MICROECONOMETRIA – LEZIONE 12

Titolo nota 03/06/2019

MODELLI PER VDQ

$$y = j \quad , j = 0,1 \quad \left(\text{VARIABILE DUMMY} \right)$$

RISULTATO DI UNA SCELTA ECONOMICA

$$E(y) = PR(y = 1)$$

$i = 1 \dots N$ (CROSS-SECTION)

$$E(y_i) = Pr(y_i = 1) \quad p_i$$

LEGAME TRA p_i E y_i È DATO DALLA FUNZIONE DI REGRESSIONE:

$$\underset{(1 \cdot 1)}{p_i} = E(y_i) = F(\underset{(1 \cdot k)}{x_i} \underset{(k \cdot 1)}{\beta}) \longleftrightarrow \boxed{\begin{array}{l} y_i = F(x_i \beta) \\ \quad + u_i \end{array}}$$

I DIVERSI MODELLI PER SCELTE DISCRETE BINARIE ORIGINANO DALLE DIVERSE IPOTESI CIRCA LA FORMA FUNZIONALE $F(\cdot)$

1) LINEAR PROBABILITY MODEL

$$y_i = x_i\beta + u_i \qquad F(x_i\beta) = x_i\beta$$

$$p_i = E(y_i) = x_i\beta \quad , \quad E(u_i) = 0$$

PER OTTENERE $\hat{p}_i$, BASTA STIMARE I PARAMETRI β CON OLS: $\hat{p}_i = x_i \hat{\beta}$

<u>PROBLEMA PRINCIPALE</u>: $0 < p_i < 1$

NON C'È ALCUNA GARANZIA CHE $\hat{p}_i$ SIA COMPRESA TRA 0 E 1, $\forall i$

PROBLEMA CORRELATO: U_i non sono "NORMALI"

$$y_i = x_i\beta + U_i$$

$$\boxed{y_i = 1} \longrightarrow U_i = 1 - \underbrace{x_i\beta}_{p_i}$$

$$\boxed{y_i = 0} \longrightarrow U_i = -\underbrace{x_i\beta}_{p_i}$$

NATURA DICOTOMICA/DISCONTINUA DEGLI ERRORI

PROBLEMA CORRELATO 2 : U_i SONO ETEROSCHEDASTICI

$$VAR(U_i) = Pr(y_i=1)\,E(U_i^2 \mid y_i=1) + Pr(y_i=0)\,E(U_i^2 \mid y_i=0)$$

$$= p_i(1-p_i)^2 + (1-p_i)\cdot p_i^2$$

$$= p_i(1-p_i)\left[\cancel{(1-p_i)} + \cancel{p_i}\right] = \boxed{p_i(1-p_i)}$$

$i = 1 \ldots N$

PER TRATTARE ETEROSCHEDASTICITÀ DI U_i POSSIAMO USARE LA TRASFORMAZIONE GLS (RICORDANDO CHE OLS APPLICATO A MODELLO TRASFORMATO CON GLS SONO BLUE)

<u>TRASFORMAZIONE GLS</u> : $\frac{1}{\sqrt{p_i(1-p_i)}}$

$$\frac{u_i}{\sqrt{p_i(1-p_i)}} = u_i^* \quad \left(\text{ERRORI TRASFORMATI CON GLS}\right)$$

$$\underline{\underline{\mathrm{VAR}(u_i^*)}} = \mathrm{VAR}\left(\frac{u_i}{\sqrt{p_i(1-p_i)}}\right) =$$

$$= \frac{1}{p_i(1-p_i)} \mathrm{VAR}(u_i) = \underline{\underline{1}}, \quad \forall i$$

