Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PRIMA PROVA PARZIALE – 6 Dicembre 2019

FILA A

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

1. **(8 punti)** Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3y^4}{4x^4+9y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Si stabilisca sè f è continua in $\mathbb{R}^2$;

L'unico punto problematico è l'origine. posto $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$ si ha che per $(x,y) \neq (0,0)$ $|f(x,y)| = \dfrac{\rho^7 |\cos\theta|^3 \sin\theta|^4}{\rho^4(4\cos^4\theta + 9\sin^4\theta)}$

poiché $4\cos^4\theta + 9\sin^4\theta$ ha un minimo positivo m in $[0,2\pi]$ risulta $|f(x,y)| \leq \rho^3 \cdot \frac{1}{m}$. Quindi f è continua in $\mathbb{R}^2$.

c. **(3 punti)** si calcolino tutte le derivate direzionali nell'origine;

$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ poiché f è nulla sugli assi. sia $v = (a,b)$ con $a^2+b^2=1$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{t^7 a^3 b^4}{t^5(4a^4+9b^4)} = 0$$

d. **(2 punti)** si studi la differenziabilitá della funzione f nell'origine.

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^3y^4}{(4x^4+9y^4)\sqrt{x^2+y^2}}$$

ponendo $x = \rho\cos\theta$ $y = \rho\sin\theta$ si ha che

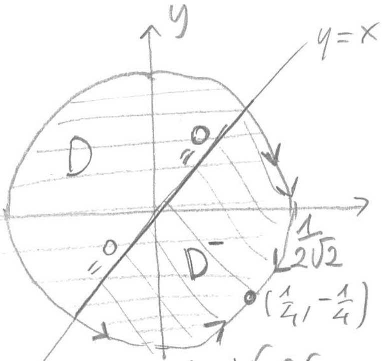
$$\lim_{\rho \to 0} \frac{\rho^7 \cos^3\theta \sin^4\theta}{\rho^5(4\cos^4 + 9\sin^4)} = 0$$ per il motivo citato al punto a.

2. **(8 punti)** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \sqrt[4]{|x-y|}\, e^{-x^2-y^2}.$$

a. **(4 punti)** Si determinino i massimi e i minimi assoluti di f in

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 8x^2 + 8y^2 \leq 1\}.$$



• Essendo $F(x,y) \geq 0$ ed essendo $F(x,y) = 0 \iff y = x$, tutti i punti in D con $x=y$ sono di Minimo assoluto

•• Essendo $(x,y) \in D \iff (-x,-y) \in D$ e $F(x,y) = F(-x,-y)$, per queste simmetrie studio F in $D \cap \{y \leq x\} = D^-$ ove $F(x,y) = \sqrt[4]{x-y}\, e^{-x^2-y^2}$

••• In $\mathrm{int}(D^-)$ $\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = e^{-x^2-y^2} \sqrt[4]{x-y} \left(\dfrac{1}{4(x-y)} - 2x \right) \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = e^{-x^2-y^2} \sqrt[4]{x-y} \left(\dfrac{-1}{4(x-y)} - 2y \right) \end{cases}$ Si ottiene $\nabla F = 0 \iff x = -y = \frac{1}{4}$. Ma $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right) \in \partial D^-$, quindi non ci sono punti estremali interni a D^-.

•••• Per il Teorema di Weierstrass il punto di Max assoluto è su ∂D^-, in particolare sulla semicirconferenza. Definisco $g(\theta) = F\left(\frac{1}{2\sqrt{2}} \cos\theta, \frac{1}{2\sqrt{2}} \sin\theta\right)$ per $\theta \in \left(-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right)$

si ottiene $g(\theta) = \sqrt[4]{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \sqrt[4]{\cos\theta - \sin\theta}\; e^{-\frac{1}{8}}$

Poiché $t \mapsto \sqrt[4]{t}$ è crescente, studio $\tilde{g}(\theta) = \cos\theta - \sin\theta$, $\theta \in \left(-\frac{3}{4}\pi, \frac{\pi}{4}\right)$

e trovo $\tilde{g}'(\theta) = -\sin\theta - \cos\theta$

e quindi $\theta = -\frac{\pi}{4}$ punto di Max.

