

Allestimento di un apparato PET monodimensionale

Massimo Girola, Gabriele Levati, Francesca Mariani

19 luglio 2019

1 Introduzione

La PET, acronimo di *Positron Emission Tomography*, è una tecnica di *imaging* di grande rilievo nella diagnostica medica che permette di individuare posizione e struttura geometrica di sorgenti radioattive spazialmente estese. Le sorgenti impiegate nella PET decadono β^+ , cioè emettendo un positrone che si annichila non appena interagisce con un elettrone; quando ciò avviene, si osserva l'emissione *back to back*, come prescritto dalla legge di conservazione del quadrimomento, di una coppia di fotoni da 511 Kev che individuano univocamente la linea sulla quale è localizzata la sorgente.

Effettuando numerose misure in coincidenza su opportune scale temporali dei fotoni emessi da ciascuna di diverse annichilazioni elettrone-positrone è possibile ricostruire la posizione ed eventualmente la forma di una sorgente radioattiva estesa.

Lo scopo di questo esperimento è di caratterizzare un apparato monodimensionale per la PET ed individuare grazie al meccanismo appena descritto la posizione di una sorgente di ^{22}Na , un isotopo del sodio che può decadere β^+ con emissione di un positrone.

2 Strumentazione

La strumentazione impiegata per l'allestimento e lo svolgimento dell'esperienza di laboratorio consiste di:

- Scintillatori a ioduro di sodio (NaI) ORTEC 9053 ciascuno da $2''$;
- Alimentatori di alta tensione;
- Amplificatore ORTEC 572, avente guadagno e *shaping time* regolabili;

- Preamplificatore e fotomoltiplicatore ORTEC 276;
- Amplificatore ORTEC 590A avente guadagno e *shaping time* regolabili;
- MultiChannel Analyzer (MCA) dotato di 8192 canali CAEN N957;
- Software per la elaborazione dei segnali;
- Gate and Delay Generator ORTEC 416A;
- Oscilloscopio;
- Sorgente di ^{22}Na

Il supporto per l'apparato della PET è costituito da una coppia di bracci metallici sui quali disporre i rivelatori, ciascuno connesso al proprio fotomoltiplicatore ed allo zoccolo dell'anodo. I due bracci si congiungono su un perno rispetto al quale è possibile fare ruotare il braccio di destra e sul quale è montato un goniometro di sensibilità $\delta\theta = 1^\circ$. In direzione ortogonale al braccio di sinistra, con la tacca dei 7cm posizionata in corrispondenza del centro del goniometro, è assicurato un righello con sensibilità $\delta y = 1\text{mm}$.

3 Caratterizzazione dei rivelatori ed ottimizzazione dei parametri di lavoro

Prima di allestire il vero e proprio apparato per la tomografia ad emissione di positroni è stato necessario impostare la catena di trasmissione del segnale dal rilevatore al software di elaborazione ed individuare le condizioni di lavoro ottimali per ciascuno dei due rivelatori.

3.1 Dal Fotocatodo al calcolatore

La catena di trasmissione del segnale è facile da comprendere se si è dotati di un oscilloscopio che permette di osservare il segnale uscente da anodo, preamplificatore ed amplificatore.

Un fotone emesso dall'annichilazione positrone-elettrone all'interno del cristallo di ioduro di sodio eccita gli atomi dello scintillatore in numero proporzionale alla propria energia. Questi diseccitandosi emettono fotoni ottici od ultravioletti che attraversano una sottile giunzione necessaria a ricordare l'indice di rifrazione cristallo con quello della finestra di ingresso del fotocatodo, dove estraggono ciascuno un elettrone per effetto fotoelettrico.

L'elettrone (o gli elettroni) prodotto in questo modo eccita poi una cascata elettronica all'interno del fotomoltiplicatore, che può essere rilevata all'anodo del fotomoltiplicatore stesso come un segnale negativo. Al preamplificatore questo segnale di tensione è integrato e convertito grazie ad una componente RC in un segnale di tensione dalla caratteristica forma a gradino.

Il segnale di tensione così convertito è trasferito ad un amplificatore impostato a tensione positiva (POS), dove è regolato in ampiezza (in tensione) da un'opportuna calibrazione manuale del guadagno ed in ampiezza temporale da un'analoga calibrazione dello *shaping time*. Questo segnale può essere visualizzato sull'oscilloscopio prima di essere inviato al calcolatore come un'onda di ampiezza variabile.

3.2 Ottimizzazione: un quadro generale

Com'è facile comprendere, lo spettro energetico acquisito dal software del calcolatore è fortemente influenzato dalle scelte della tensione di lavoro, che influenza la ampiezza del segnale in entrata e dalla scelta dello *shaping time*, responsabile invece della ampiezza temporale del segnale in uscita dall'amplificatore.

Per ottenere i migliori risultati possibili è dunque necessario studiare la configurazione che garantisce le condizioni di lavoro ottimali. In particolare, la rilevazione di uno spettro energetico sarà tanto più accurata quanto minore sarà la risoluzione energetica dell'apparato sperimentale.