RICORDIAMOCI CHE LO STIMATORE FGLS SI BASA SU $\widehat{p_i} = x_i'\widehat{\beta}$ — VISTO CHE NON ESISTE ALCUNA GARANZIA AFFINCHÉ $\widehat{p_i} \in (0,1)$, ALLORA È POSSIBILE CHE $\widehat{p_i}(1-\widehat{p_i})$ SIA, PER ALCUNI i, NEGATIVO, RENDENDO COSÌ INFATTIBILE LA TRASFORMAZIONE FGLS : $1/\sqrt{\widehat{p_i}(1-\widehat{p_i})}$

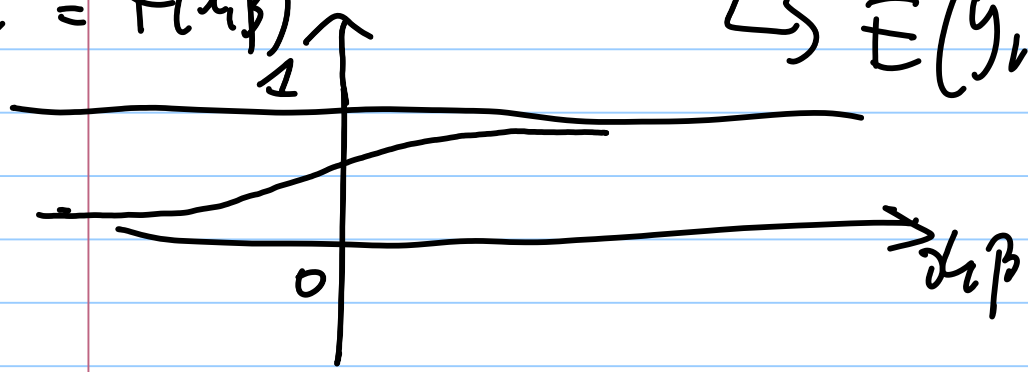
MODELLI

2) PROBIT / LOGIT

IDEA : CUMULATIVE DISTRIBUTION FUNCTION (CDF)

$\hookrightarrow E(y_i) = \underbrace{F}_{\text{CDF}}(x_i'\beta) = p_i$

$p_i = F(x_i'\beta)$



MODELLI PROBIT : $\overset{p_i}{F(x_i'\beta)} \equiv \Phi(x_i'\beta)$

↳ CDF DI UNA DISTRIBUZIONE NORMALE STANDARD

MODELLI LOGIT : $\overset{p_i}{F(x_i'\beta)} \equiv \Lambda(x_i'\beta)$

↳ CDF DI UNA DISTRIBUZIONE LOGISTICA

$$= \frac{\exp(x_i'\beta)}{1 + \exp(x_i'\beta)}$$

TRATTABILITÀ ANALITICA DEI MODELLI LOGIT: ODDS RATIO

$$\frac{p_i}{1-p_i} = \text{ODDS RATIO}$$

$$p_i = \frac{\exp(x_i\beta)}{1+\exp(x_i\beta)} \; ; \; 1-p_i = 1 - \frac{\exp(x_i\beta)}{1+\exp(x_i\beta)} = \frac{1}{1+\exp(x_i\beta)}$$

$$\frac{p_i}{1-p_i} = \frac{\exp(x_i\beta)}{\cancel{1+\exp(x_i\beta)}} \cdot \left(\cancel{1+\exp(x_i\beta)}\right) =$$

$$= \exp(x_i\beta)$$

$$\Downarrow$$

$$\log\left(\frac{p_i}{1-p_i}\right) = x_i\beta$$

(LOG ODDS RATIO LINEARE IN β)

COMMENTO: I MODELLI PROBIT E LOGIT HANNO PERFORMANCE EMPIRICHE MOLTO SIMILI

COME STIMARE I PARAMETRI β ?