∴ Quindi $\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$ e $\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$ sono Max assoluti per F in D

b. **(4 punti)** Si tracci un grafico qualitativo locale (individuando la retta tangente e la concavitá/convessitá) della curva di livello di f passante per $(1,0)$.

$F(1,0) = e^{-1}$. Definisco $G(x,y) = \sqrt[4]{x-y}\, e^{-x^2-y^2} - e^{-1}$

$G \in C^1(U_{(1,0)})$ $U_{(1,0)}$ intorno di $(1,0)$

$G(1,0) = 0$

$\dfrac{\partial G}{\partial y}(1,0) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(1,0) = -\dfrac{e^{-1}}{4} \neq 0$. Per il Teorema del Dini

$\exists\, \varphi : U_1 \to U_0$ t.c. $\varphi(1) = 0$ e $G(x, \varphi(x)) = 0$ $\forall x \in U_1$

Considero $G(x, \varphi(x)) = \sqrt[4]{x - \varphi(x)} \cdot e^{-x^2 - \varphi(x)^2} - e^{-1} = 0$

e derivo rispetto a $x \Rightarrow e^{-x^2-\varphi(x)^2} \left[\frac{1}{4}(x-\varphi(x))^{-\frac{3}{4}} (1 - \varphi'(x)) + (x - \varphi(x))^{1/4} (-2x - 2\varphi(x)\varphi'(x)) \right] = 0$

essendo $\varphi(1) = 0$ ottengo $\varphi'(1) = -7$

derivo ancora $\Rightarrow e^{-x^2-\varphi(x)^2} \Big\{ \left[\frac{1}{4}(x-\varphi(x))^{-\frac{3}{4}} (1-\varphi'(x)) + (x-\varphi(x))^{\frac{1}{4}} (-2x - 2\varphi(x)\varphi'(x)) \right] \cdot$
$\cdot (-2x - 2\varphi(x)\varphi'(x)) - \frac{3}{16}(x-\varphi(x))^{-\frac{7}{4}} (1-\varphi'(x))^2 - \frac{1}{4}(x-\varphi(x))^{-\frac{3}{4}} \varphi''(x) + \frac{1}{4}(x-\varphi(x))^{-\frac{3}{4}} \cdot$
$\cdot (1-\varphi'(x))(-2x - 2\varphi(x)\varphi'(x)) + (x-\varphi(x))^{1/4} (-2 - 2\varphi'(x) - 2\varphi(x)\varphi''(x)) \Big\} = 0$

Da cui $\varphi''(1) = -464$. Quindi

3. **(6 punti)** Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

dove

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{se } n \text{ è pari} \\ n & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Se ne determini il raggio di convergenza.

$$\sqrt[n+1]{a_n} = \begin{cases} \sqrt[n+1]{n} & \text{se } n \text{ è dispari} \\ \frac{1}{\sqrt[n+1]{n}} & \text{se } n \text{ è pari} \end{cases}$$

$$\limsup_n \sqrt[n+1]{a_n} = \liminf_n \sqrt[n+1]{a_n} = 1$$

$R = 1$ se $x = \pm 1$ la serie non converge poiché il termine generale non tende a zero

b. **(3 punti)** Si determinino gli insiemi di convergenza uniforme.

tutti e soli i compatti contenuti in $(-1, 1)$

4. **(4 punti)** Si calcoli, con errore inferiore a 10^{-3},

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^9}\, dx. = \int_0^{1/2} \sum_0^{+\infty} (-1)^n x^{9n}$$

la serie converge uniformemente in $[0, 1/2]$ e quindi posso scambiare i due simboli di integrale e sommatoria.