La risoluzione \mathcal{R} è definita come

$$\mathcal{R} = \frac{FWHM}{E} \quad (1)$$

dove E è l'energia sulla quale è centrato il picco e $FWHM$ rappresente la altezza a metà altezza del picco stesso.

Un segnale di tensione è stoccato in un certo canale del MCA a seconda della sua ampiezza; è possibile calibrare il rivelatore prendendo come riferimento lo spettro energetico di sostenze radioattive note, così da stabilire con esattezza una relazione tra numero del canale ed energia associata ai conteggi rilevati in tale canale.

3.3 Ottimizzazione in tensione

Variando la tensione applicata all'amplificatore naturalmente varia la risoluzione energetica, in quanto varia il numero di conteggi aventi una certa ampiezza.

Per valutare la dipendenza della risoluzione al variare della tensione sono stati raccolti diversi spettri energetici di una sorgente di ^{22}Na a differenti voltaggi, così da potere tracciare un grafico risoluzione-tensione a partire dal quale individuare la tensione ottimale (corrispondente ad un minimo della risoluzione).

Rivelatore di destra e amplificatore O572

Per il rivelatore di destra, connesso all'amplificatore ORTEC 572 si riportano i grafici risoluzione-tensione in figura 1. Si osserva come il valore della risoluzione decresca all'aumentare della tensione fino a raggiungere un *plateau* per valori di tensione compresi approssimativamente tra i 550V e gli 800V. Una tensione compresa in questo intervallo è pertanto associata ad una risoluzione pressoché costante.

Per questa ragione si è scelta come tensione ottimale di lavoro per il rivelatore di destra accoppiato all'amplificatore ORTEC 572 una tensione pari a $V_{572} = (675, 0 \pm 0, 1)V$, in prossimità della quale esso ha risoluzione di $\mathcal{R}_{572}^{511\text{KeV}} = (7, 30 \pm 0, 05)\%$ per il picco a 511KeV e di $\mathcal{R}_{572}^{1,28\text{MeV}} = (4, 77 \pm 0, 08)\%$ per il picco a 1274KeV.

Rivelatore di sinistra e amplificatore O590

La medesima procedura è stata seguita anche nella determinazione della tensione di lavoro ottimale

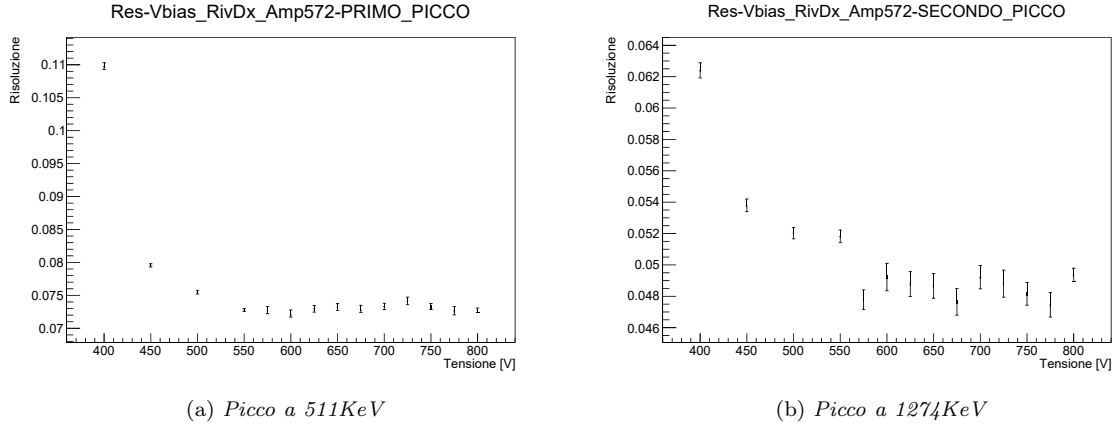


Figura 1: Risoluzione contro tensione per il rivelatore ORTEC 572

per il rivelatore di sinistra. Si riportano, in figura 2, i risultati ottenuti.

La tensione di lavoro scelta per il rivelatore di sinistra, collegato all'amplificatore ORTEC 590 è ancora una volta pari a $V_{572} = (675, 0 \pm 0, 1)V$, in prossimità della quale esso ha risoluzione di $\mathcal{R}_{572}^{511KeV} = (9, 60 \pm 0, 04)\%$ per il picco a $511KeV$ e di $\mathcal{R}_{572}^{1,28MeV} = (6, 51 \pm 0, 06)\%$ per il picco a $1274KeV$.

Questo valore non corrisponde al minimo della risoluzione in funzione della tensione. Si è tuttavia optato per adottare questo valore di tensione come quella di lavoro perchè garantisce una maggiore flessibilità nell'utilizzo della manopola del guadagno rispetto alle tensioni superiori (a partire dalla tensione di $700V$ infatti la possibilità di aggiustare il *gain* è estremamente limitata, trovandosi in prossimità del valore di saturazione dei canali del MCA).

