



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI MILANO-BICOCCA

CORSO DI LAUREA IN FISICA

Anno Accademico 2018/2019

Esperimentazioni di Fisica Nucleare e Subnucleare

Effetto Compton

Bramati Filippo
813349

Brusa Riccardo
813501

Viscardi Luca
814466



1 Introduzione

L'effetto Compton consiste nello scattering elastico di un fotone incidente su un bersaglio da parte degli elettroni dello stesso. Poiché parte dell'energia E del fotone viene ceduta al bersaglio elementare (elettrone), il fotone viene diffuso con un'energia $E' < E$, in dipendenza dall'angolo di diffusione θ : in tal modo la radiazione diffusa avrà lunghezza d'onda λ' maggiore di quella incidente.

Scopo dell'esperienza è quello di studiare l'andamento dell'energia del fotone diffuso E' e della sezione d'urto differenziale $d\sigma/d\Omega$ in dipendenza dall'angolo di scattering θ e confrontare i risultati sperimentali con gli andamenti teorici previsti per l'effetto Compton e per la formula di Klein-Nishina. A partire da tali misure verranno si intende stimare la massa dell'elettrone m_e , il raggio classico dell'elettrone r_e e la sua carica elettrica e .

2 Descrizione dell'esperimento

I fotoni vengono prodotti da una sorgente di ^{22}Na , la quale decade β^+ (BR = 90.5%)¹ emettendo un positrone e^+ il quale si annichila con gli elettroni del materiale emettendo pertanto due fotoni γ da 511 keV, prodotti *back to back* in accordo con la conservazione del quadrimomento.

I fotoni emessi dalla sorgente vengono rivelati facendo uso di due scintillatori inorganici allo ioduro di sodio (NaI) drogati con del Tallio (Tl) e aventi diametro di 1" e 2". Dal momento che i fotoni vengono emessi *back to back*, quando uno dei due scintillatori rileva un fotone si avrà che l'altro fotone verrà emesso in direzione opposta entro un ben preciso cono opposto a quello definito dalla sorgente (vertice) e dalla sezione del rivelatore raggiunto dal fotone.

Pertanto i due rivelatori devono essere disposti in modo tale che abbiano gli stessi angoli solidi di accettazione.² Per le misure sull'effetto Compton sarà invece necessario inserire un bersaglio di Pb tra la sorgente ed il secondo rivelatore e, utilizzando la tecnica della coincidenza, si valuterà l'interazione Compton in dipendenza dall'angolo tra fotone incidente e fotone diffuso.

3 Caratterizzazione della strumentazione

3.1 Scelta della tensione di lavoro

Per entrambi i rivelatori sono stati acquisiti gli spettri energetici per differenti tensioni di lavoro V_{bias} degli scintillatori. Per ciascun valore di tensione³ i *fotopicchi*

¹Il ^{22}Na decade su uno stato eccitato del ^{22}Ne che a sua volta si diseccita verso il *ground state*, emettendo fotoni a 1274.5 keV.

²Questa considerazione geometrica garantisce che in corrispondenza di tutti i fotoni che raggiungono il primo rivelatore ve ne saranno altrettanti che intercetteranno il secondo.

³Al variare della tensione è stato necessario modificare anche il guadagno dell'amplificatore, in modo da mantenere entrambi i picchi all'interno del range di acquisizione e in modo da non

a 511 e 1274 keV vengono interpolati con una gaussiana sommata ad una parabo-

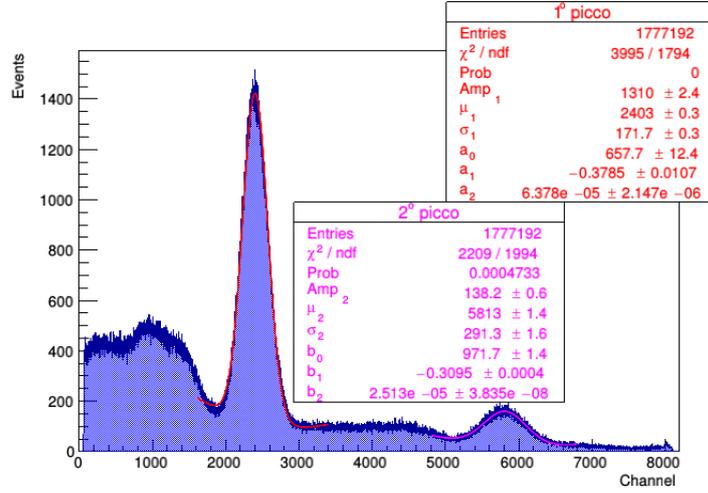


Figura 1: Spettro di acquisizione relativo al rivelatore NaI(2''), $V_{bias} = 850$ V.

la (la quale modella il background) e, determinando la FWHM, la risoluzione energetica R_E viene determinata come:

$$R_E = \frac{FWHM}{E_{peak}} \simeq \frac{2.355 \sigma}{E_{peak}} \quad (1)$$

Per entrambi i rivelatori si studia l'andamento della risoluzione energetica R_E in dipendenza dalla tensione V_{bias} in modo da determinare il punto di lavoro ottimo.

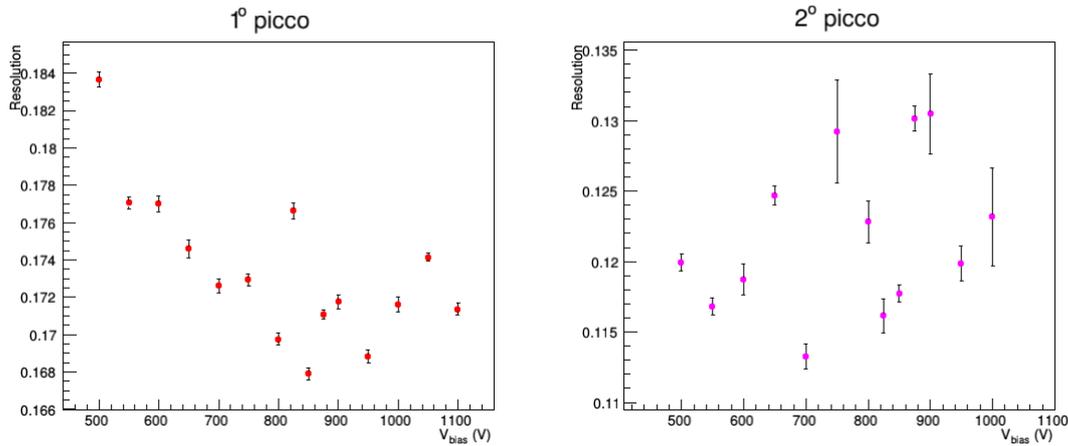


Figura 2: Risoluzione energetica del rivelatore NaI(2'') in dipendenza da V_{bias} .

In riferimento alla Figura 2 si osserva che la risoluzione energetica R_E del rivelatore NaI(2'') non ha un andamento ben definito in funzione della tensione V_{bias} .

avere troppi segnali saturati al primo o all'ultimo canale dell'MCA. L'amplificazione non modifica sensibilmente la risoluzione del rivelatore.

Questo andamento “irregolare” è imputabile ad un comportamento non stabile del rivelatore. Gli scintillatori necessitano infatti di un tempo di stabilizzazione piuttosto lungo; pertanto per un’analisi ottimale sarebbe necessario un tempo di erogazione della tensione sufficientemente lungo per massimizzare le prestazioni dei rivelatori.

La campagna dati è stata tuttavia condotta in modo non ottimale, spegnendo di volta in volta l’alimentazione; in questo modo le misure risentono dell’instabilità dei rivelatori.

Nel caso del picco a 511 keV è comunque possibile evidenziare un andamento della risoluzione energetica che presenta un minimo, diversamente da quanto si osserva per il picco a 1274 keV che ha un andamento del tutto irregolare (ciò è dovuto al fatto che per il picco a 1274 keV si hanno molti meno eventi ed il rapporto segnale-rumore è più piccolo, poiché il fondo domina maggiormente sul segnale). La risoluzione energetica (relativa) migliore si ottiene in corrispondenza della tensione $V_{bias} = 850\text{ V}$ per un valore $R_E = 16.8\%$.⁴

Al termine della procedura di calibrazione dell’intera strumentazione lo scintillatore da 2” ha subito una modifica sostanziale al proprio funzionamento⁵, rendendo necessario lavorare con tensioni molto inferiori (migliorando tuttavia la risoluzione dello scintillatore). A partire dal settaggio della coincidenza si è pertanto lavorato con $V_{bias} = 650\text{ V}$ e una risoluzione del 7.81%.