STIMATORE NON LINEARE: MASSIMA VEROSIMIGLIANZA

FUNZIONE DI PROBABILITÀ CONGIUNTA, DATA LA NATURA BINOMIALE DELLA VARIABILE DIP:

$$Pr\left(Y_1 = y_1 ; Y_2 = y_2 \dots ; Y_N = y_N\right) = \prod_{i=1}^{N} p_i^{y_i} (1-p_i)^{1-y_i}$$

DOVE $p_i \equiv F(x_i \beta)$

$\Phi(x_i\beta) \qquad \Lambda(x_i\beta)$

FUNZIONE DI VEROSIMIGLIANZA:

$$L(\beta \mid y, x) = \prod_{i=1}^{N} p_i^{y_i} (1-p_i)^{1-y_i}$$

FUNZIONE DI LOG VEROSIMIGLIANZA:

$$\log L(\beta \mid y, x) = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i \log p_i + (1-y_i) \log(1-p_i) \right]$$

$$\log L(\beta \mid y, x) = \sum_{i=1}^{N} \left[y_i \cdot \log F(x_i \beta) + (1 - y_i) \log\left(1 - F(x_i \beta)\right) \right]$$

$$\max_{\underset{(K \cdot 1)}{\beta}} \log L(\cdot) \Rightarrow \underset{(K \cdot 1)}{\hat{\beta}_{ML}}$$

(NON HA SOLUZIONE ANALITICA IN FORMA CHIUSA)

SOLUZIONE NUMERICA

RICORDIAMOCI CHE LA MATRICE DI INFORMAZIONE

È CRUCIALE PER L'INFERENZA NEL CONTESTO ML:

$$I(\hat{\beta}_{ML}) = E\left(-\frac{\partial^2 \log L(\hat{\beta}_{ML})}{\partial \hat{\beta}_{ML} \, \partial \hat{\beta}_{ML}'}\right)$$

$$\underset{(K \cdot K)}{ACOV}(\hat{\beta}_{ML}) \equiv I(\hat{\beta}_{ML})^{-1} \longrightarrow ASE(\hat{\beta}_{ML_j}) = \sqrt{ACOV(\hat{\beta}_{ML})_{jj}}$$

↳ MATRICE DI VAR/COV ASINTOTICHE

DOVE $ASE(\hat{\beta}_{NL,j})$ È LO STANDARD ERROR ASINTOTICO ASSOCIATO A $\hat{\beta}_{NL,j}$, $j = 1 \ldots K$

$\Downarrow$

$$\frac{\hat{\beta}_{NL,j}}{ASE(\hat{\beta}_{NL,j})} \equiv t\text{-STATISTIC ASINTOTICO}$$

DELL'IPOTESI NULLA

$H_0 : \beta_j = 0$

GIUSTIFICAZIONI ECONOMICHE DEI MODELLI LOGIT/PROBIT

1) RANDOM UTILITY MODEL (RUM)

$$U_{ij} = S_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

U_{ij}: UTILITÀ DELL'INDIVIDUO i-ESIMO DERIVANTE DALLA SCELTA j-ESIMA

S_{ij}: COMPONENTE SISTEMATICA/DETERMINISTICA

ε_{ij}: ERRORE/COMPONENTE CASUALE

$j = 0, 1$

$$U_{i1} = S_{i1} + \varepsilon_{i1}$$
$$U_{i0} = S_{i0} + \varepsilon_{i0}$$

SI EFFETTUA LA SCELTA CHE MASSIMIZZA L'UTILITÀ RANDOM

$$p_i = \Pr(y_i = 1) = \Pr(U_{i1} > U_{i0}) =$$
$$= \Pr(S_{i1} + \varepsilon_{i1} > S_{i0} + \varepsilon_{i0}) =$$
$$= \Pr(\underbrace{\varepsilon_{i0} - \varepsilon_{i1}}_{\varepsilon_i} < \underbrace{S_{i1} - S_{i0}}_{S_i}) = F(S_i)$$