3.4 Ottimizzazione dello *shaping time*

Lo *shaping time*, ossia il tempo di formatura del segnale, è un parametro variabile dei rivelatori che rappresenta l'ampiezza del segnale gaussiano in uscita dall'amplificatore. Deve essere regolato correttamente al fine di minimizzare il rapporto segnale-rumore e il *pile-up*. Il *pile-up* è un fenomeno legato all'interferenza di impulsi con un alto tasso di conteggi che, essendo distribuiti in maniera casuale nel tempo, possono sovrapporsi. Questo ef-

fetto può essere minimizzato rendendo l'ampiezza totale degli impulsi più stretta possibile.

Rivelatore di destra Per il rivelatore di destra, connesso sempre all'amplificatore ORTEC 572 si riportano i grafici risoluzione-*shaping time* in figura 3.

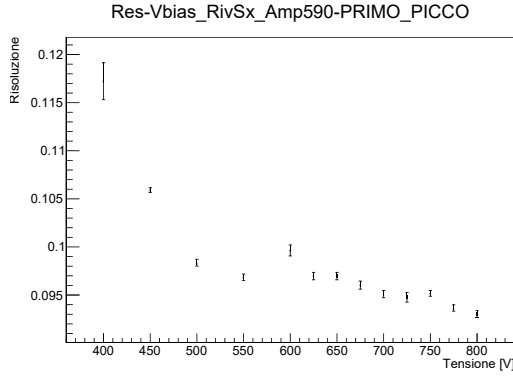
Si è scelto come valore ottimale del tempo di formatura del segnale uno *shaping time* pari a $\tau_{572} = (6, 0 \pm 0, 1)\mu s$, in prossimità del quale esso ha risoluzione di $\mathcal{R}_{572}^{511KeV} = (7, 12 \pm 0, 10)\%$ per il picco a $511KeV$ e di $\mathcal{R}_{572}^{1,28MeV} = (4, 07 \pm 0, 12)\%$ per il picco a $1274KeV$.

Rivelatore di sinistra Per il rivelatore di sinistra, connesso sempre all'amplificatore ORTEC 572 (l'unico dotato di manopola esterna per la regolazione del tempo di formatura del segnale) si riportano i grafici risoluzione-*shaping time* in figura 4.

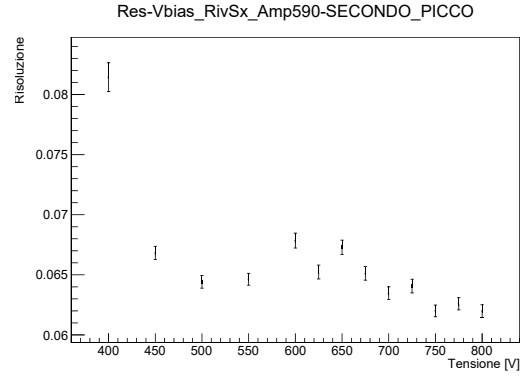
In questo caso si è scelto uno *shaping time* pari a $\tau_{572} = (10 \pm 0, 1)\mu s$, in prossimità del quale esso ha risoluzione di $\mathcal{R}_{572}^{511KeV} = (9, 39 \pm 0, 04)\%$ per il picco a $511KeV$ e di $\mathcal{R}_{572}^{1,28MeV} = (6, 24 \pm 0, 06)\%$ per il picco a $1274KeV$.

3.5 Note metodologiche

Si riportano in seguito alcune importanti note riguardo al metodo seguito nella raccolta e nella elaborazione dei dati acquisiti per la ricerca della tensione di lavoro e dello *shaping time* ottimali.