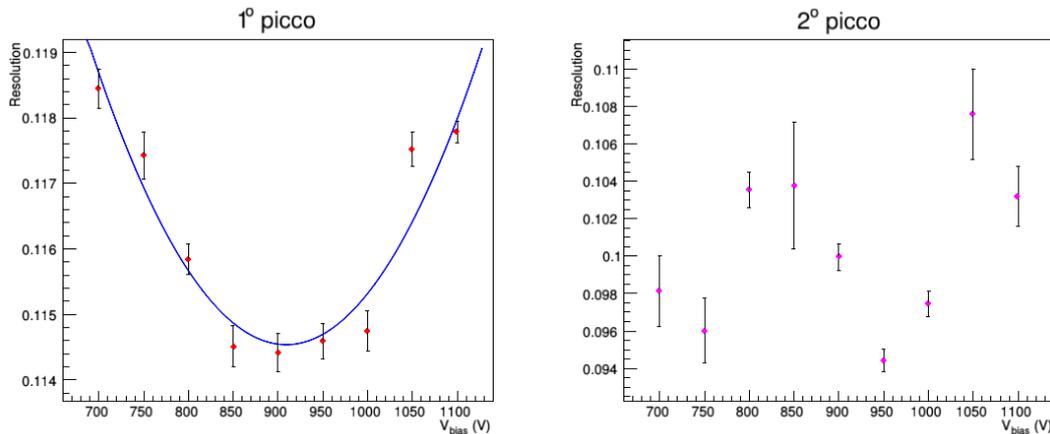


Figura 3: Risoluzione energetica del rivelatore Na(1'') in dipendenza da V_{bias} .

In riferimento alla figura 3 si osserva che per il rivelatore NaI(1'') l’analisi del secondo piccolo non evidenzia un andamento regolare; per il picco 511 keV si osserva

⁴La scelta di tensioni nell’intorno di quella minima di 850 V comporta delle piccole variazioni sulla risoluzione di $\sim 0.2 - 0.4\%$.

⁵Per configurare la geometria dell’apparato ai fini delle misure di diffusione Compton è stato necessario scollegare il cavo di alimentazione HV del rivelatore NaI(2'') che, per errore, è stato scollegato mantenendo l’alimentazione ancora accesa. Al termine di tale procedura il segnale in uscita dall’amplificatore è entrato in saturazione rendendo necessario lavorare con tensioni molto inferiori, in modo che il segnale non fosse saturato.

invece un andamento più regolare, interpolato con una parabola. Viene stimata dunque la migliore tensione di lavoro $V_{bias} = 910 \text{ V}$ in corrispondenza della quale si ottiene una risoluzione di $\sim 11.46 \%$.

Si osserva tuttavia che nell'intervallo di tensioni $850 \text{ V} - 950 \text{ V}$ la risoluzione non è soggetta a variazioni significative, infatti tra gli 800 V ed i 1000 V la massima variazione percentuale sulla risoluzione è al più $\sim 0.5 \%$.

Nelle misure successive è stata scelta $V_{bias} = 850 \text{ V}$, scelta di tensione che non ha modificato apprezzabilmente la risoluzione energetica.

3.2 Scelta dello Shaping time

Lo shaping time è il tempo di formatura del segnale in uscita dall'amplificatore; tale segnale viene digitalizzato dall'ADC (Analogic Digital Converter) ed inviato in ingresso all'MCA (Multi Channel Analyzer), il quale campiona i segnali di tensione in base alla loro ampiezza e li organizza in un istogramma, rappresentando così lo *spettro energetico* sui vari canali.

Per le misure di spettroscopia γ l'elettronica del preamplificatore è configurata in modo che la costante di tempo del circuito sia molto maggiore del *tempo di scintillazione* τ , così da massimizzare la raccolta delle cariche all'anodo.

Il segnale in uscita dal preamplificatore ha dunque una lunga coda⁶ e viene *formato* a livello del pre-amplificatore tramite una combinazione di circuiti RC (passa-basso) e **CR (passa-alto)**, in modo da selezionare la banda passante. Successivamente, a livello dell'amplificatore si ha un filtro gaussiano più "raffinato" (e dall'elettronica più complessa).

Lo shaping time è il tempo concesso all'amplificatore per raccogliere il segnale in ingresso. Tanto maggiore è lo shaping time tanto maggiore è la raccolta delle cariche sull'anodo; la *corrente di scintillazione* $I(t) = I_0 e^{-t/\tau}$ decade esponenzialmente nel tempo. Pertanto, in assenza di altri effetti, sarebbe possibile formare il segnale con tempi molto lunghi in modo da migliorare la raccolta del segnale prodotto dal passaggio delle particelle nel rivelatore ed essere dominato unicamente da effetti di *pile-up*. In realtà ciò non è possibile, poichè tanto maggiore è il tempo di raccolta tanto più diventa dominante il contributo della *corrente di buio*.⁷

La corrente di buio può essere considerata circa costante, comportando così una raccolta di carica che cresce linearmente nel tempo fino a sovrapporsi in modo significativo con quella dovuta alla scintillazione.

Si intende ora valutare quale sia lo shaping time che ottimizzi la risoluzione energetica R_E per entrambi i rivelatori.

Per il rivelatore NaI(2'') tale andamento non è ben definito e le variazioni sulla risoluzione sono molto piccole. Lo shaping time per questo rivelatore verrà dunque

⁶Dovuta alla scarica del condensatore.

⁷La corrente di buio è dovuta al fatto che nello scintillatore si possono verificare delle eccitazioni casuali; ad esempio per effetti termici un elettrone può eccitarsi ad uno stato energetico superiore e diseccitarsi emettendo un fotone.



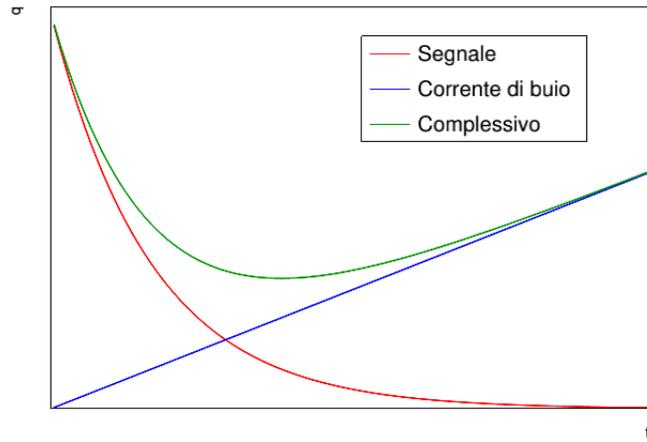


Figura 4: Andamento della carica nel tempo.

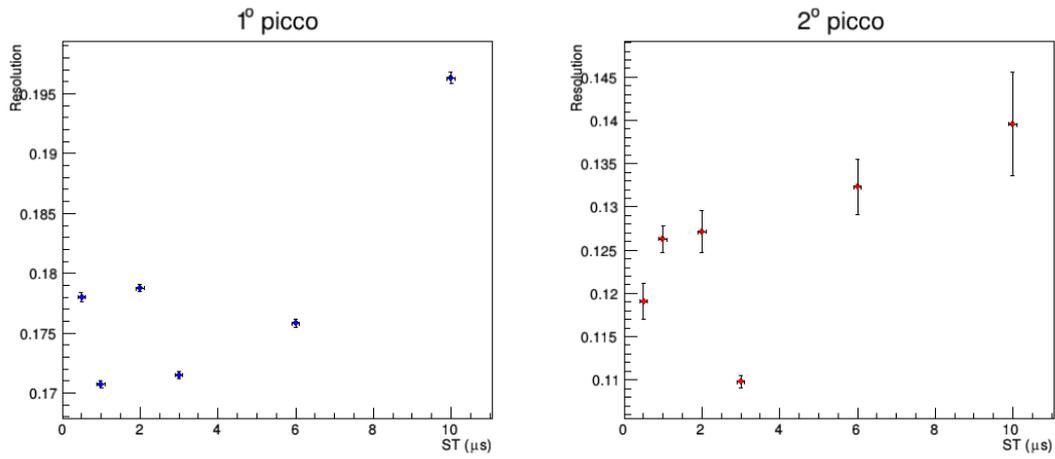


Figura 5: Risoluzione energetica in dipendenza dallo shaping time ST per Na(2'').