$F \rightarrow$ CDF

SPECIFICAZIONE DELLA COMPONENTE SISTEMATICA DI RUM

N.B. $S_{ij} = \alpha_j + x_{ij}\gamma$

$(1\cdot 1) \quad (1\cdot 1) \quad 1(k-1) \quad (k-1)\cdot 1$

$$\begin{cases} S_{i1} = \alpha_1 + x_{i1}\gamma \\ S_{i0} = \alpha_0 + x_{i0}\gamma \end{cases}$$

$$\to S_i \equiv S_{i1} - S_{i0} = (\alpha_1 - \alpha_0) + (x_{i1} - x_{i0})\gamma = x_i\beta$$

DOVE

$$\lambda \equiv (\alpha_1 - \alpha_0)$$

$$x_i \equiv (\underset{\text{COSTANTE}}{1} \;\vdots\; x_{i1} - x_{i0}) \quad \text{E} \quad \beta = \begin{pmatrix} \lambda \\ \hline \gamma \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$p_i \equiv \Pr(y_i = 1) = \Pr(U_{i1} > U_{i0}) = \underset{\text{CDF}}{F}(x_i\beta)$$

$$\Phi(x_i\beta) \qquad \Lambda(x_i\beta)$$

2) VARIABILE LATENTE (NON OSSERVATA)

$$y_i^* = x_i\beta + \varepsilon_i$$

↳ VARIABILE LATENTE, CIOÈ LA "VERA" MOTIVAZIONE INDIVIDUALE A UNA SCELTA

SI OSSERVA :

$y_i = 1$ SE $y_i^* \geq \lambda$ SOGLIA

$y_i = 0$ SE $y_i^* < \lambda$

$$p_i \equiv Pr(y_i = 1) = Pr(y_i^* \geq \lambda) =$$

$$= Pr(x_i\beta + \varepsilon_i \geq \lambda)$$

$$= Pr(\varepsilon_i \geq \lambda - x_i\beta)$$

$$= Pr(\varepsilon_i < x_i\beta - \lambda) = F(x_i\beta - \lambda)$$

SE $\lambda = 0$, ALLORA $p_i \equiv F(x_i\beta) \begin{cases} \Phi(x_i\beta) \\ \Lambda(x_i\beta) \end{cases}$

LE RAZIONALIZZAZIONI 1) E 2) COINCIDONO

SE $\lambda = 0$ E $S_i = x_i\beta$

INTERPRETAZIONE DEI PARAMETRI NEI MODELLI LPM, PROBIT E LOGIT

LPM : $\overset{= p_i}{E(y_i)} = x_i\beta$

EFFETTO MARGINALE

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_{ir}} = \frac{\partial E(y_i)}{\partial x_{ir}} = \beta_r \quad \left(\text{COEFFICIENTE ASSOCIATO A } x_{ir}\right)$$

$$r = 1 \ldots K$$

<u>PROBIT</u>:

$$\underbrace{E(y_i)}^{p_i} = F(x_i\beta) = \underset{\text{CDF NORMALE STANDARD}}{\Phi}(x_i\beta)$$

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_{ir}} = \frac{\partial E(y_i)}{\partial x_{ir}} = \frac{\partial \Phi(\cdot)}{\partial x_i\beta} \cdot \frac{\partial x_i\beta}{\partial x_{ir}} \rightarrow$$

EFFETTO MARGINALE

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_{i2}} = \phi(x_i\beta) \cdot \beta_2$$

DENSITÀ DI NORMALE STANDARD

(EFFETTO MARGINALE NON COINCIDE CON β_2 E VARIA CON $i = 1 \dots N$)

<u>LOGIT</u> : $\underset{p_i}{E(y_i)} = F(x_i\beta) = \Lambda(x_i\beta)$

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_{i2}} = \frac{\partial \Lambda(x_i\beta)}{\partial x_i\beta} \cdot \underbrace{\frac{\partial x_i\beta}{\partial x_{i2}}}_{\beta_2} = \Lambda(x_i\beta)\left[1 - \Lambda(x_i\beta)\right] \cdot \beta_2$$