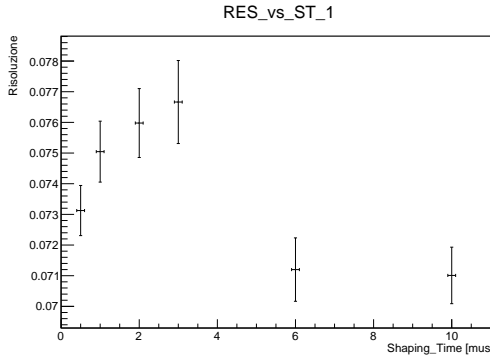


(a) Picco a 511KeV

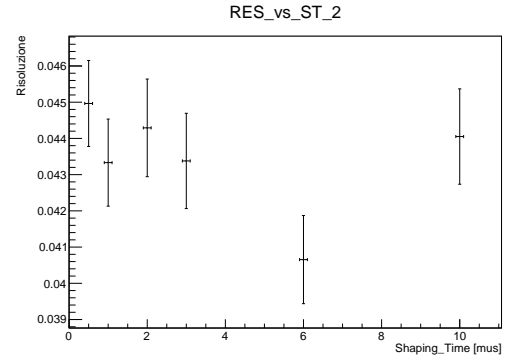


(b) Picco a 1274KeV

Figura 2: Risoluzione contro tensione per il rivelatore di sinistra



(a) Picco a 511KeV



(b) Picco a 1274KeV

Figura 3: Risoluzione contro *shaping time* per il rivelatore di destra

- 1 Il *range* di tensione scelto per la raccolta degli spettri energetici è limitato all'intervallo compreso tra 400V e 800V: per tensioni inferiori il rumore elettronico di fondo risulta dominante nei primi *bin*, mentre a tensioni superiori il segnale satura anche a guadagno minimo (cioè si accumulano nell'ultimo *bin* tutti gli eventi che dovrebbero essere distribuiti ad energie superiori).
- 2 Al variare della tensione applicata si osserva uno spostamento dei picchi energetici su canali diversi dell'MCA, ed è necessario modificare il guadagno dell'amplificatore per garantire che entrambi i picchi rimangano localizzati nella porzione centrale dello spettro. In questo modo rimangono lontani dalla regione in cui il segnale è maggiormente influenzato dal rumore

di fondo (a canali corrispondenti a basse energie) e dalla porzione terminale dello spettro, in cui eventi di energia superiore al massimo potrebbero essere spostati in canali corrispondenti ad energie inferiori (osservando quindi un grande numero di eventi negli ultimi *bin*).

- 3 Per quanto riguarda il rivelatore di destra si è deciso di *fit* lo spettro energetico modellizzandolo in prossimità dei picchi con una funzione data dalla somma di una gaussiana e di un polinomio di primo grado per tenere conto degli eventi di fondo.

L'intervallo scelto per il *fit* è esteso dal valore corrispondente alla media della gaussiana meno tre sigma al medesimo valore più tre sigma, in modo da tenere conto di oltre il 99%

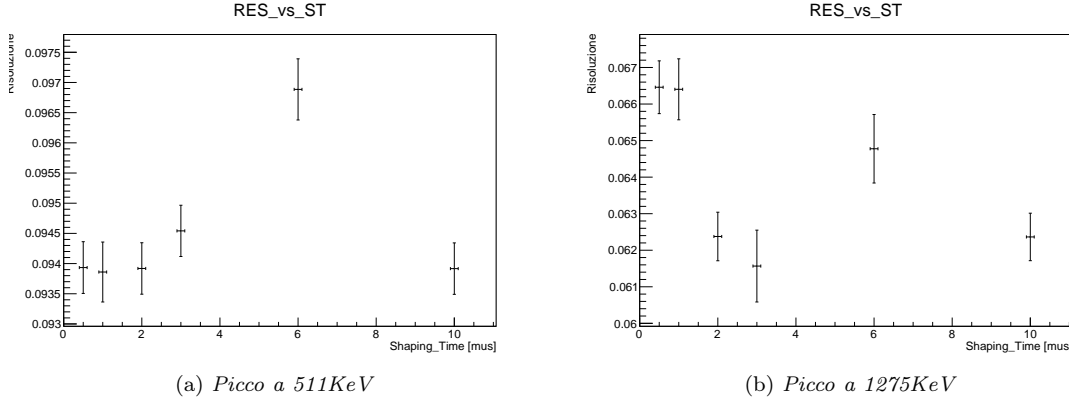


Figura 4: Risoluzione contro *shaping time* per il rivelatore di sinistra

degli eventi inclusi nel fotopicco, cioè di tutti quegli eventi che concorrono a determinarne risoluzione.

Infine, osservando che la **ampiezza** della funzione di *fit* al fotopicco è unicamente determinata dalla sigma della gaussiana centrata attorno alla posizione del picco stesso, si è utilizzata per il calcolo della risoluzione la relazione seguente:

$$\mathcal{R} = \frac{2,35 \sigma}{E_0} \quad (2)$$

dove σ è la sigma della gaussiana, mentre E_0 ne rappresenta la media. L'errore sulla risoluzione si trova invece propagando gli errori.

- 4 Lo spettro energetico del rivelatore sinistro accoppiato all'amplificatore ORTEC 590 presenta, com'è facile vedere dalla figura 5, una "gobba" di eventi localizzati a destra del picco principale.

Se inizialmente si è pensato che essa potesse essere in qualche modo legata ad un fenomeno di *pile-up* dovuto in qualche maniera alla distanza della sorgente dal rivelatore od alla scelta dello *shaping time* dell'amplificatore utilizzato, queste possibilità sono state escluse rilevando il medesimo problema anche per diverse distanze della sorgente dallo scintillatore e per differenti tempi di **formazione** dell'impulso.