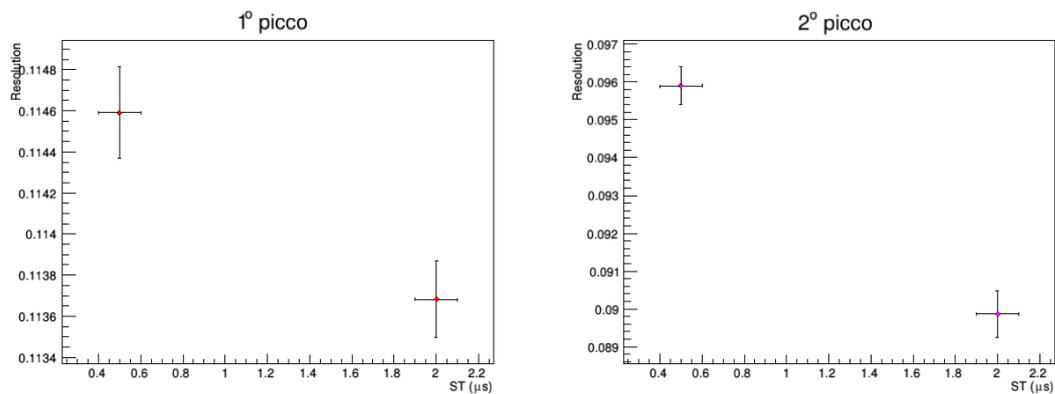


Figura 6: Risoluzione energetica in dipendenza dallo shaping time ST per Na(1'').

scelto solo successivamente, in modo da garantire una buona coincidenza temporale tra i due rivelatori. Per il rivelatore NaI(1'')⁸ si osserva che $ST = 2 \mu s$ ha una risoluzione più piccola.

3.3 Calibrazione e linearità del MCA - Rivelatore 2''

Si intende verificare il comportamento lineare del rivelatore NaI(2'') e del MCA. A tal fine vengono acquisiti gli spettri di diverse sorgenti radioattive, a partire dai quali si cerca di rintracciare i fotopicchi dovuti ai raggi γ emessi nelle loro catene di decadimento⁹ e potere attribuire la corretta corrispondenza tra i canali dell'MCA e l'energia dei fotoni.



I parametri della curva di calibrazione Ch vs E vengono stimati utilizzando le seguenti sorgenti a disposizione: ²²Na, ¹³⁷Ce,¹⁰ e ²²⁸Th.

Vengono riportati in tabella i risultati ottenuti per le varie sorgenti.

Sorgente	Energia [keV]	Canale	σ_{Ch}
²²⁸ Th	84.3	578	100
²²⁸ Th	238.5	1627	171
²²⁸ Th	583	3762	329
¹³⁷ Ce	662	4321	302
²² Na	511	3400	265
²² Na	1274	8200	856

La calibrazione Ch-E è stata effettuata in modo accurato, il fit¹¹ converge e restituisce un $\chi^2/ndf = 0.1393$ con una probabilità associata pari al 99.8%.

Tali valori testimoniano la bontà delle misure effettuate ed il carattere lineare del rivelatore NaI(2''), anche se al tempo stesso potrebbero essere indici di una sovrastima degli errori sulla posizione del canale.¹²

Il parametro stimato $p1 = (6.5 \pm 0.4) \text{ keV}^{-1}$ verrà utilizzato nei calcoli di conversione Ch-E.

4 Settaggio dei parametri per la coincidenza

Un fattore importante per l'accuratezza delle successive misure è una buona tecnica di *coincidenza temporale*.

⁸Il cui amplificatore possiede solo valori di ST di 0.5 μs e 2 μs .

⁹Le energie dei fotoni emessi durante le catene di decadimento sono tabulate.

¹⁰Presente nella sorgente Multigamma.

¹¹La funzione di fit utilizzata è $Ch = p0 + p1 \cdot E$.

¹²Si noti come la misura corrispondente al picco 1274 keV del ²²Na abbia un'incertezza molto grande ($\frac{\sigma_{Ch}}{Ch} \sim 10 \%$), dovuta ad un rapporto segnale rumore ben più piccolo rispetto agli altri spettri.

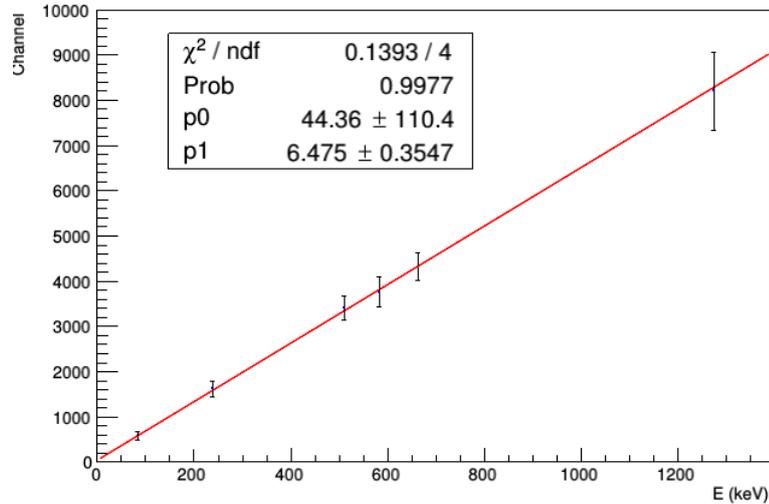


Figura 7: Calibrazione energetica del rivelatore NaI(2'').

Quando il rivelatore A^{13} rivela un fotone da 511 keV viene prodotto un *segnale logico*¹⁴ di sincronizzazione; tale segnale apre un gate nel convertitore analogico-digitale (ADC) a partire dal quale il MCA genera lo spettro di ampiezza (cioè di energia) degli impulsi rivelati dallo scintillatore B.

Pertanto vengono acquisiti solamente i segnali rivelati da B che sono in coincidenza (e che cioè si sovrappongono parzialmente o totalmente a livello temporale con il segnale logico suddetto) con il fotone da 511 keV rivelato da A entro la durata temporale della finestra.

Ciò è possibile grazie all'utilizzo di un *discriminatore a finestra* che acquisisce solamente gli impulsi aventi ampiezza compresa tra due valori di tensione ben definita (determinati dal Lower Level (LL) e dall'apertura della finestra energetica (ΔE)¹⁵, da predisporre in sede di calibrazione in modo da acquisire solo segnali dovuti al picco di fotoni con $E_\gamma = 511 \text{ keV}$.¹⁶

La durata della finestra temporale è stata opportunamente valutata: tanto maggiore è l'apertura della finestra tanto maggiore sarà la probabilità di avere coincidenze casuali tra due impulsi non fisicamente correlati. Dunque la coincidenza fornisce un rapporto segnale-rumore tanto maggiore quanto più la finestra è stretta.

Operativamente risulta necessario allargare l'apertura della finestra temporale in

¹³D'ora in poi, per semplicità di notazione, ci riferiremo ai due rivelatori NaI(1'') e NaI(2'') rispettivamente con A e B.

¹⁴Ossia un segnale con altezza e durata fissate.

¹⁵L'ampiezza del segnale di tensione è proporzionale alla carica raccolta e quindi all'energia depositata dal γ .

¹⁶Sono stati accettati come eventi appartenenti al picco da 511 keV quelli entro un intorno di raggio 3σ , dove σ è stato determinato dal fit gaussiano del fotopicco 511 keV nello spettro in *autocoincidenza* per A.

modo tale che il segnale del rivelatore B si sovrapponga parzialmente con la finestra in modo sufficiente per essere rivelato in coincidenza con il fotone rivelato da A.

La scelta dei parametri di coincidenza è stata effettuata visualizzando gli impulsi sull'oscilloscopio e verificandone la coincidenza con la finestra temporale generata (onda quadra); quindi acquisendo uno spettro in autocoincidenza per il rivelatore da A si sono *settati* i valori di ΔE e LL, e successivamente lavorando sullo shaping time del rivelatore B si è verificata la bontà della coincidenza temporale sfruttando la configurazione con scintillatori a 0° , senza scatteratore ¹⁷. I parametri selezionati sono i seguenti:

Time Window ($\Delta\tau$)	Lower Level (LL)	Window (ΔE)	Shaping Time (ST)
1.120 μ s	1.68	2.52	2 μ s

5 Efficienze dei rivelatori ed angoli solidi sottesi

L'obiettivo di questa parte dell'esperienza è quello di valutare le efficienze dei due rivelatori utilizzati. A tal fine viene determinata l'*efficienza intrinseca* e l'*efficienza assoluta* dei due rivelatori.

