con D l'evento "il campione estratto contiene solo tre figure", abbiamo che:

$$\begin{aligned} P(D) &= \frac{\text{n}^\circ \text{ di casi favorevoli}}{\text{n}^\circ \text{ di casi possibili}} \\ &= \frac{\binom{40}{10}\binom{12}{3}}{\binom{52}{13}} \\ &= \frac{\frac{40!}{10!\cdot 30!}\cdot\frac{12!}{3!\cdot 9!}}{\frac{52!}{13!\cdot 39!}} \\ &= \frac{2^2\cdot 11^1\cdot 19\cdot 31\cdot 37\cdot 39}{3\cdot 5\cdot 7^2\cdot 23\cdot 41\cdot 43\cdot 47} = 0.294 \ . \end{aligned}$$

15. Il 60% degli studenti di una facoltà non frequentano ne' il corso A ne' il corso B. Il 20% frequenta il corso A e il 30% il corso B. Scelto a caso uno studente della facoltà, si determini la probabilità:

    a) che frequenti il corso A o il corso B;

    b) che frequenti il corso A e il corso B.

    Svolgimento
    Svolgimento punto a) Si definiscono i seguenti eventi:

    $$A = \text{"lo studente estratto frequenta il corso A"}$$

    $$B = \text{"lo studente estratto frequenta il corso B"} \ .$$

    Sulla base delle informazioni fornite dal testo dell'esercizio si ha che:

    $$P(A) = 0.2$$

    $$P(B) = 0.3$$

    $$P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 0.6 \ .$$

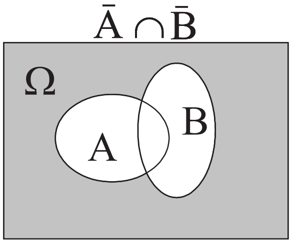
    L'evento "lo studente estratto frequenta il corso A o il corso B", secondo la notazione appena introdotta, è dato da $(A\cup B)$. Si osservi che

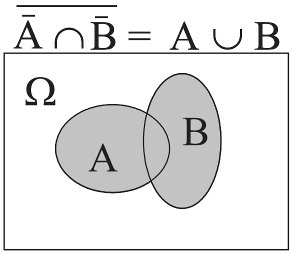
    $$(A\cup B) = (\overline{\bar{A}\cap\bar{B}})$$

    come è evidenziato dai diagrammi di Venn di seguito riportati.

    Si ha dunque che:

    $$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(\overline{\bar{A}\cap\bar{B}}) \\ &= 1 - P(\bar{A}\cap\bar{B}) = 1 - 0.6 = 0.4 \ . \end{aligned}$$





Svolgimento punto b) Ricordando che

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

si ha:

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) + P(B) - P(A \cup B) \\ &= 0.2 + 0.3 - 0.4 = 0.1 \ . \end{aligned}$$

16. Un dado regolare viene lanciato tre volte. Determinare:

   a) la probabilità che tutti i numeri ottenuti siano pari;
   b) la probabilità che la somma dei numeri ottenuti sia cinque.

Svolgimento
Svolgimento punto a) Si definiscano gli eventi:

$$p_1 = \text{“dal primo lancio dal dado si ottiene un numero pari”}$$

$$p_2 = \text{“dal secondo lancio dal dado si ottiene un numero pari”}$$

$$p_3 = \text{“dal terzo lancio dal dado si ottiene un numero pari”} \ .$$

Si osservi che lo spazio campionario associato a ciascuno dei lanci del dado è

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

e di conseguenza

$$p_1 = \{2, 4, 6\}$$
$$p_2 = \{2, 4, 6\}$$
$$p_3 = \{2, 4, 6\} \ .$$

Si ha dunque che:

$$P(p_1) = P(p_2) = P(p_3) = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} = \frac{3}{6} \ .$$

Secondo la notazione appena introdotta, l'evento “i numeri ottenuti dai tre lanci sono pari” è dato da $(p_1 \cap p_2 \cap p_3)$.