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^9} = \sum_0^{+\infty} (-1)^n \int_0^{1/2} x^{9n}\, dx = \sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{(9n+1)\, 2^{9n+1}} \; : \; \frac{1}{(9n+1)2^{9n+1}} < \frac{1}{1000}$$

con $n = 1$

quindi il valore richiesto è il primo termine della serie: $\frac{1}{2}$

5. **(8 punti)** Si consideri la successione di funzioni $\{f_n^a\}_{n=1}^{\infty}$ definita da

$$f_n^a(x) = n^a \arctan\left(\frac{x}{n}\right).$$

a. **(4 punti)** Si determini, al variare di a, l'insieme di convergenza puntuale E_a di $\{f_n^a\}_{n=1}^{\infty}$.

$f_n^a(0) = 0 \ \forall a$. per $x \neq 0$ $f_n^a(x) \sim n^a \frac{x}{n} \longrightarrow \begin{cases} \infty & \text{se } a > 1 \quad \text{(il segno dipende da } x!) \\ x & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } a < 1 \end{cases}$

$E_a = \{0\}$ per $a > 1$

$E_a = \mathbb{R}$ per $a \leq 1$

b. **(4 punti)** Si stabilisca se la convergenza risulta uniforme su E_a.

per $a > 1$ ovviamente su E_a c'è convergenza uniforme!

per $a = 1$: le funzioni $f_n^1(x)$ sono tutte limitate su $\mathbb{R}$, mentre la funzione limite non lo è: quindi non c'è convergenza uniforme su E_1

$a < 1$ $\quad \sup_{x \in \mathbb{R}} |f_n^a(x) - 0| = n^a \pi/2 \longrightarrow 0 \iff a < 0$

quindi ho convergenza uniforme su $E_a \iff a < 0$

Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PRIMA PROVA PARZIALE – 6 Dicembre 2019

FILA B

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4y^3}{2x^4+16y^4} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Si stabilisca se f è continua in $\mathbb{R}^2$;

l'unico punto da controllare è l'origine. posto $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\sin\theta$

si ha che $\left| f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \right| = \left| \dfrac{\rho^7 \cos^4\theta \sin^3\theta}{\rho^4 \{2\cos^4\theta + 16\sin^4\theta\}} \right| < \dfrac{\rho^3}{m}$

poiché $2\cos^4\theta + 16\sin^4\theta$ ha un minimo m positivo in $[0, 2\pi]$, f risulta continua in $(0,0)$

c. **(3 punti)** si calcolino tutte le derivate direzionali nell'origine;

$\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$ perché f è nulla sugli assi. sia $v = (a,b)$ $a^2+b^2=1$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = \lim_{t \to 0} \frac{t^7 a^4 b^3}{t^5(2a^4+16b^4)} = 0 \quad \forall v$$

d. **(2 punti)** si studi la differenziabilitá della funzione f nell'origine.

$$\frac{f(x,y) - f(0,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x^4y^3}{\sqrt{x^2+y^2}\,(2x^4+16y^4)}$$

passando in coordinate polari ho che

$$\frac{f(x,y) - \langle \nabla f, (x,y) \rangle}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{\rho^7 \cos^4\theta \sin^3\theta}{\rho^5(2\cos^4\theta + 16\sin^4\theta)} \to 0 \text{ per } \rho \to 0$$

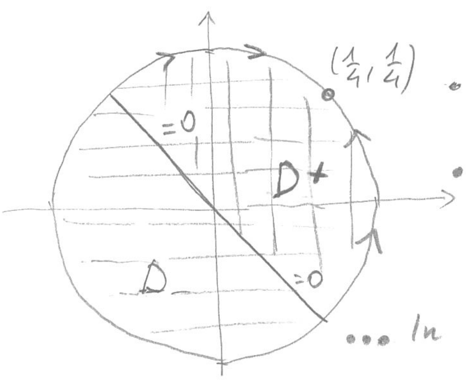
uniformemente in θ per quanto detto al punto a

2. **(8 punti)** Si consideri la funzione $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x,y) = \sqrt[4]{|x+y|}\,e^{-x^2-y^2}.$$

a. **(4 punti)** Si determinino i massimi e i minimi assoluti di f in

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 8x^2 + 8y^2 \le 1\}.$$



• Essendo $f \ge 0$ e $f(x,y) = 0 \iff y = -x$, tutti i punti in D con $y=-x$ sono di minimo assoluto