Viene acquisito lo spettro per i due rivelatori, sia separatamente che in coincidenza tra loro.

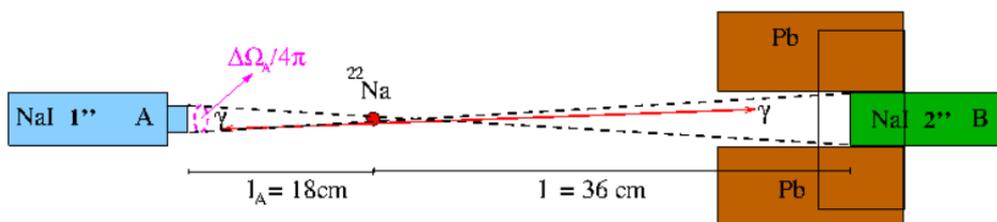


Figura 8: Assetto sperimentale per le misure di efficienza.

Il numero di conteggi viene stimato a partire dall'ampiezza della gaussiana (sottraendo il fondo) con cui sono stati interpolati i fotopicchi. Si ricorda infatti che per una gaussiana normalizzata l'ampiezza A è pari a $1/\sqrt{2\pi}\sigma$. In questo caso è possibile ricavare il numero di conteggi a partire dall'ampiezza della gaussiana nel modo seguente:

$$N_{\text{conteggi}} = A \cdot \sqrt{2\pi}\sigma \quad (2)$$

Noto il tempo di misura, a partire dall'area del fotopicco (i.e. il numero di conteggi), viene determinato il rate del picco a 511 keV. I rate R_A , R_B [counts/s] dei

¹⁷Naturalmente la distanza tra sorgente e rivelatore B è doppia rispetto a quella tra sorgente e rivelatore A, così da sottendere gli stessi angoli solidi.

due rivelatori A e B e $R_{A\cap B}$ del rivelatore B in coincidenza con A, si valutano come:

$$R_A = 2 \cdot A \cdot BR \cdot \varepsilon_A(E) \cdot \frac{\Delta\Omega_A}{4\pi}$$

$$R_B = 2 \cdot A \cdot BR \cdot \varepsilon_B(E) \cdot \frac{\Delta\Omega_B}{4\pi}$$

$$R_{A\cap B}(E) = 2 \cdot A \cdot BR \cdot \varepsilon_{A\cap B}(E) \cdot \frac{\Delta\Omega_A}{4\pi}$$

$$\varepsilon_{A\cap B}(E) = \varepsilon_A(E) \cdot \varepsilon_B(E)$$

da cui si ricavano le efficienze dei due rivelatori e l'angolo solido:

$$\varepsilon_A = \frac{R_{A\cap B}}{R_B} \quad (3)$$

$$\varepsilon_B = \frac{R_{A\cap B}}{R_A} \quad (4)$$

$$\frac{\Delta\Omega_A}{4\pi} = \frac{R_{A\cap B}}{2 \cdot A \cdot BR \cdot \varepsilon_A(E) \cdot \varepsilon_B(E)} \quad (5)$$

dove:

- A [Bq] è l'attività della sorgente al tempo della misura.
- BR è il Branching Ratio del decadimento β^+ che dà origine ai due γ da 511 keV (90.5 %).
- $\frac{\Delta\Omega}{4\pi}$ è la frazione di angolo solido sottesa dai rivelatori.
- ε_A e ε_B sono le efficienze intrinseche di ciascun rivelatore.
- $R_{A\cap B}$ è il rate del rivelatore B quando è in coincidenza con A.
- Il fattore 2 tiene conto del fatto che ad ogni disintegrazione corrisponde l'emissione di due fotoni da 511 keV.

Si noti che le distanze dei rivelatori dalla sorgente vengono scelte in modo che sottendano lo stesso angolo solido (se non fosse così comparirebbe un ulteriore termine angolare nel calcolo del $R_{A\cap B}$).¹⁸ Le distanze sono infatti scelte in modo che $l_B = 2l_A$, nel nostro caso: $l_A = 18$ cm e $l_B = 36$ cm.

¹⁸La scelta della distanza dello scintillatore B tiene conto di due fattori principali ed in conflitto tra di loro: per avere un alto tasso di conteggi sarebbe necessario avvicinare il rivelatore alla sorgente, dall'altra parte al fine di avere una buona precisione sull'apertura del cono di angolo solido sarebbe necessario allontanarli.

E' possibile confrontare il valore degli angoli solidi ricavati dalle misure di coincidenza con quelli calcolabili a partire dai parametri geometrici¹⁹:

$$\frac{\Delta\Omega_A}{4\pi} = \frac{1}{4\pi} \int_0^\delta \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = \frac{1}{2}(1 - \cos\delta) = (1.240 \pm 0.034) \cdot 10^{-3} \quad (6)$$

con $\delta = \arctan(r/l)$ dove r è il raggio del rivelatore A/B ed l la distanza del rivelatore A/B dalla sorgente.

Pertanto l'angolo solido che ci si aspetta di ottenere è:

$$\Delta\Omega_A = (1.56 \pm 0.04) \cdot 10^{-2} \text{ sr}$$

Vengono di seguito riportati i risultati delle misure:

- **Rivelatore A**

$$N_{conteggi} = (159.6 \pm 0.8) \cdot 10^3 \text{ counts}$$

$$t_{live} = 5.52 \cdot 10^3 \text{ s}$$

$$R_A = (28.92 \pm 0.15) \text{ Hz}$$

- **Rivelatore B**

$$N_{conteggi} = (223.8 \pm 0.8) \cdot 10^3 \text{ counts}$$

$$t_{live} = 3.90 \cdot 10^3 \text{ s}$$

$$R_B = (57.5 \pm 0.2) \cdot \text{ Hz}$$

- **Rivelatore A e B in coincidenza**

$$N_{conteggi} = (127.2 \pm 0.2) \cdot 10^4 \text{ counts}$$

$$t_{live} = 2.44 \cdot 10^5 \text{ s}$$

$$R_{A \cap B} = (5.208 \pm 0.007) \text{ Hz}$$

- **Attività attuale della sorgente ^{22}Na** ²⁰

$$\text{Attività odierna}^{21} : A(t) = A_0 \cdot 2^{-\frac{6.25}{2.6}} = (6.67 \pm 10^{-2}) \cdot 10^4 \text{ Bq}$$

- **Frazione di angolo solido**

Viene riscritta la (5) in modo che le grandezze misurate non siano correlate tra di loro.

$$\frac{\Delta\Omega_A}{4\pi} = \frac{R_{A \cap B}}{2 \cdot A \cdot BR \cdot \varepsilon_A(E) \cdot \varepsilon_B(E)} = \frac{R_A \cdot R_B}{2 \cdot A \cdot BR \cdot R_{A \cap B}} \quad (7)$$

$$\frac{\Delta\Omega_A}{4\pi} = (2.646 \pm 0.002) \cdot 10^{-3}$$

Dalla nostra misura si ricava dunque la misura dell'angolo solido sotteso:

$$\Delta\Omega_A = (3.325 \pm 0.003) \cdot 10^{-2} \text{ sr}$$

¹⁹Nella propagazione degli errori si è assunto il diametro del rivelatore noto con certezza mentre l'incertezza sulle distanze pari a 0.5 cm.

²⁰È stata utilizzata la sorgente ^{22}Na #39.

²¹ $A(t) = A_0 \cdot e^{-t/\tau} = A_0 \cdot 2^{-t/\tau_{1/2}}$, con $A_0 = 3.53 \cdot 10^5 \text{ Bq}$ e $\tau_{1/2} = 2.6 \text{ years}$, e tempo trascorso $t = 6.25 \text{ years}$.

- **Efficienza intrinseca ed assoluta del rivelatore B**

$$\varepsilon_{intrinseca}(B) = (18.01 \pm 0.03) \%$$

$$\varepsilon_{assoluta}(B) = (0.0223 \pm 0.0003) \%$$

- **Efficienza intrinseca ed assoluta del rivelatore A**

$$\varepsilon_{intrinseca}(A) = (9.050 \pm 0.010) \%$$

$$\varepsilon_{assoluta}(A) = (0.0112 \pm 0.0002) \%$$

Si osserva che gli angoli solidi misurati geometricamente e tramite le misure di coincidenza non sono compatibili tra di loro.

