Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PROVA SCRITTA– 31 Gennaio 2018

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{4n-2}}{(2n)!}$$

a. **(4 punti)** Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice e gli insiemi di convergenza uniforme.

Raggio di convergenza $= +\infty$ in quanto $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)!}{(2n+2)!} = 0$

la convergenza è uniforme in ogni intervallo $[-\rho,\rho]$ $\rho>0$

la convergenza non è uniforme su $\mathbb{R}$ in quanto

$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| f(x) - \sum_{n=1}^{N}(-1)^n \frac{x^{4n-2}}{(2n)!}\right| = +\infty$ (vedi punto 2; si faccia $\lim_{x\to\pm\infty}$!)

in alternativa $\lim_{n\to+\infty} \frac{(2n)^{4n-2}}{(2n)!} = +\infty$ quindi il termine generale non va a zero uniformemente

b. **(2 punti)** Si calcoli la somma della serie e la si indichi con $f(x)$.

$$x^{-2}\sum_{1}^{+\infty}(-1)^n \frac{(x^2)^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{x^2}\left[\cos x^2 - 1\right]$$

c. **(2 punti)** Si calcoli, con errore inferiore a 10^{-3}, l'integrale $\int_0^{1/2} \frac{f(x)}{x}\,dx$.

Poiché la convergenza è uniforme in ogni compatto si ha che

$$\int_0^{1/2} \frac{f(x)}{x}dx = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \int_0^{1/2}\frac{x^{4n-3}}{(2n)!}dx = \sum_{1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{(2n)!\,(4n-2)\,2^{4n-2}}$$

troviamo quindi il primo indice per cui $(2n)!\,(4n-2)\,2^{4n-2} > 10^3$

per $n=2$ $\quad 64\cdot 24\cdot 6 > 1000$ quindi

$$\int_0^{1/2}\frac{f(x)}{x} \simeq \frac{-1}{2!\cdot 2\cdot 2^2} \quad \text{a meno di } 10^{-3}$$

2. **(9 punti)** Sia $\alpha > 0$ e si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definita da

$$f_n(x) = \frac{|x|^n}{x^{2n} + n^\alpha}.$$

N.B. $f_n(x) = f_n(-x)$

a. **(3 punti)** Si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ e si determinino gli α per cui si ha convergenza uniforme in $\mathbb{R}$;

CONV. PUNTUALE: • se $x=0$ $f_n(x)=0$

•• se $|x|<1$, $x\neq 0$ $f_n(x) \sim \frac{|x|^n}{n^\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

••• se $|x|=1$ $f_n(x) = \frac{1}{1+n^\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

•••• se $|x|>1$ $f_n(x) \sim \frac{1}{|x|^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} 0 = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

CONV. UNIFORME SU $\mathbb{R}$

$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x>0} f_n(x)$

$f_n'(x) = \frac{n x^{n-1}(n^\alpha - x^{2n})}{(x^{2n}+n^\alpha)^2} > 0 \iff 0<x<n^{\frac{\alpha}{2n}}$
$x>0$

$\Rightarrow \sup_{x>0} f_n(x) = f_n\left(n^{\frac{\alpha}{2n}}\right) = \frac{1}{2n^{\frac{\alpha}{2}}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$f_n \to 0$ uniformemente in $\mathbb{R}$ $\forall \alpha>0$.

b. **(3 punti)** Si determinino gli α per cui la serie di funzioni $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ converge uniformemente in $\mathbb{R}$;

N.B. per $x=\pm 1$ $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^\alpha}$ che converge se e solo se $\alpha>1$

Quindi deve essere necessariamente $\alpha>1$; di più,

$\sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = f_n(n^{\frac{\alpha}{2n}}) = \frac{1}{2n^{\frac{\alpha}{2}}} = a_n$. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\iff \alpha>2$

Per cui per il Teorema di Weierstrass $\sum f_n$ conv. uniform. in $\mathbb{R}$ se $\alpha>2$

c. **(3 punti)** Si provi che per $\alpha > 1$ si ha $\int_{-1}^{1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{-1}^{1} f_n(x)\, dx.$

$\sup_{x\in[-1,1]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,1]} f_n(x) = f_n(1) = \frac{1}{1+n^\alpha} = b_n$

$f_n'(x) > 0$ in $[0,1]$

Poiché $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\forall \alpha>1$ $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ conv. uniformemente in $[-1,1]$ $\forall \alpha>1$

$\Rightarrow$ l'uguaglianza proposta è vera

3. **(8 punti)** Si consideri

$$\begin{cases} (1+x^2)y' + 6xy - 3y^{2/3}(1+x^2)\log(3+x^2) = 0 \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

a. **(2 punti)** Si provi che per ogni $y_0 \neq 0$ e per ogni x_0 esiste unica la soluzione locale del problema di Cauchy.

La funzione $F(x,y) = -\frac{6xy}{1+x^2} + \frac{3y^{2/3}}{1+x^2}$ è continua in $\mathbb{R}\times(\mathbb{R}\setminus\{0\})$

ed è localmente Lipschitz rispetto a y essendo

$\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{6x}{1+x^2} + \frac{2}{y^{1/3}(1+x^2)}$. Per cui $\exists$ unica la soluzione

locale di $\begin{cases} y' = F(x,y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$

a. **(3 punti)** Per ogni $y_0 \neq 0$ e per ogni x_0, si determini la soluzione locale del problema di Cauchy.