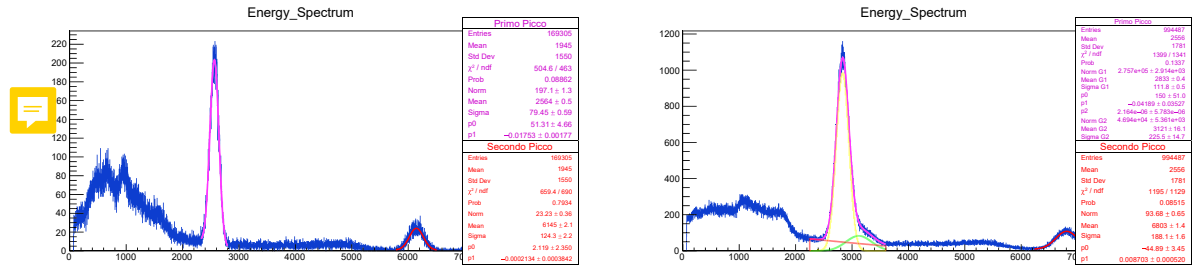
La possibilità che si trattasse di un problema legato all'amplificatore utilizzato è inoltre sta-

ta esclusa osservando una gobba a destra del picco principale anche collegando il rivelatore di sinistra all'amplificatore ORTEC 572.

Non è quindi rimasto altra opzione che prendere atto di un difetto strutturale del rivelatore di sinistra. Si ipotizzano a proposito una frattura del cristallo di *NaI(Tl)* oppure una separazione del cristallo dalla superficie di adesione dello stesso con il fotomoltiplicatore, od una spiccata inhomogeneità del materiale di raccordo tra cristallo e fotomoltiplicatore.

A livello pratico, gli effetti di questo difetto sono stati risolti *fittando* lo spettro energetico in prossimità del primo fotopicco con una funzione complessiva data dalla somma di due gaussiane aventi parametri distinti e di un polinomio di secondo grado per modellizzare il fondo. La scelta di una gaussiana per modellizzare la presenza di una gobba sottende implicitamente l'assunzione del fenomeno distorsivo come di natura intrinsecamente casuale; i buoni risultati di convergenza dell'interpolazione sono compatibili con questa assunzione.

Si osservi inoltre come l'intervallo di *fit* sia stato esteso notevolmente oltre le tre sigma impiegate per il rivelatore destro, e come questa estensione sia asimmetrica: la ragione sta nella necessità di includere nel *fit* tutti gli eventi sottesi sia alla prima sia alla seconda gaussiana, sia per potere modellizzare efficacemente il fondo, non più approssimabile, per un intervallo tanto ampio, con una funzione lineare.



(a) Spettro energetico del rivelatore destro con amplificatore ORTEC 572

(b) Spettro energetico del rivelatore sinistro con amplificatore ORTEC 590

Figura 5: Risoluzione contro tensione per i due rivelatori a 675 V. La presa dati per il rivelatore di sinistra ha coperto un lasso di tempo più ampio per potere raccogliere più eventi ed interpolare i dati con una funzione più complessa.

Per ultimo, non essendo più possibile impiegare per il calcolo della risoluzione la formula (2), si è rivelato necessario valutare la $FWHM$ come da definizione: si è cercata con un opportuno programma la altezza del massimo del picco sulla funzione di fit per poi individuare sulle ascisse i canali corrispondenti alla metà dell'altezza massima in ordinata. La ampiezza a metà altezza è poi stata calcolata come valore assoluto della differenza di questi punti, individuati da un codice adeguatamente sviluppato.

L'incertezza da associare a tale quantità è di difficile identificazione. Assumendo che il peso maggiore nella determinazione del massimo e della ampiezza relativa alla metà del massimo sia da imputare alla gaussiana principale, come sembra ragionevole fare visto il notevolmente maggior numero di eventi da essa sottratti, si è deciso di impiegare come incertezza sulla $FWHM$ l'errore associato alla sigma della gaussiana principale.

3.6 Forma del segnale

Usando l'oscilloscopio sono stati valutati il tempo di salita e il tempo di discesa del segnale in uscita da anodo, preamplificatore ed amplificatore.

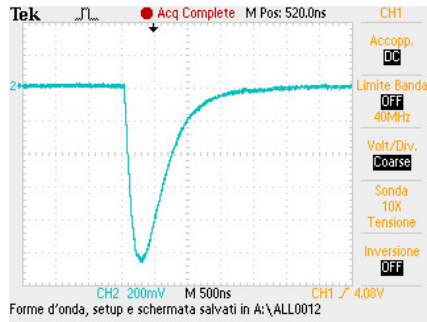
Sono stati raccolti 8 dati in tutti e tre i casi al variare della tensione di input. Per convenzione si è valutato il t_{rise} come il tempo necessario a passare dal 10% dell'altezza al 90% dell'altezza e il t_{decay} come il tempo necessario a passare dal 70% al 30%. L'altezza è stata misurata con i cursori dell'oscilloscopio e come incertezza è stato scelto un valore pari a 4 volte il passo del cursore verticale. Il tempo invece è stato misurato con i cursori orizzontali e l'incertezza è stata più difficile da determinare e valutata come la metà del numero di passi del cursore temporale lungo i quali la tensione manteneva il medesimo valore.

Si è determinato il t_{rise} come il valor medio tra gli 8 misurati e la sua incertezza come la deviazione standard. Si riportano i risultati ottenuti in tabella.