Nello specifico, l'angolo solido stimato a partire dai Rate è circa il doppio di quello determinato geometricamente. Ciò indica l'insorgere di errori sistematici nel calcolo dei rate e, pertanto delle efficienze. Il calcolo geometrico è più affidabile rispetto al calcolo effettuato mediante i Rate di coincidenza, e pertanto nelle successive misure di sezione d'urto ci siamo serviti di tali valori.

Il motivo di tale discordanza nei valori di angolo solido ricavati risiede nel fatto che, per il calcolo dei Rate, in almeno un caso il tempo di misura non è stato completamente affidabile. Nel corso dell'esperienza è avvenuto più volte che i rivelatori si spegnessero improvvisamente a causa di cadute di corrente nel laboratorio mentre la presa del segnale proseguiva.²².

Se il tempo di rivelazione reale fosse inferiore rispetto a quello registrato da MAESTRO allora la misura del Rate sarebbe affetta da una sottostima.

La discordanza tra gli angoli solidi ottenuti è probabilmente imputabile ad un improvviso spegnimento dei rivelatori nel corso della misura in coincidenza dei due rivelatori. Questo comporterebbe una sottostima di $R_{A \cap B}$ e dunque una sovrastima di $\Delta\Omega$ (si veda la (7)).

Se così fosse risulterebbero compromesse anche le efficienze dei due rivelatori, che risulterebbero ridotte a causa del suddetto errore sistematico. Infatti calcolando il Rate necessario per ottenere l'angolo solido ottenuto geometricamente si ottebbe $R_{A \cap B} = 11.26$ Hz e delle efficienze intrinseche $\varepsilon_A = 19.6\%$ e $\varepsilon_B = 39,0\%$.

Si osserva infine che l'efficienza del rivelatore B varia sensibilmente a seconda dell'energia del fotone incidente²³, migliorando per basse energie.



Per studiare questa variazione sarebbero necessarie delle sorgenti con emissione di γ di energie comprese tra 180 e 511 keV, delle quali non disponiamo.²⁴

²²Infatti al termine della presa dati venivano trovati i rivelatori spenti mentre MAESTRO continuava ad acquisire segnale, falsando così la misura del tempo vivo. Per tale motivo le misure sono state ripetute più volte, ciò nonostante non si esclude che in alcuni degli spettri analizzati non si fosse manifestato questo problema.

²³E quindi a seconda dell'angolo di diffusione nelle misure Compton.

²⁴L'unica sorgente utilizzabile sarebbe ²²⁸Th.

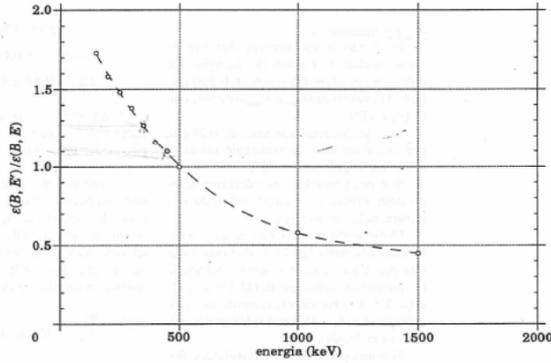


Fig. 5 - Rapporto delle efficienze intrinseche al fotopico (normalizzate a 511 keV) in funzione dell'energia del fotone incidente.

Figura 9: Andamento teorico di $\varepsilon(B, E')/\varepsilon(B, E)$.

6 Misura dell'effetto Compton e della sezione d'urto differenziale

La dipendenza dell'energia del fotone diffuso dall'angolo di diffusione é data da:

$$\frac{1}{E'} - \frac{1}{E} = \frac{1}{m_e c^2} (1 - \cos\theta) \quad (8)$$

La formula di *Klein-Nishina* fornisce invece la probabilità che il fotone incidente venga diffuso ad un angolo θ ²⁵:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_e^2}{2} \left(\frac{E'}{E} \right)^2 \left(\frac{E}{E'} + \frac{E'}{E} - \sin^2\theta \right) \quad (9)$$

La sezione d'urto differenziale può essere misurata sperimentalmente come:

$$\frac{d\sigma(\theta)}{d\Omega_B} = \frac{\Delta n(\theta)}{nN\Delta\Omega_B\varepsilon(B, E')K(E')} \quad (10)$$

dove:

- n è il numero di fotoni 511 keV incidenti sul bersaglio di Pb (in coincidenza con i fotoni triggerati dal rivelatore A) ed è pari a $2A\varepsilon(A, E) \cdot \Delta\Omega_A/4\pi$.
- N è il numero di elettroni per unità di volume nel bersaglio di Pb, dato da $\rho_{\text{Pb}} \cdot N_{\text{Avogadro}} \cdot Z_{\text{Pb}}/A_{\text{Pb}}$
- K è lo spessore efficace del bersaglio, che tiene conto dell'assorbimento sia dei fotoni in entrata che di quelli in uscita nel bersaglio di Pb.

Sfruttando la tecnica della coincidenza si esegue una misura dell'effetto Compton sui γ da 511 keV emessi dalla sorgente di ²²Na. Si intende ricavare:

²⁵Si ricorda che $r_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{e^2}{m_e c^2}$ è il raggio classico dell'elettrone.

- l'andamento dell'energia del fotone scatterato in funzione dell'angolo di scattering: $E'(\theta)$
- l'andamento della sezione d'urto Compton in funzione dell'angolo di scattering: $d\sigma/d\Omega$
- ricavare da queste misure la massa dell'elettrone m_e e la carica dell'elettrone e .

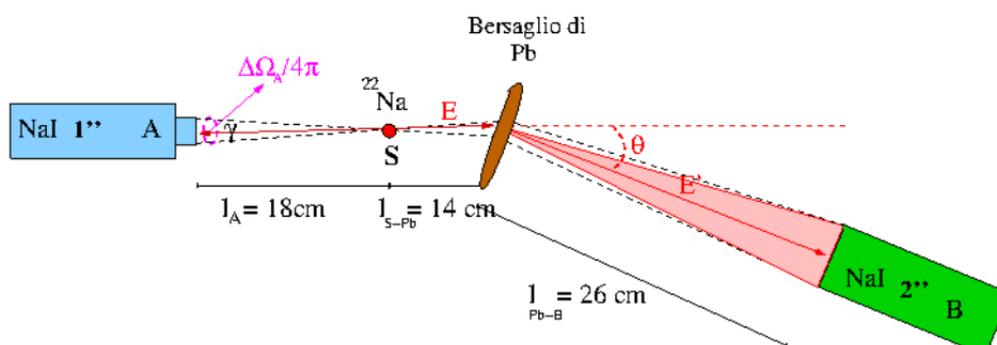


Figura 2

Figura 10: Assetto sperimentale per le misure di diffusione Compton.

I rivelatori, la sorgente di ^{22}Na ed il bersaglio vengono disposti come in Figura 10, variando l'angolo a cui si va a posizionare il rivelatore B partendo da 30° fino a 130° .

I valori di K sono tabulati per uno spessore di 0.28 cm.

Le misure condotte con $\theta < 90^\circ$ saranno in trasmissione, quelle con $\theta \geq 90^\circ$ in riflessione.

Per una misura ad un dato angolo θ il target è stato opportunamente inclinato ad un angolo $\theta/2$ in modo tale che, in ogni misura i fotoni scatterati percorrano tutti la stessa distanza all'interno del materiale.

Poichè l'angolo fa riferimento al centro del rivelatore ad esso viene assegnata un'incertezza pari a $\arctan(r_{Riv}/d_{Riv-Sorg}) \sim 6^\circ$.

Per l'effetto Compton si è utilizzata una nuova sorgente avente attività odierna pari a $(4.28 \pm 0.86) \cdot 10^5 \text{ Bq}$ ²⁶

Vengono riportati i risultati della misura nella seguente tabella:

²⁶L'attività di tale sorgente non è stata calibrata alla consegna, pertanto la sua attività odierna è stata stimata a partire dal valore nominale del rivenditore e dalla data di consegna della stessa. L'incertezza sull'attività è stata stimata a partire dalla tolleranza nominale del 20 %.