Poniamo $z(x) = y(x)^{\frac{1}{3}}$ $\Rightarrow$ $z' = \frac{1}{3}y^{-\frac{2}{3}}y'$

$\Rightarrow$ $z' = -\frac{2x}{1+x^2}z + \log(3+x^2)$ $\Rightarrow$ $z(x) = e^{-\int\frac{2x}{1+x^2}dx}\left[\int \log(3+x^2)\, e^{\int\frac{2x}{1+x^2}dx}dx + K\right]$

$\Rightarrow$ $z(x) = \frac{1}{1+x^2}\left[\frac{3x+x^3}{3}\log(3+x^2) - \frac{2}{9}x^3 + K\right]$, $K \in \mathbb{R}$

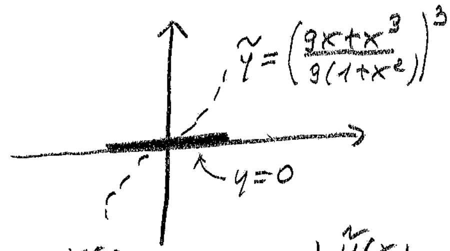
$y = z^3$ e $y(x_0) = y_0$ $\Rightarrow$ $y(x) = \left[\frac{3x+x^3}{3(1+x^2)} - \frac{2x^3}{9(1+x^2)} + \frac{K}{1+x^2}\right]^3$ (*)

con $K = (1+x_0^2)\left[\sqrt[3]{y_0} - \frac{3(x_0+x_0^3)}{3(1+x_0^2)} - \frac{2x_0^3}{9(1+x_0^2)}\right]$

c. **(3 punti)** Si provi che per $x_0 = y_0 = 0$ esisteno piú soluzioni locali del precedente problema di Cauchy. Si provi inoltre che per $x_0 = y_0 = 0$ esistono infinite soluzioni del problema di Cauchy definite su tutto $\mathbb{R}$.

$y(x) = 0$ è soluzione per il problema di Cauchy con $y(0) = 0$

la funzione $\tilde{y}$ in (*) per $K = 0$ è soluzione del problema di Cauchy per $y(0) = 0$:



Ci sono così almeno 4 soluzioni locali $y_1(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ \tilde{y}(x) & x \geq 0 \end{cases}$, $y_2(x) = \begin{cases} \tilde{y}(x) & x<0 \\ 0 & x \geq 0 \end{cases}$,

$y_3(x) = \tilde{y}(x)$, $y_4(x) = 0$

Per ogni K, le funzioni y in (*) sono tali che $\lim_{x\to\infty} y(x) = +\infty$

e $\lim_{x\to-\infty} y(x) = -\infty$: $\Rightarrow$ $\forall K$ $\exists\, p_K$: $y(p_K) = 0$

ed è facile vedere che $y'(p_K) = 0$. Quindi

$\forall K: p_K \geq 0$ $\hat{y}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq p_K \\ y(x) & x > p_K \end{cases}$ e $\forall K: p_K < 0$ $\tilde{y}(x) = \begin{cases} y(x) & x \leq p_K \\ 0 & x > p_K \end{cases}$

sono tutte soluzioni

4. **(5 punti)** Si risolva il seguente problema

$$\begin{cases} x^2y'' + xy' + y = \log x \\ y(1) = y'(1) = 1 \end{cases}$$

È una equazione di Eulero: pongo $x = e^t$ e $z(t) = y(e^t)$

$\Rightarrow z'' + z = t$ soluzione omogenea $z = a \sin t + b \cos t$

soluzione particolare $z = t$

Essendo $t = \log x$ la soluzione generale è

$y(x) = a \sin \log x + b \cos \log x + \log x$

$y(1) = y'(1) = 1 \Rightarrow a = 0$ e $b = 1$ cioè

$y(x) = \cos \log x + \log x$

5. **(5 punti)** Si determini l'integrale generale di

$$\begin{cases} x' = x + 2y \\ y' = -2x + y \end{cases}$$

I° modo

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

- $\det[A - \lambda I] = 0 \iff \lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$
  $\iff \lambda_\pm = 1 \pm 2i$ REGOLARI
- $(A - \lambda_+ I)\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_2 = i v_1$

Un autovettore è

$$\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = e^t c_1 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cos 2t + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \sin 2t \right) +$
  $+ e^t c_2 \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \sin 2t - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cos 2t \right)$

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^t (c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t) \\ e^t (c_1 \sin 2t - c_2 \cos 2t) \end{pmatrix}$$

II° modo

$x'' = x' + 2y' = x' + 2(-2x + y)$

$= x' - 4x + 2y = x' - 4x + x' - x$

$\Rightarrow x'' - 2x' + 5x = 0$

Polinomio caratteristico $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 1 \pm 2i$

$\Rightarrow x(t) = e^t (c_1 \cos 2t + c_2 \sin t)$

$\Rightarrow y = \frac{x' - x}{2} = \ldots$