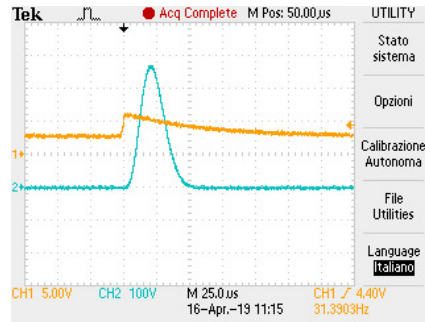
Elettronica	$\tau_{rise}(\mu s)$	$\tau_{decay}(\mu s)$
Anodo	$(0, 10 \pm 0, 13)$	$(0, 42 \pm 0, 24)$
Pre	$(0, 67 \pm 0, 09)$	(47 ± 3)
Amp	$(10, 27 \pm 0, 24)$	$(7, 10 \pm 0, 23)$

Si osserva che il tempo di crescita del segnale del preamplificatore è confrontabile con quello di decrescita dell'anodo, a riprova del fatto che il primo risulta dall'"integrazione" per mezzo del capacitore dei segnali impulsivi generati dagli elettroni fotomoltiplicati.

Di seguito vengono riportate, a titolo d'esempio, le immagini relative ai tipici segnali in uscita dall'a-



(a) Segnale in uscita dall'anodo



(b) Segnale in uscita dall'amplificatore e dal preamplificatore

Figura 6: Segnali in uscita rispettivamente dall'amplificatore e dal preamplificatore, con loro confronto.

nodo, dal preamplificatore e dell'amplificatore (cfr. figura 6)

3.7 Curva di calibrazione Canale-Energia e valutazione della linearità del rivelatore

Sono stati acquisiti gli spettri di sorgenti note quali ^{22}Na , ^{57}Co , ^{60}Co e ^{241}Am con *shaping time* di $10\mu\text{s}$ e guadagno $G = (58,0 \pm 0,1)$.

Questi isotopi hanno schemi di decadimento noti, di conseguenza è possibile determinare i canali corrispondenti ai picchi principali e graficare successivamente la curva Ch-E.

I picchi degli isotopi utilizzati sono riportati nella tabella che segue; per ciascuno di essi è stato determinato il canale corrispondente grazie ad un opportuno programma informatico.

Come incertezza relativa al canale si è utilizzata la deviazione standard della media della gaussiana del picco corrispondente, mentre **come incertezza sull'energia** si è scelto di utilizzare l'unità:

Isotopo	Canale	Energia(KeV)
^{22}Na	2841	511
^{22}Na	6786	1274
^{60}Co	6266	1173
^{60}Co	7078	1332
^{241}Am	408.9	60
^{57}Co	570.7	122
^{57}Co	762	136

Si osservi (cfr figura 7) come la curva di calibrazione ottenuta non soddisfi la relazione di linearità con la quale è stata interpolata (il test del Chi-

Quadro fornisce esito negativo al livello del 5%, soglia scelta per l'accettabilità del risultato). Tuttavia la linearità è garantita a medie energie, come si può facilmente dedurre dal grafico in figura 8, ottenuto trascurando i dati a basse energie. In questo secondo caso si trova un accordo al 99% con un modello lineare, che permette di risalire dal numero del canale all'energia corrispondente.

In seguito, quando si parlerà di energia si sottintenderà (come già fatto implicitamente in alcune occasioni in precedenza) l'energia corrispondente al canale nel quale un certo evento è stato conteggiato, ottenuta dalla relazione lineare

$$E = mx + q \quad (3)$$

dove x è il canale dell'evento considerato, E è la corrispondente energia, $m = (0,194 \pm 0,006) \frac{\text{KeV}}{\text{canale}}$ il coefficiente angolare estrapolato dal *fit* e $q = (-40 \pm 30) \text{KeV}$ l'intercetta con l'asse delle energie.

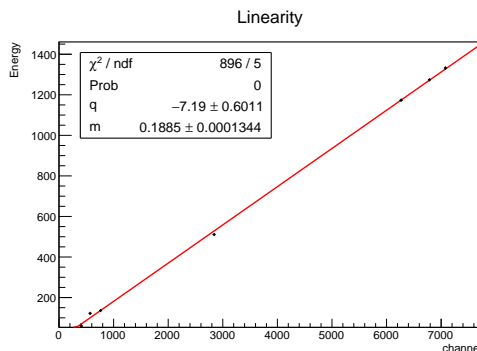


Figura 7: Curva di calibrazione canale-energia

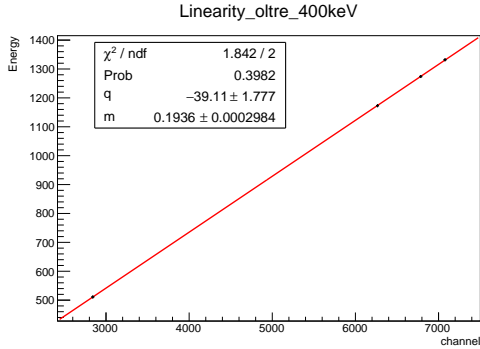


Figura 8: Curva di calibrazione canale energia per picchi la cui energia è nota essere superiore a 400 KeV

4 Impostazione della catena di coincidenza

Il cuore dell'esperimento consiste nella rilevazione di coppie di fotoni emessi nella medesima direzione ma in versi opposti (*back to back*). Per assicurarsi che i fotoni raccolti siano effettivamente provenienti dal medesimo evento di annichilazione del positronio, è necessario impostare una ben calibrata catena di coincidenza.