θ [°]	E [keV] teorica	E [keV] sperimentale
30	451	466 ± 26
45	395	399 ± 22
60	341	343 ± 19
75	294	308 ± 17
90	256	---
130	193	198 ± 11

Tra tutte le misure effettuate, per lo spettro a $\theta = 90^\circ$ non è stato possibile interpolare con successo: si intravede un piccolo picco ma privo di statistica sufficiente per valutarne i parametri correttamente.

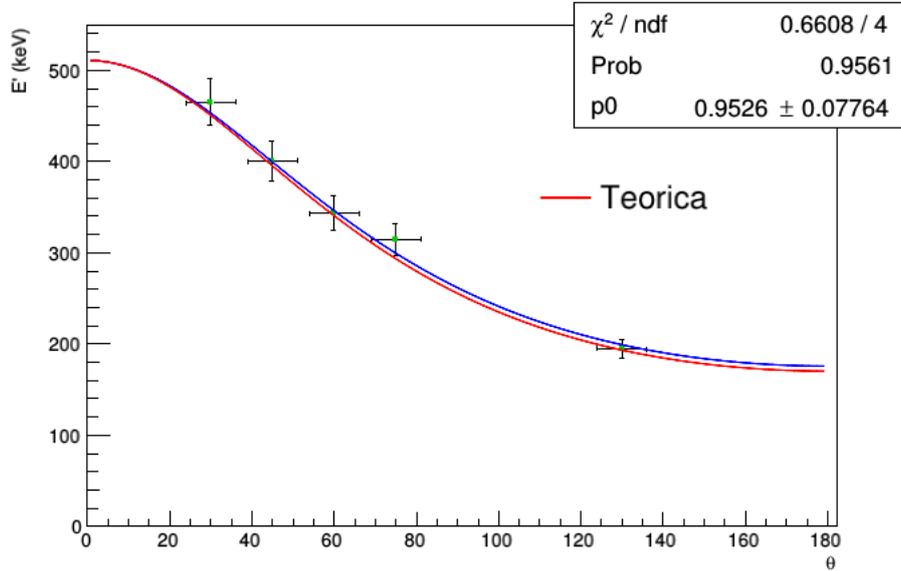


Figura 11: Energia del fotone in funzione dell'angolo di diffusione.

Dalla figura 11 è possibile osservare un'ottimo accordo tra dati sperimentali e le previsioni teoriche, anche se si osserva che le energie ottenute sperimentalmente sono sistematicamente sovrastimate rispetto a quelle teoriche.

Le energie dei fotoni diffusi vengono ricavate a partire dalla posizione dei canali, tuttavia aumentando l'angolo di diffusione i picchi si spostano verso canali del MCA più piccoli, dove i fotopicchi dei fotoni diffusi si sovrappongono significativamente con la spalla Compton: il fotopicco non ha più un andamento gaussiano ma ha una coda verso canali maggiori, per cui la posizione del canale, e dunque l'energia del fotone diffuso, risulta essere sovrastimata.

L'interpolazione è stata eseguita utilizzando come parametro libero $p_0 = \frac{E}{m_e c^2}$, dove $E = 511$ keV. Dai risultati del fit è stato possibile stimare la massa dell'elettrone:

$$m_e^{exp} = (9.56 \pm 0.78) \cdot 10^{-31} \cdot \text{kg} = (537.8 \pm 43.9) \text{ keV}/c^2$$

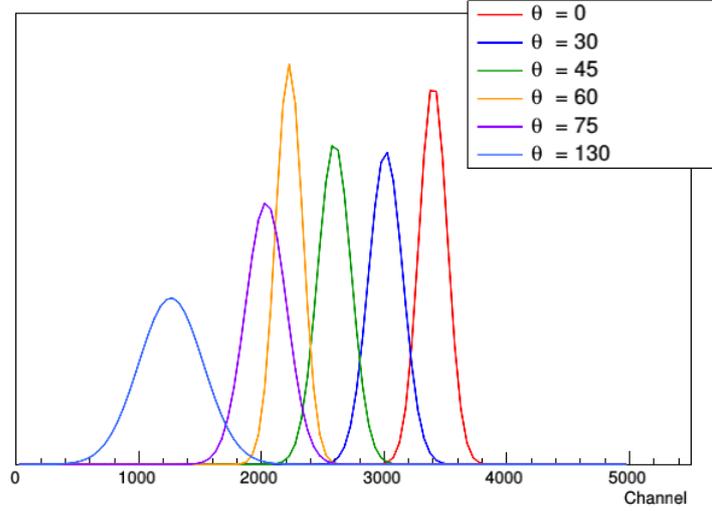


Figura 12: Spostamento energetico del picco in funzione dell'angolo di diffusione del fotone scatterato (ampiezze normalizzate).

Tale valore è compatibile con quello tabulato con un p-value pari al 41.1%.

Vengono ora riportati i risultati ottenuti per il calcolo delle sezioni d'urto.

θ [°]	$\frac{\varepsilon(B,E)}{\varepsilon(B,511\text{keV})}$	K [cm]	Δn [Hz] sperimentale	$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ [10^{-26}cm^2] teorico	$\frac{d\sigma}{d\Omega}$ [10^{-26}cm^2] sperimentale
30	1.10	0.159	0.101 ± 0.004	5.45	$(5.7 \pm 0.4) \cdot 10$
45	1.16	0.149	0.173 ± 0.008	3.72	$(1.53 \pm 0.10) \cdot 10$
60	1.27	0.131	0.24 ± 0.04	2.50	$(2.2 \pm 0.4) \cdot 10$
75	1.38	0.111	0.107 ± 0.007	1.81	$(1.1 \pm 0.2) \cdot 10$
90	1.48	0.117	—	1.49	—
130	1.58	0.075	1.58 ± 0.13	1.38	$(2.04 \pm 0.19) \cdot 10^2$

Osserviamo invece che i valori delle sezioni d'urto misurate sperimentalmente sono completamente discordi dalle aspettative teoriche, con differenze di almeno un ordine di grandezza (si vedano le Figure 13 e 14). Per tale motivo non si ritiene opportuno stimare sulla base dei risultati né il raggio classico dell'elettrone r_e né la sua carica elettrica e .

I motivi di questo insuccesso possono essere molteplici e di difficile identificazione. A seguire vengono riportate le più probabili fonti d'errore che hanno compromesso i risultati ottenuti:

- La sezione d'urto differenziale dipende dall'*efficienza* del rivelatore B. Nella sezione 5 si è discusso di come i valori di efficienza misurati non siano affidabili, dal momento che nel corso della presa dati la caduta di corrente nel laboratorio ha portato allo spegnimento degli scintillatori senza però

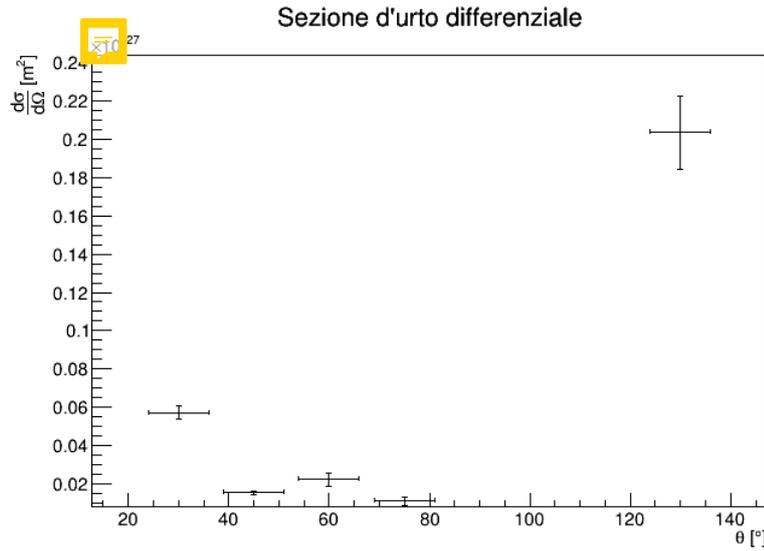


Figura 13: Sezione d'urto differenziale sperimentale.