Dato che i lanci sono fisicamente separati si ha che gli eventi p_1, p_2 e p_3 sono indipendenti e di conseguenza si ha che:

$$\begin{aligned} P(p_1 \cap p_2 \cap p_3) &= P(p_1) \cdot P(p_2) \cdot P(p_3) \\ &= \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8} \ . \end{aligned}$$

Svolgimento punto b) Si osservi che, il numero 5 può essere ottenuto come somma di tre naturali positivi solamente sommando i numeri appartenenti alle seguenti terne:

$$(1,2,2) \ ; (2,1,2) \ ; (2,2,1) \ ; (1,1,3) \ ; (1,3,1) \ ; (3,1,1) \ .$$

Indicando con D l'evento "la somma dei tre numeri ottenuti è 5", si ha:

$$D = \{(1,2,2) \ ; (2,1,2) \ ; (2,2,1) \ ; (1,1,3) \ ; (1,3,1) \ ; (3,1,1)\} \ .$$

Il numero di casi favorevoli è di conseguenza pari a 6.
Il numero di possibili terne di numeri che possono essere ottenute lanciando un dado tre volte (n° di casi possibili) è dato dal numero di possibili disposizioni con ripetizione di 6 oggetti distinti di classe 3:

$$D^r_{6,3} = 6^3 = 216 \ .$$

In definitiva si ha dunque che:

$$\begin{aligned} P(D) &= \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} \\ &= \frac{6}{216} = \frac{1}{36}. \end{aligned}$$

17. Da un mazzo di 52 carte si estraggono con reinserimento due carte. Determinare:

    a) la probabilità di estrarre due re;

    b) la probabilità di estrarre due re sapendo che sono uscite due figure.

    Svolgimento
    Svolgimento punto a) Si considerino gli eventi:

    $$E_1 = \text{“alla prima estrazione si ottiene un re”}$$

    $$E_2 = \text{“alla seconda estrazione si ottiene un re”}$$

    $$E = E_1 \cap E_2 = \text{“si estraggono due re”}$$

    Si osservi che gli eventi E_1 e E_2 sono indipendenti ed equiprobabili in quanto le estrazioni avvengono con riposizione. In particolare:

    $$P(E_1) = P(E_2) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}.$$

$$P(E) = P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2) = \frac{1}{13^2} = \frac{1}{169} \ .$$

Svolgimento punto b) Si considerino gli eventi:

$$F_1 = \text{“alla prima estrazione si ottiene una figura”}$$

$$F_2 = \text{“alla seconda estrazione si ottiene una figura”}$$

$$F = F_1 \cap F_2 = \text{“si estraggono due figure”}$$

Si osservi che gli eventi F_1 e F_2 sono indipendenti ed equiprobabili in quanto le estrazioni avvengono con riposizione. In particolare, nel mazzo di carte da cui si effettuano le estrazioni sono presenti 12 figure e quindi:

$$P(F_1) = P(F_2) = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}.$$

$$P(F) = P(F_1 \cap F_2) = P(F_1) \cdot P(F_2) = \frac{3^2}{13^2} = \frac{9}{169} \ .$$

Si osservi che $E \subset F$.
La probabilità di estrarre due re dato che sono state estratte due figure, coincide con il calcolo della seguente probabilità condizionata:

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} \ .$$

Essendo $E \subset F$, si ha che $E \cap F = E$ e di conseguenza:

$$P(E \cap F) = P(E) = \frac{1}{169} \ .$$

Concludendo, si ha:

$$P(E|F) = \frac{P(E \cap F)}{P(F)} = \frac{\frac{1}{169}}{\frac{9}{169}} = \frac{1}{9} \ .$$

18. Si lanci una moneta che può dare testa o croce con probabilità rispettivamente pari a $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{5}$. Se si ottiene testa si lancia un dado regolare con sei facce, se si ottiene croce si lancia un tetraedro regolare (“dado” con quattro facce numerate da 1 a 4). Determinare la probabilità di ciascun evento elementare.

