Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

10 Giugno 2020

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce.
Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.
Puoi utilizzare solo i fogli protocollo consegnati durante lo svolgimento della prova.
Al termine della prova devi riconsegnare *tutti e solo* i fogli ricevuti.
Immediatamente dopo la consegna, su ciascun foglio protocollo scrivi in modo chiaro e leggibile a penna indelebile il tuo nome, cognome e numero di matricola.
I fogli recanti una qualsiasi correzione o cancellazione nei dati identificativi dello studente non verranno valutati a meno di non richiederne l'immediata sostituzione.

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{\ln x}$$

dove $\ln x$ è il logaritmo naturale (base e, il numero di Nepero o Eulero) di x.

(a) (2 punti) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione.

Soluzione:
Ricordando che l'argomento del logaritmo deve essere positivo, si deve escludere dall'insieme di definizione l'intervallo $(-\infty, 0]$.
Inoltre, poiché il denominatore di una frazione non può essere uguale a zero si ha:

$$\ln x \neq 0$$

da cui $x \neq 1$.
La funzione è pertanto definita per ogni $x \in (0, 1) \ \cup \ (1, +\infty)$.

(b) (2 punti) Identifica le eventuali simmetrie (funzione *pari* o *dispari*).

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Soluzione:
Non essendo definita per $x \leq 0$, la funzione non può presentare simmetrie.

(c) (2 punti) Determina il *segno della funzione* nel campo di esistenza, $f(x) \geq 0$.

Soluzione:
Per determinare il segno della funzione occorre risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{1}{\ln x} > 0$$

Si tratta di una disequazione fratta. Poiché il numeratore è positivo, il segno è deciso dal denominatore, per cui:

$$\ln x > 0$$

Questa è una disequazione logaritmica elementare. Essendo la base del logaritmo maggiore di 1, il verso della disequazione è preservato e si ha:

$$x > 1$$

La funzione restituirà valori positivi per $x > 1$ e valori negativi per $0 < x < 1$.

(d) (2 punti) Determina gli eventuali *asintoti orizzontali* calcolando i *limiti* di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

Soluzione:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{\lim_{x \to +\infty} \ln x} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

La funzione presenta quindi un asintoto orizzontale per $x \to +\infty$ (destro) corrispondente all'asse delle ascisse.
Il limite per $x \to -\infty$ invece non esiste perché la funzione non è definita per valori negativi e quindi non può esistere un asintoto orizzontale sinistro.

(e) (2 punti) Determina gli eventuali *asintoti verticali.*

Soluzione:
Si ha un asintoto verticale in corrispondenza del valore che annulla il denominatore ($x = 1$). Si ha infatti:

$$\lim_{x \to 1^+} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

(f) (2 punti) Calcola il limite di $f(x)$ per x che tende a 0 da destra ($x \to 0^+$).

Soluzione:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\ln x} = \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

(g) (3 punti) Calcola la *derivata prima* $f'(x)$ e determina i valori per cui $f(x)$ è *crescente/decrescente* studiando il segno della derivata.

Soluzione:
Ricordando la derivata di una potenza, la derivata di un logaritmo e la regola della derivata di una funzione composta si ha:

$$f'(x) = -\frac{1}{(\ln x)^2}\frac{1}{x}$$

Questa funzione è sempre negativa nel campo di esistenza, poiché $1/x$ è positiva per $x > 0$ e $1/(\ln x)^2$ è sempre positiva per $x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$. Ne deriva che $f(x)$ è decrescente in senso stretto.

(h) (3 punti) Calcola la *derivata seconda* $f''(x)$ e determina la *concavità/convessità* di $f(x)$ studiando il segno di tale derivata.