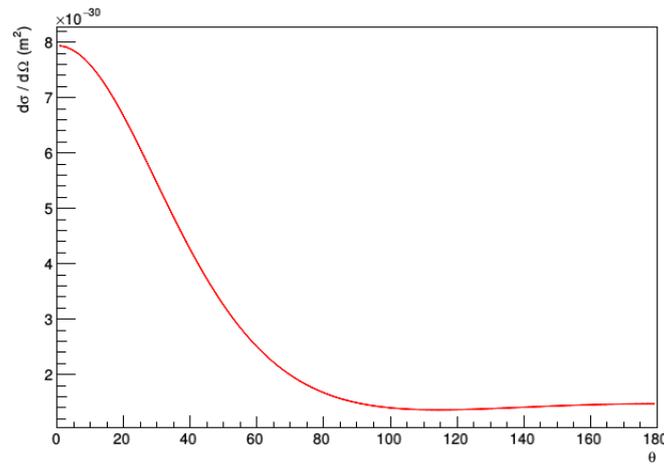


Figura 14: Klein-Nishina - Andamento teorico.

interrompere l'acquisizione di MAESTRO, portando così ad un'errata attribuzione del *tempo vivo* nel quale sono stati raccolti i dati. Questo comporta inevitabilmente una forte imprecisione sistematica nella determinazione del rate $R_{A \cap B}$, dal momento che non è possibile sapere quando i due rivelatori abbiano smesso di funzionare. Tale problematica sperimentale compromette dunque le misure di efficienza di entrambi i rivelatori, comportando un'incertezza sulle misure di efficienza e di sezione d'urto. ²⁷

- L'efficienza dello scintillatore B dipende dall'energia del fotone incidente.

²⁷Si è anche evidenziato di quanto sarebbero dovuti cambiare i valori di efficienza qualora il rate $R_{A \cap B}$ fosse stato tale da garantire la compatibilità tra l'angolo solido stimato nelle misure di coincidenza e quello calcolato geometricamente.

Per ottenere dei risultati più accurati sulle sezioni d'urto sarebbe stato necessario studiare le variazioni dell'efficienza del rivelatore in dipendenza dall'energia del fotone; tale studio richiederebbe la disponibilità di molteplici sorgenti con emissione γ nel range energetico 180 keV – 511 keV. Non disponendo di sorgenti sufficienti per condurre un'analisi completa, si è calcolata l'efficienza del rivelatore B alle diverse energie utilizzando dei coefficienti $\varepsilon(B, E')/\varepsilon(B, 511 \text{ keV})$ tabulati (si veda la Figura 9) per lo studio di uno scintillatore da 2" analogo a quello da noi utilizzato.

Naturalmente nulla garantisce a priori che il rivelatore da noi utilizzato possa avere una variazione dell'efficienza identica a quella tabulata, a priori potrebbe anche essere differente.

E' necessario sottolineare però che non ci si aspetta che una tale variazione di efficienza alteri apprezzabilmente il risultato della misura, dal momento che tali correzioni sono piccole.

- L'attività della sorgente utilizzata nelle misure Compton non è nota, dal momento che non è stata certificata. E' noto solamente il suo valore nominale con una tolleranza del 20%, senza però la possibilità di risalire con certezza all'attività odierna.
- Lo studio degli spettri energetici ottenuti non è di semplice analisi. Sovente si è rivelato il fotopicco del fotone diffuso con pochi conteggi ed in una regione dello spettro nettamente dominata dal fondo. Il rapporto segnale rumore è spesso piccolo sicché interpolare il fotopicco rimuovendo il fondo comporta talvolta grandi difficoltà, soprattutto per grandi angoli. La difficoltà di questa misura risiede proprio nello spostarsi del fotopicco verso energie sempre più piccole in una regione dominata dal fondo.

6.1 Conclusioni e ulteriori considerazioni (errori sistematici e fondo)

Se da una parte è possibile individuare la posizione dei picchi senza particolari difficoltà, dall'altra è ben più difficile analizzarne l'area. Per calcolare l'area del fotopicco, e dunque il numero di conteggi dei fotoni rivelati, si è interpolato il fotopicco con una gaussiana sottraendo il fondo. Il numero di conteggi, e dunque il rate di eventi, viene computato in accordo con la formula 2.

Il numero di conteggi così calcolato dipende però dall'ampiezza della gaussiana e dalla sua σ , i cui valori possono cambiare a seconda del tipo di funzione di interpolazione scelta per *sottrarre il fondo* (parabolica, lineare..) e a seconda di variazioni nella scelta dei range di fit, che possono permettere di sottrarre il fondo in modo più o meno accurato.

Queste differenti scelte introducono dunque un *errore sistematico* che si intende valutare.

- Si intende valutare se l'errore sistematico dovuto alla scelta di differenti procedure di interpolazione sia dominante o meno nelle nostre misure.

I fit sono stati effettuati modificando la larghezza del range oppure sottraendo il fondo con una funzione lineare o parabolica. Nel caso delle misure Compton il risultato non varia apprezzabilmente e si mantiene un buon accordo con il modello aspettato; nel caso delle sezioni d'urto invece si ottengono risultati ben diversi e non compatibili tra di loro al variare della procedura di interpolazione, dimostrando così che la misura condotta è affetta da un errore sistematico non trascurabile.

Rispetto ai risultati riportati nella tabella della sezione 6, dove le misure sono state ottenute utilizzando un range di fit intermedio, le sezioni d'urto calcolate cambiando i parametri del fit sono diverse tra di loro.

Pertanto allargando il range del fit o sottraendo il fondo con una retta si osserva che le variazioni della sezione d'urto misurata sono apprezzabili ma non abbastanza grandi da modificarne l'ordine di grandezza.

Si è cercato di quantificare la dispersione dovuta alla suddetta *sistematicità* calcolando la varianza e lo scarto quadratico medio per i valori di sezione d'urto dell'elettrone calcolate per ogni configurazione angolare.

In tabella sono riportate le sezioni d'urto $d\sigma/d\Omega$ [m²] calcolate per ogni angolo e per diverse modalità di interpolazioni effettuate (range breve, range medio, range largo, fondo lineare).

θ [°]	range breve	range medio	range ampio	fondo lineare	RMS
30	$2.32 \cdot 10^{-27}$	$5.70 \cdot 10^{-29}$	—	$5.73 \cdot 10^{-29}$	$1.30 \cdot 10^{-27}$
45	$4.99 \cdot 10^{-29}$	$1.53 \cdot 10^{-29}$	$1.48 \cdot 10^{-29}$	$1.24 \cdot 10^{-29}$	$1.79 \cdot 10^{-29}$
60	$1.09 \cdot 10^{-29}$	$2.21 \cdot 10^{-29}$	$1.81 \cdot 10^{-29}$	$1.99 \cdot 10^{-29}$	$4.86 \cdot 10^{-30}$
75	$6.54 \cdot 10^{-30}$	$1.08 \cdot 10^{-29}$	$7.36 \cdot 10^{-30}$	—	$2.23 \cdot 10^{-30}$
90	—	—	—	—	—
130	$3.17 \cdot 10^{-29}$	$2.04 \cdot 10^{-28}$	$3.74 \cdot 10^{-29}$	$1.69 \cdot 10^{-29}$	$8.79 \cdot 10^{-29}$

- Il metodo migliore per rimuovere il fondo sarebbe quello di acquisire, per ogni angolo di diffusione, lo spettro di solo fondo in assenza di sorgente. Sottraendo il solo fondo agli spettri ottenuti si sarebbero potuti isolare i conteggi dovuti solamente all'effetto Compton e determinare il rate con più precisione.

In particolare, si è osservato che il fondo presenta un picco gaussiano in corrispondenza di un energia di circa 190 keV, che viene parzialmente a sovrapporsi al picco Compton nella configurazione a 130°. Per il calcolo delle sezioni d'urto a questo angolo, perciò, si è ritenuto opportuno sottrarre questo fondo, ottenuto mediante gli spettri ad angoli minori, così che non portasse ad una sovrastima dei conteggi a 130°. Il rate medio registrato al picco di fondo è di 0.14 ± 0.15 Hz. I risultati per la disposizione a 130° sono quindi i seguenti:

Fit	Rate senza fondo	$\frac{d\sigma}{d\Omega} [10^{-26} \text{cm}^2]$
Corto range	$0.50 \pm 0.71 \text{ Hz}$	$(3.05 \pm 3.12) \cdot 10$
Medio range	$1.43 \pm 0.24 \text{ Hz}$	$(1.85 \pm 1.86) \cdot 10^2$
Ampio range	$210.13 \pm 32.50 \text{ Hz}$	$(3.73 \pm 3.75) \cdot 10$
Fondo lineare	$0.01 \pm 0.02 \text{ Hz}$	$(1.17 \pm 1.23) \cdot 10$



- Per migliorare ulteriormente la precisione della misura si potrebbe valutare il rate dovuto alle *coincidenze casuali*, le quali possono essere dovute al fondo ambientale oppure a fotoni prodotti da decadimenti differenti della stessa sorgente, che possono essere erroneamente riconosciuti come in coincidenza se la finestra temporale è troppo larga.²⁸ Per valutare il fondo dovuto alle coincidenze casuali è possibile modificare la configurazione geometrica dell'apparato disallineando i rivelatori; in questo modo i γ emessi dalla sorgente *back-to-back* non sono rivelabili contemporaneamente dal rivelatore di trigger NaI(1'') e dal target di Pb. Un metodo più efficace ai fini della misura sarebbe quello di ritardare il *gate*, ritardando cioè l'apertura della finestra temporale che determina la coincidenza.