    Svolgimento
    Indicando con t e c rispettivamente gli eventi “testa” e “croce” ottenibili dal lancio di una moneta, si ha che lo spazio campionario dell'esperimento descritto dal testo dell'esercizio è dato da:

$$\Omega = \{(t,1);\ (t,2);\ (t,3);\ (t,4);\ (t,5);\ (t,6);\ (c,1);\ (c,2);\ (c,3);\ (c,4)\} \ .$$

Si indichi con D_j l'evento "si ottiene il numero j lanciando il dado" e con T_k l'evento "si ottiene il numero k lanciando il tetraedro". Naturalmente $j = 1, 2, ..., 6$ e $k = 1, 2, 3, 4$. Si osservi che:

$$P(D_j) = \frac{1}{6} \qquad j = 1, 2, ..., 6$$

$$P(T_k) = \frac{1}{4} \qquad k = 1, 2, 3, 4 \ .$$

Si consideri l'evento elementare $(t, 1)$. Si osservi che $P(1|t) = P(D_1)$, alla luce di ciò si ha:

$$P\{(t, 1)\} = P(t) \cdot P(1|t) = P(t) \cdot P(D_1) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{15} \ .$$

In modo del tutto analogo:

$$P\{(t, 2)\} = P(t) \cdot P(2|t) = P(t) \cdot P(D_2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{15};$$

$$P\{(t, 3)\} = P(t) \cdot P(3|t) = P(t) \cdot P(D_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{15};$$

$$P\{(t, 4)\} = P(t) \cdot P(4|t) = P(t) \cdot P(D_4) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{15};$$

$$P\{(t, 5)\} = P(t) \cdot P(5|t) = P(t) \cdot P(D_5) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{15};$$

$$P\{(t, 6)\} = P(t) \cdot P(6|t) = P(t) \cdot P(D_6) = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{15} \ .$$

Si consideri ora l'evento elementare $(c, 1)$. Si osservi che $P(1|c) = P(T_1)$, alla luce di ciò si ha:

$$P\{(c, 1)\} = P(c) \cdot P(1|c) = P(c) \cdot P(T_1) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20} \ .$$

In modo del tutto analogo:

$$P\{(c, 2)\} = P(c) \cdot P(2|c) = P(c) \cdot P(T_2) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20};$$

$$P\{(c, 3)\} = P(c) \cdot P(3|c) = P(c) \cdot P(T_3) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20};$$

$$P\{(c, 4)\} = P(c) \cdot P(4|c) = P(c) \cdot P(T_4) = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{20} \ .$$

Si osservi che:

$$\begin{aligned} P(\Omega) &= P\{(t, 1)\} + P\{(t, 2)\} + P\{(t, 3)\} + P\{(t, 4)\} + P\{(t, 5)\} + P\{(t, 6)\} + \\ &\quad + P\{(c, 1)\} + P\{(c, 2)\} + P\{(c, 3)\} + P\{(c, 4)\} \\ &= 6 \cdot \frac{1}{15} + 4 \cdot \frac{3}{20} = \frac{2}{5} + \frac{3}{5} = 1 \ . \end{aligned}$$

19. Due urne contrassegnate dalle lettere A e B sono così composte. L'urna A contiene 5 palline rosse e 5 palline nere. L'urna B contiene 7 palline rosse e 8 palline nere. Un esperimento casuale consiste nello scegliere a caso un'urna e quindi nell'estrarre una pallina dall'urna prescelta. Calcolare la probabilità che la pallina estratta sia rossa.

    Svolgimento
    In primo luogo si ricava lo spazio campionario dell'esperimento descritto nel testo dell'esercizio. Si indichino con A e B rispettivamente gli eventi "la pallina viene estratta dall'urna A" e "la pallina viene estratta dall'urna B". Dato che l'urna dalla quale viene estratta la pallina è scelta casualmente, si ha che:

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2} \ .$$

Si indichino inoltre con r e n rispettivamente gli eventi "la pallina estratta è rossa" e "la pallina estratta è nera". Si ha che:

$$\Omega = \{(A, r) \ ; (A, n) \ ; (B, r) \ (B, n)\} \ .$$

Si osservi a questo punto che l'evento r altro non è che l'unione dei due eventi elementari disgiunti (A, r) e (B, r). Si ha dunque che:

$$\begin{aligned} P(r) &= P\{(A, r) \cup (B, r)\} \\ &= P\{(A, r)\} + P\{(B, r)\} \\ &= P(A) \cdot P(r|A) + P(B) \cdot P(r|B) \end{aligned}$$

Si osservi ora che la probabilità di estrarre una pallina rossa dato che è stata scelta l'urna A $(P(r|A))$ coincide esattamente con la probabilità di estrarre una pallina rossa dall'urna A:

$$P(r|A) = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2} \ .$$

In modo del tutto analogo:

$$P(r|B) = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} = \frac{7}{15} \ .$$

Concludendo:

$$\begin{aligned} P(r) &= P(A) \cdot P(r|A) + P(B) \cdot P(r|B) \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{7}{15}\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{7}{30} = \frac{29}{60} \ . \end{aligned}$$

1.4 Tabelle a doppia entrata

20. Cento soggetti vengono classificati secondo il fatto che abbiano acquistato nell'ultimo mese una videocassetta e \ o un CD. Si sa che dei 75 acquirenti di videocassette, 53 hanno acquistato anche un CD; 14 sono coloro che non hanno acquistato nè CD nè videocassette. Estraendo a caso uno di essi, qual è la probabilità che:

    a) non abbia acquistato un CD;
    b) abbia acquistato un CD ma non una videocassetta;
    c) abbia acquistato un CD o una videocassetta;
    d) abbia acquistato un CD sapendo che ha acquistato una videocassetta;
    e) abbia acquistato un CD sapendo che non ha acquistato una videocassetta.

Svolgimento

Svolgimento punto a) Sulla base delle informazioni fornite dal testo dell'esercizio è possibile costruire la seguente tabella a doppia entrata

	CD	$\overline{CD}$	*tot*
V	**53**	22	**75**
$\overline{V}$	11	**14**	25
tot	64	36	**100**

(2)

dove in grassetto vengono riportate le frequenze che vengono direttamente fornite dal testo dell'esercizio. Le restanti frequenze vengono ricavate sfruttando le relazioni intercorrenti tra frequenze marginali e congiunte in una tabella di contingenza. Come si nota dalla tabella, il numero di individui che non hanno acquistato un CD (n° di casi favorevoli) è 36. Si ha di conseguenza che:

$$P(\overline{CD}) = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} = \frac{36}{100} = 0.36 \ .$$

Svolgimento punto b) Il numero di individui che hanno acquistato un CD ma non una videocassetta (n° di casi favorevoli) è 11. Si ha di conseguenza che:

$$P(CD \cap \overline{V}) = \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} = \frac{11}{100} = 0.11 \ .$$

Svolgimento punto c)

$$P(CD \cup V) = P(CD) + P(V) - P(CD \cap V) = \frac{64}{100} + \frac{75}{100} - \frac{53}{100} = \frac{86}{100} = 0.86 \ .$$

Svolgimento punto d)

$$\begin{aligned} P(CD|V) &= \frac{P(CD \cap V)}{P(V)} \\ &= \frac{\frac{53}{100}}{\frac{75}{100}} = \frac{53}{75} = 0.7066 \ . \end{aligned}$$

Svolgimento punto e)

$$\begin{aligned} P(CD|\overline{V}) &= \frac{P(CD \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} \\ &= \frac{\frac{11}{100}}{\frac{25}{100}} = \frac{11}{25} = 0.44 \quad . \end{aligned}$$

Osservazione. Di seguito riportiamo la tabella delle frequenze relative congiunte e marginali ricavabile dalla (2):

	CD	$\overline{CD}$	*tot*
V	0.53	0.22	0.75
$\overline{V}$	11	0.14	0.25
tot	0.64	0.36	1