•• Essendo $(x,y) \in D \iff (-x,-y) \in D$ e $f(x,y) = f(-x,-y)$, per queste simmetrie studio f in $D \cap \{y \ge -x\} = D^+$ ove $f(x,y) = \sqrt[4]{x+y}\, e^{-x^2 - y^2}$

••• In int(D^+) si ha $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{-x^2-y^2}\sqrt[4]{x+y}\left(\dfrac{1}{4(x+y)} - 2x\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = e^{-x^2-y^2}\sqrt[4]{x+y}\left(\dfrac{1}{4(x+y)} - 2y\right) \end{cases}$

Si ottiene $\nabla f = 0 \iff x = y = \frac{1}{4}$.

Ma $(\frac{1}{4},\frac{1}{4}) \in \partial D^+$, quindi non ci sono punti estremali interni a D^+.

•••• Per il Teorema di Weierstrass il punto di Massimo assoluto è su ∂D^+, in particolare sulla semicirconferenza. Definisco $g(\theta) = f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\theta, \frac{1}{2\sqrt{2}}\sin\theta\right)$ per $\theta \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$

Si ottiene $g(\theta) = \sqrt[4]{\frac{1}{2\sqrt{2}}}\sqrt[4]{\cos\theta + \sin\theta}\; e^{-\frac{1}{8}}$.

poiché $t \to \sqrt[4]{t}$ è crescente, studio $\tilde{g}(\theta) = \cos\theta + \sin\theta$ $\theta \in (-\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi)$

e si trova $\tilde{g}'(\theta) = -\sin\theta + \cos\theta$

e quindi $\theta = \frac{\pi}{4}$ punto di Massimo.

⁘ Quindi $(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$ e $(-\frac{1}{4},-\frac{1}{4})$ sono Max assoluti di f in D

b. **(4 punti)** Si tracci un grafico qualitativo locale (individuando la retta tangente e la concavitá/convessitá) della curva di livello di f passante per $(0,1)$.

$f(0,1) = e^{-1}$. Definisco $G(x,y) = f(x,y) - e^{-1}$

$G \in C^1(U_{(0,1)})$ con $U_{(0,1)}$ intorno di $(1,0)$

$G(0,1) = 0$

$\dfrac{\partial G}{\partial y}(0,1) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,1) = -\dfrac{7}{4}e^{-1} \ne 0$. Per il Teorema del Dini

$\exists\, \varphi : U_0 \to U_1$ t.c. $\varphi(0) = 1$ e $G(x, \varphi(x)) = 0 \quad \forall x \in U_0$

Considero $G(x,\varphi(x)) = \sqrt[4]{x + \varphi(x)}\; e^{-x^2 - \varphi^2(x)} - e^{-1} = 0 \quad \forall x \in U_0$

e derivo rispetto a $x \Rightarrow e^{-x^2-\varphi(x)^2}\left[\frac{1}{4}(x+\varphi(x))^{-\frac{3}{4}}(1+\varphi'(x)) + (x+\varphi(x))^{\frac{1}{4}}(-2x - 2\varphi(x)\varphi'(x))\right] = 0$

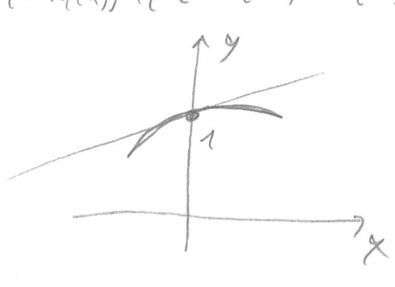
Essendo $\varphi(0) = 1$ ottengo $\varphi'(0) = \frac{1}{7}$

derivo ancora $\Rightarrow e^{-x^2-\varphi(x)^2}\left\{\left[\frac{1}{4}(x+\varphi(x))^{-\frac{3}{4}}(1+\varphi'(x)) + (x+\varphi(x))^{\frac{1}{4}}(-2x - 2\varphi(x)\varphi'(x))\right] \cdot\right.$