Soluzione:

$$\begin{aligned} f''(x) &= D\left[-\frac{1}{x(\ln x)^2}\right] = \frac{1}{x^2(\ln x)^4} D\left[x(\ln x)^2\right] \\ &= \frac{1}{x^2(\ln x)^4}\Big((\ln x)^2 + xD\left[(\ln x)^2\right]\Big) \\ &= \frac{1}{x^2(\ln x)^4}\Big((\ln x)^2 + 2x\frac{\ln x}{x}\Big) = \frac{2+\ln x}{x^2(\ln x)^3} \end{aligned}$$

Per studiare il segno della derivata seconda risolviamo la seguente disequazione fratta:

$$\frac{2+\ln x}{x^2(\ln x)^3} \geq 0$$

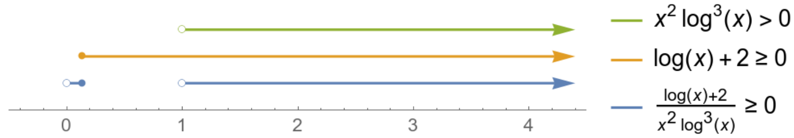
Studiando separatamente il segno di numeratore e denominatore ed applicando la regola dei segni, si ottiene l'insieme delle soluzioni.
Il denominatore, essendo il prodotto di una funzione quadratica (sempre positiva) e del cubo di un logaritmo, è positivo se il logaritmo è positivo, per cui sarà positivo per $x > 1$ e negativo per $0 < x < 1$.
Studiando il segno del numeratore si ha:

$$\begin{aligned} 2 + \ln x &\geq 0 \\ \ln x &\geq -2 \\ x &\geq \mathrm{e}^{-2} \end{aligned}$$

dove

$$\mathrm{e}^{-2} = \frac{1}{\mathrm{e}^2} \approx 0.135$$

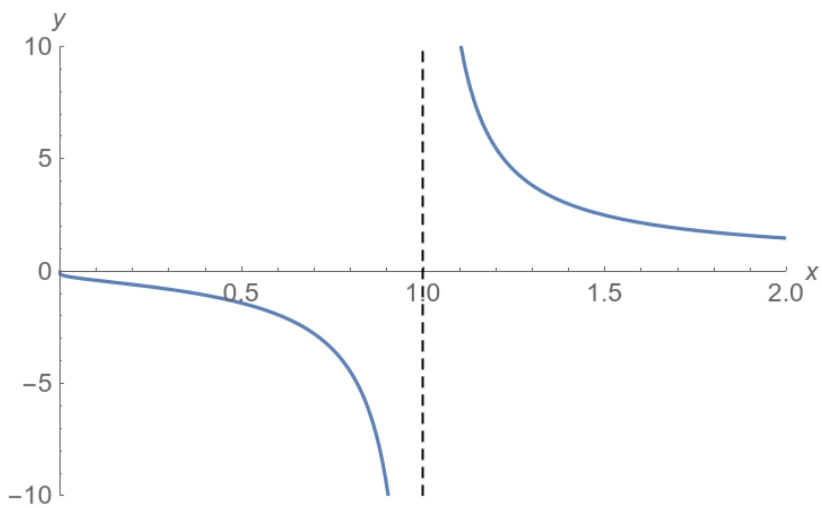
applicando la regola dei segni si ottiene finalmente la soluzione: $x \in (0, \mathrm{e}^{-2}] \cup (1, +\infty)$.



$f(x)$ è pertanto strettamente concava nell'intervallo $(\mathrm{e}^{-2}, 1)$ e strettamente convessa nell'intervallo $(0, \mathrm{e}^{-2}) \cup (1, +\infty)$. $x = \mathrm{e}^{-2}$ è un punto di flesso.

(i) (3 punti) Disegna il *grafico* della funzione $f(x)$ nell'intervallo $x \in (0, 2)$.

Soluzione:



2. *Problema*: In Italia la ritenuta alla fonte a titolo di imposta dei dividendi è pari al 26% (su ogni euro di dividendi accreditato la banca addebita 26 centesimi a titolo di imposta).