Il rate di coincidenze casuali R_c può essere stimato come:

$$R_c = R_A \cdot R_B \cdot \Delta\tau \quad (11)$$

dove R_A ed R_B sono i rate dei rivelatori A e B, mentre $\Delta\tau$ è la larghezza della finestra temporale.

La probabilità²⁹ di osservare coincidenze casuali al rivelatore B è data da:

$$P(\text{spurie}) = 1 - P(0 \text{ eventi casuali}) = 1 - e^{-R_A \cdot \Delta\tau} \simeq 1 - (1 - R_A \Delta\tau)$$

Pertanto $P(\text{spurie}) = R_A \Delta\tau$. Per ottenere il numero di coincidenze casuali al rivelatore B occorre moltiplicare la probabilità di avere coincidenze spurie al rivelatore B per il relativo tasso di conteggio R_B , pertanto $R_c = R_A \cdot R_B \cdot \Delta\tau$. Nel nostro esperimento si è scelta una finestra di larghezza $\Delta\tau = 1.120 \mu\text{s}$ ed i rate misurati dai due rivelatori sono rispettivamente $R_A = 28.92 \text{ Hz}$ e $R_B = 57.5 \text{ Hz}$. Pertanto il rate dovuto alle sole coincidenze casuali è $R_c = 1.86 \cdot 10^{-3} \text{ Hz}$, contributo piccolo e che non modifica sensibilmente i valori ottenuti.

Come si è potuto osservare dai risultati ottenuti, a seconda della scelta del range di fit o della funzione con cui modellizzare il fondo, si hanno valori discordanti (addirittura di ordini di grandezza) sia per i rate sia per le sezioni d'urto differenziali,

²⁸La finestra temporale per la coincidenza è data dalla durata degli impulsi logici con cui la coincidenza stessa si realizza, tanto più larga è la finestra tanto maggiore è la probabilità che si possa avere una coincidenza casuale tra due eventi non fisicamente correlati.

²⁹Secondo la statistica poissoniana (esperimenti di conteggio) la probabilità di registrare n conteggi dato un numero medio di conteggi λ , è data da $P(n) = \lambda^n e^{-\lambda} / n!$.

il che è sintomo di inaffidabilità delle misure ottenute per tali grandezze. Tuttavia un ultimo tentativo di isolamento del segnale rispetto al fondo è stato eseguito con l'ausilio del metodo `ShowBackground` della classe TH1 di ROOT, dopodiché il numero di eventi ed il relativo errore sono stati ricavati utilizzando il metodo `IntegralAndError`.

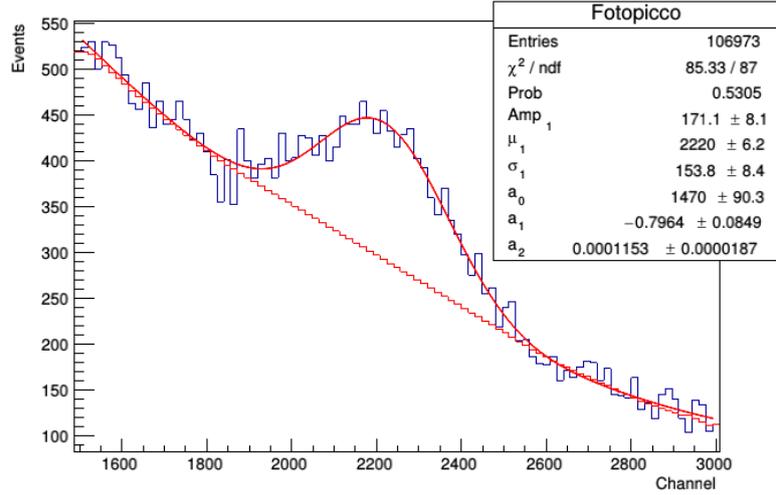


Figura 15: Rilevazione del fondo per la misura Compton a 60° .

Si ottengono dunque i seguenti risultati:

θ [$^\circ$]	Rate [10^{-3} Hz]	$d\sigma/d\Omega$ [10^{-26} cm 2]
30	6.7 ± 0.3	17.6 ± 1.1
45	15.2 ± 0.7	6.3 ± 0.4
60	12.1 ± 0.7	5.2 ± 0.4
75	1.5 ± 0.3	0.70 ± 0.15
130	14.0 ± 0.7	8.5 ± 0.5

Si osserva che l'utilizzo del metodo `ShowBackground` ha permesso un miglioramento sui valori delle sezioni d'urto rispetto a quelli attesi, sebbene i valori ottenuti non siano compatibili con questi ultimi.

In forza di questa osservazione le misure ottenute vengono ugualmente interpolate per verificare l'accordo con la legge di Klein-Nishina (si veda la Figura 16). Si stimano pertanto il valore del raggio classico dell'elettrone r_e e della sua carica elettrica e :

$$r_e^{exp} = (6.3 \pm 0.3) \cdot 10^{-15} \cdot \text{m}$$

$$e^{exp} = (2.47 \pm 0.2) \cdot 10^{-19} \cdot \text{C}$$

Tali valori non sono però compatibili con i valori tabulati $r_e = 2.818 \cdot 10^{-15}$ m e $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C.

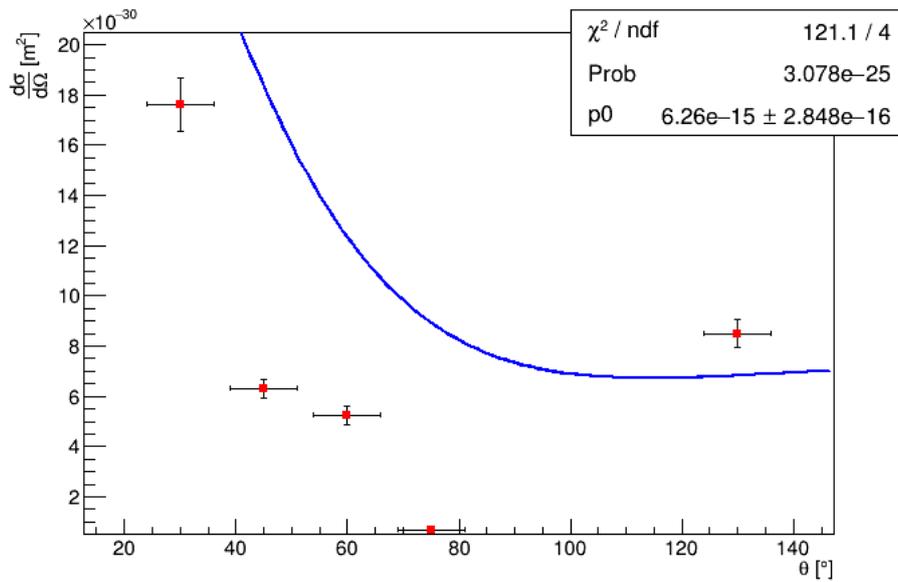


Figura 16: Sezione d'urto differenziale sperimentale [ShowBackground].

Riferimenti bibliografici

- [1] Knoll G. F., *Radiation Detection and Measurement*, Wiley, Fourth Edition.
- [2] Alessandrello A., Gervasio G., Zanotti L., Belluzzo D. e Donati Guerrieri S., *Misura della diffusione Compton in un esperimento a scopo didattico*, Giornale di Fisica, Luglio-Settembre 1994, Vol. XXXV, N.3.
- [3] Bettini A., *Introduction to Elementary Particle Physics*, Cambridge University Press, 2014, Second Edition.
- [4] Barone V., *Relatività*, Bollati Boringhieri, 2004, Prima Edizione.
- [5] Jackson J. D., *Classical Electrodynamics*, Wiley, 1998, Third Edition.