$\cdot(-2x - 2\varphi(x)\varphi'(x)) - \frac{3}{16}(x+\varphi(x))^{-\frac{7}{4}}(1+\varphi'(x))^2 + \frac{1}{4}(x+\varphi(x))^{-\frac{3}{4}}\varphi''(x) + \frac{1}{4}(x+\varphi(x))^{-\frac{3}{4}} \cdot$

$\left.\cdot\,(1+\varphi'(x))(-2x - 2\varphi(x)\varphi'(x)) + (x+\varphi(x))^{\frac{1}{4}}(-2 - 2\varphi'(x)^2 - 2\varphi(x)\varphi''(x))\right\} = 0$

Da cui $\varphi''(0) = -\dfrac{464}{343}$ Quindi



3. **(6 punti)** Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n+1}$$

dove

$$a_n = \begin{cases} n^2 & \text{se } n \text{ è pari} \\ \dfrac{1}{n^2} & \text{se } n \text{ è dispari} \end{cases}$$

a. **(3 punti)** Se ne determini il raggio di convergenza.

posto $n+1=k$ si consideri la serie $\sum_{k=2}^{+\infty} a_{k-1} x^k$

$\sqrt[k]{a_{k-1}} = \sqrt[k]{\frac{1}{(k-1)^2}}$ se k è pari $\sqrt[k]{a_{k-1}} = \sqrt[k]{(k-1)^2}$ per k dispari

quindi $\limsup_k \sqrt[k]{a_{k-1}} = \liminf_k \sqrt[k]{a_{k-1}} = 1$

per $x = \pm 1$ la serie non converge poiché il termine generale non tende a zero.

b. **(3 punti)** Si determinino gli insiemi di convergenza uniforme.

tutti e soli gli intervalli compatti contenuti in $(-1,1)$

4. **(4 punti)** Si calcoli, con errore inferiore a 10^{-3},

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^{12}}\, dx.$$

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{1+x^{12}} dx = \int_0^{1/2} \sum_0^{+\infty} (-1)^n x^{12n}$$

$$= \sum_0^{+\infty} (-1)^n \int_0^{1/2} x^{12n} =$$

$$= \sum_0^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{12n+1}(12n+1)}$$

$$\simeq \frac{1}{2}$$

poiché la serie converge uniformemente in $[0,1/2]$ è lecito scambiare il simbolo di serie con quello di integrale;

Essendo una serie a termini alterni basta chiedere $\frac{1}{2^{12n+1}(12n+1)} < \frac{1}{1000}$

basta $n = 1$ quindi il valore approssimato è il primo termine della serie

5. **(8 punti)** Si consideri la successione di funzioni $\{f_n^a\}_{n=1}^{\infty}$ definita da

$$f_n^a(x) = n \arctan\left(\frac{x}{n^a}\right).$$

a. **(4 punti)** Si determini, al variare di a, l'insieme di convergenza puntuale E_a di $\{f_n^a\}_{n=1}^{\infty}$.

$f_n^a(0) = 0 \;\; \forall a$ per $x \neq 0$ $f_n^a(x) \sim n \frac{x}{n^a} \longrightarrow \begin{cases} \infty & \text{se } a < 1 \\ x & \text{se } a = 1 \\ 0 & \text{se } a > 1 \end{cases}$

$E_a = \{0\}$ se $a < 1$

$E_a = \mathbb{R}$ se $a \geq 1$

b. **(4 punti)** Si stabilisca se la convergenza risulta uniforme su E_a.

Ovviamente per $a<1$ ho convergente uniforme.

per $a=1$ osservo che $f_n^1(x)$ sono funzioni limitate ma la funzione limite non lo è: quindi non ho convergenza uniforme su E_1

Sia $a > 1$ $\quad \sup_{x \in R} |f_n^a(x) - 0| = n \pi/2$

quindi non ho convergente uniforme su Ea