(a) (2 punti) Se la banca ti addebita sul conto 312 euro a titolo di imposta sui dividendi a quanto ammontano i dividendi che hai percepito al netto di queste imposte?

Soluzione:
Indicando con D i dividendi al lordo delle imposte, con d i dividendi al netto delle imposte e con t le imposte, essendo $t = 0,26D$ e $d = D - t$, si ha:

$$t = \frac{26}{100} D = \frac{13}{50}(d + t)$$

da cui:

$$d = \frac{37}{13} t = \frac{37}{13} \cdot 312 = 888$$

Sul conto si avrà quindi un accredito netto di 888 euro.

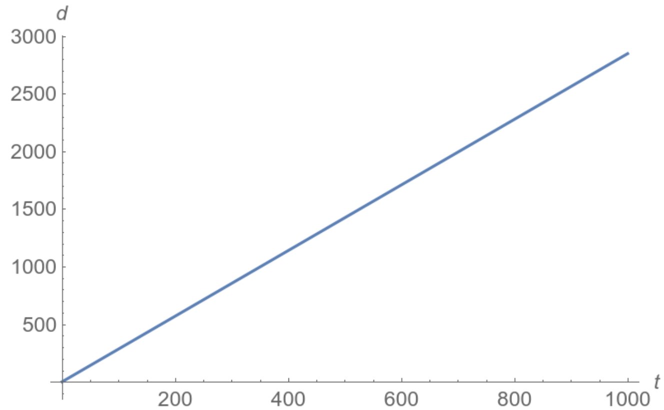
(b) (2 punti) Esprimi i dividendi netti d (in euro) in funzione delle imposte t (in euro), costante l'aliquota al 26%, e disegna il grafico di questa funzione.

Soluzione:

Come visto al punto precedente:

$$d = \frac{37}{13}t \approx 2,85 \cdot t$$

Si tratta di una funzione lineare che passa per l'origine degli assi con coefficiente angolare positivo e pari a circa 2,85.



(c) (2 punti) In base a quanto sopra, sai dire come e di quanto variano i dividendi netti per ogni euro aggiuntivo addebitato a titolo di imposta se l'aliquota rimane costante al 26%? Tale variazione è costante oppure dipende dal livello iniziale delle imposte?

Soluzione:

La variazione dei dividendi netti che fa seguito ad un aumento unitario delle imposte non è nient'altro che la derivata della funzione di cui sopra.

Essendo questa funzione lineare, la sua derivata è costante e pari al coefficiente angolare; per cui, indipendentemente dal livello iniziale, per ogni euro di imposte aggiuntivo addebitato i dividendi netti aumentano di $2,85$ euro circa.

3. (3 punti) *Problema.* Un'urna contiene 10 palline bianche, 20 palline nere e 5 palline rosse. Ragionando in termini di casi favorevoli su casi possibili, calcola la probabilità che, estraendo tre palline a caso dall'urna senza reinserimento (senza cioè reinserire la pallina nell'urna dopo averla estratta), queste siano tutte bianche.

Soluzione:

I casi possibili sono dati dalle disposizioni semplici di 35 oggetti (le palline presenti nell'urna) di classe 3 (le palline estratte):

$$D_{35,3} = \frac{35!}{(35-3)!} = 35 \times 34 \times 33 = 39\,270$$

I casi favorevoli sono dati dalle disposizioni semplici di 10 oggetti (le palline bianche) di classe 3 (le palline estratte):

$$D_{10,3} = \frac{10!}{(10-3)!} = 10 \times 9 \times 8 = 720$$

La probabilità che tre palline estratte a caso dall'urna siano tutte bianche è quindi pari a:

$$\frac{D_{10,3}}{D_{35,3}} = \frac{10 \times 9 \times 8}{35 \times 34 \times 33} = \frac{720}{39\,270} \approx 0,0183$$

ovvero l'1,8% circa.

Esercizio/Problema:	1	2	3	Totale
Punti:	21	6	3	30
Punteggio:				