Per assicurarsi che due fotoni appartengano al medesimo evento sono necessari entrambi i rivelatori: il primo segnala l'evento ed il secondo è impiegato come spettrometro.

Il primo rivelatore in particolare riceve un fotone della coppia, che, se dotato di un'energia collocata all'interno di una ben precisa finestra energetica regolabile a piacere, permette l'apertura del *gate*: l'amplificatore collegato a questo rivelatore funge da SCA (*Single Channel Analyzer*) ed emette un segnale di ampiezza standard e durata temporale variabile a piacere al MCA (*MultiChannel Analyzer*), per la durata del quale il MCA è ricettivo ad un segnale proveniente dal secondo amplificatore.

Il secondo amplificatore funge da spettrometro e disegna lo spettro energetico degli eventi accettati a seguito dell'apertura del *gate* logico da parte del primo rivelatore, e per tutta la sua durata. Questo amplificatore è collegato direttamente al MCA, che raccoglie quindi una serie di eventi di energia differente, ma limitati nella finestra energetica con la quale è stato impostato il primo rivelatore.

La scelta di quale rivelatore è opportuno impiegare come spettrometro e quale utilizzare come *gate* dovrebbe essere improntata ad avere la maggiore risoluzione possibile per quanto riguarda lo spettro acquisito, così da potere discriminare meglio gli eventi distinti ottenuti; di conseguenza è opportuno scegliere per l'apertura del cancello logico il rivelatore meno affidabile, che ha comunque il solo scopo di aprire la finestra di ricezione del segnale per il secondo.

Visti i difetti intrinseci osservati per il rivelatore di sinistra, si è deciso di impiegarlo come *gate*, collegandolo all'ORTEC 590, mentre si è utilizzato come spettrometro il rivelatore di destra connesso all'ORTEC 572.

4.1 Impostazione della finestra energetica: misure di autocoincidenza

Per impostare la ampiezza della finestra energetica è necessario effettuare delle misure in autocoincidenza, costruendo un circuito come quello in figura 9.

Il segnale in uscita dal preamplificatore (PRE) del rivelatore scelto per il *gate* viene sdoppiato lungo due canali, uno connesso al SCA che produce il segnale in onda quadra che apre il cancello logico, ed uno connesso all'amplificatore. Entrambi i segnali vengono poi ricondotti all'oscilloscopio prima ed al MCA poi, così da potere essere osservati entrambi.

Si dimensiona quindi il segnale emesso dal SCA regolandone lo *shaping time* in modo che il segnale del *gate* in onda quadra abbia massimo in corrispondenza del massimo del segnale gaussiano proveniente dall'amplificatore. Sono stati scelti valori di tempo di formazione del segnale rispettivamente di $6\mu s$ per l'amplificatore e di $3\mu s$ per il TSCA.

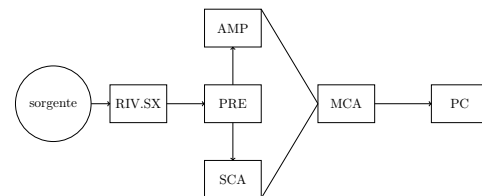


Figura 9: Circuito in autocoincidenza

Successivamente è stata impostata l'ampiezza energetica della finestra aperta dal gate tramite un'opportuna manopola così da restringere il *range* di eventi accettabili attorno all'energia del picco a 511KeV regolando il *lower level E* e l'apertura δE .

Fissate le finestre energetiche e temporali per il rivelatore di sinistra si è poi provveduto ad osservare il sistema di coincidenza tra i due rivelatori per ottimizzarne la sincronia. La configurazione definitiva è data dai parametri $V = (675, 0 \pm 0, 1)V$ per il TSCA e l'amplificatore, $\tau = (6, 0 \pm 0, 1)\mu s$ come tempo di formatura del segnale per l'amplificatore ORTEC 572.

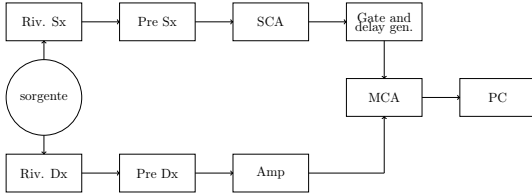


Figura 10: Circuito in coincidenza

4.2 Ottimizzazione della distanza

Individuate le migliori condizioni operative per le misure in coincidenza si è cercata la distanza ottimale per effettuarle.