Si osservi che le probabilità richieste dal testo dell'esercizio coincidono con le frequenze relative appena calcolate o sono da esse direttamente ricavabili. In particolare:

a') $P(\overline{CD}) = f_r(\overline{CD}) = 0.36$;

b') $P(CD \cap \overline{D}) = f_r(CD; \overline{D}) = 0.11$;

c') $P(CD \cup V) = P(CD) + P(V) - P(CD \cap V) = f_r(CD) + f_r(V) - f_r(CD; V) = 0.86$;

d') $P(CD|V) = \dfrac{P(CD \cap V)}{P(V)} = \dfrac{f_r(CD; V)}{f_r(V)} = 0.0766$

e') $P(CD|\overline{V}) = \dfrac{P(CD \cap \overline{V})}{P(\overline{V})} = \dfrac{f_r(CD; \overline{V})}{f_r(\overline{V})} = 0.44$

21. Dai dati del Registro Navale Italiano relativi al 1991 si è ricavata la seguente tabella in cui le navi di oltre 100 tonnellate, battenti bandiera italiana, sono classificate per classe di età e classe di stazza lorda (in tonnellate):

Età (anni) / Classe di stazza (ton.)	$0 \vdash 10$	$10 \vdash 20$	20 e oltre	Totale
$100 \vdash 500$	256	199	325	780
$500 \vdash 10000$	136	287	224	647
$10000 \vdash 150000$	73	96	46	215
Totale	465	582	595	1642

Supponendo di estrarre casualmente una delle 1642 navi di cui sopra, si determini:

a) la probabilità che la nave estratta abbia un'età compresa tra 10 e 20 anni;

b) la probabilità che la nave estratta pesi almeno 10.000 tonnellate e sia stata varata da meno di dieci anni;

c) la probabilità che la nave estratta sia stata varata da meno di 20 anni o pesi tra 500 e 10.000 tonnellate o possegga entrambe le caratteristiche.

Svolgimento

Svolgimento punto a) Di seguito si riporta la tabella delle frequenze relative congiunte e marginali ricavata dalla tabella di contingenza fornita dal testo dell'esercizio:

Età (anni) / Classe di stazza (ton.)	$0 \vdash 10$	$10 \vdash 20$	20 e oltre	Totale
$100 \vdash 500$	0.1559	0.1212	0.1979	0.4750
$500 \vdash 10000$	0.0828	0.1748	0.1364	0.3940
$10000 \vdash 150000$	0.0445	0.0585	0.0280	0.1310
Totale	0.2832	0.3544	0.3624	1.0000

Si ha che:

$$\begin{aligned} P(10 \leq \text{età} < 20) &= P(10 \vdash 20) \\ &= \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} = f_r(10 \vdash 20) = 0.3544 \quad . \end{aligned}$$

Svolgimento punto b)

$$\begin{aligned} P[(\text{peso} \geq 10000) \cap (\text{età} < 10)] &= P((10000 \vdash 150000) \cap (0 \vdash 10)) \\ &= \frac{\text{n° di casi favorevoli}}{\text{n° di casi possibili}} \\ &= f_r[(10000 \vdash 150000); (0 \vdash 10)] = 0.0445 \quad . \end{aligned}$$

Svolgimento punto c)

$$\begin{aligned} & P((500 \leq \text{peso} < 10000) \cup (0 \leq \text{età} < 20)) = \\ = \; & P((500 \vdash 10000) \cup (0 \vdash 20)) \\ = \; & P(500 \vdash 10000) + P(0 \vdash 20) - P((500 \vdash 10000) \cap (0 \vdash 20)) \\ = \; & P(500 \vdash 10000) + P(0 \vdash 10) + P(10 \vdash 20) + \\ & -P((500 \vdash 10000) \cap (0 \vdash 10)) - P((500 \vdash 10000) \cap (10 \vdash 20)) \\ = \; & f_r(500 \vdash 10000) + f_r(0 \vdash 10) + f_r(10 \vdash 20) + \\ & -f_r((500 \vdash 10000); (0 \vdash 10)) - f_r((500 \vdash 10000), (10 \vdash 20)) \\ = \; & 0.394 + 0.2832 + 0.3544 - 0.0828 - 0.1748 = 0.774 \quad . \end{aligned}$$