La distanza ottimale è quella che permette di ottenere la migliore risoluzione angolare possibile a tempo fissato (si è scelto di fissare il tempo di presa dati a 10 minuti per misura). La risoluzione angolare è stata valutata come ampiezza a metà altezza del picco di conteggi attorno allo zero angolare:

$$\mathcal{R}_\theta = \frac{FWHM_\theta}{2} \quad (4)$$

La ampiezza a metà altezza è stata trovata a partire dai *fit* del numero di conteggi rispetto alla posizione angolare, *fitate* come in figura 11 con funzioni polinomiali di secondo grado a tratti, nell'ipotesi sufficientemente generica che le curve potessero essere localmente rappresentate come parabole (l'esito del test del chi quadro fornisce un esito positivo, con probabilità superiore al livello del 5%)

L'incertezza relativa alla risoluzione angolare è stata ricavata a partire dai parametri di *fit* tramite

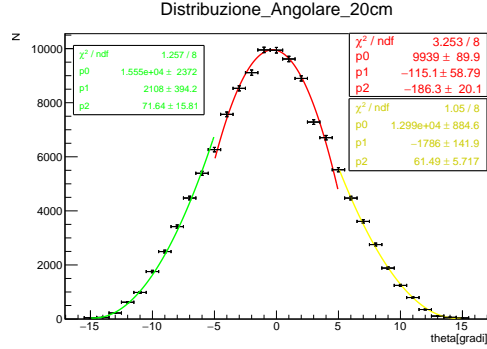


Figura 11: Distribuzione angolare dei conteggi alla distanza $d=(20 \pm 0, 1)\text{cm}$

la propagazione degli errori, considerando che la posizione angolare corrispondente a metà dell'altezza si trova risolvendo la equazione

$$a_i x^2 + b_i x + (c_i - \frac{H_{max}}{2}) = 0 \quad (5)$$

dove i parametri sono indicizzati da $i = S, C, D$ a seconda che il punto corrispondente alla metà della altezza massima H_{max} si trovi rispettivamente nel dominio della parabola sinistra, centrale o destra. Il calcolo è svolto da un opportuno programma riportato in appendice. I risultati sono riportati in tabella. La risoluzione ed il suo errore sono misurati in gradi sessadecimali.

Distanza (cm)	Risoluzione R	Errore R
$12, 0 \pm 0, 1$	9,1	1,8
$15, 0 \pm 0, 1$	7,6	1,9
$17, 5 \pm 0, 1$	6,7	1,3
$20, 0 \pm 0, 1$	5,2	0,6

Come ci si poteva attendere, la risoluzione è tanto migliore quanto maggiore è la distanza dei rivelatori dalla sorgente (cioè quanto più essa è approssimabile come una sorgente puntiforme ed i rivelatori sono approssimabili con rivelatori di estensione minima).

La distanza scelta per la campagna di misure pertanto è $d = (20, 0 \pm 0, 1)\text{cm}$. Si sarebbero potuti ottenere risultati migliori a distanza ancora superiori, ma questo avrebbe richiesto prese dati estremamente lunghe.

Un'osservazione: per semplificare la analisi dei dati si è deciso di mantenere uguale per entrambi i rivelatori la distanza d dalla sorgente.

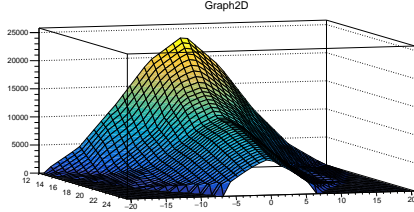


Figura 12: Numero di conteggi in funzione dell'angolo e della distanza per prese dati di 10 minuti l'una.

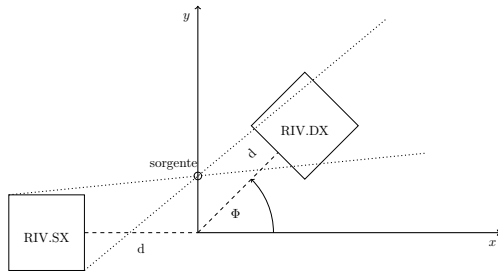


Figura 13: Disposizione geometrica dell'apparato sperimentale

5 Valutazione della posizione della sorgente

Lo scopo della PET è quello di individuare correttamente la posizione di una sorgente radioattiva a partire dalla rilevazione di eventi *back to back*. In questa sezione si esporrà la tecnica utilizzata per conoscere la posizione della sorgente a partire da alcune misure di conteggi in funzione dell'angolo Φ di inclinazione del rivelatore scelto come spettrometro rispetto alla posizione in cui i due rivelatori sono disposti uno in fronte all'altro, come in figura 13.

5.1 Un codice Montecarlo per la simulazione degli eventi

Per prima cosa si è scritto un codice montecarlo che permette di simulare la emissione di due fotoni sulla medesima linea con un angolo φ sul piano orizzontale ed un angolo di alzo pari a θ .

Il programma approssima i rivelatori cilindrici con rivelatori cubici e valuta, per ciascuna coppia di angoli (θ, φ) generati casualmente la distanza

$x_y(\theta, \varphi; \Phi)$ che separa il punto di ingresso della retta che rappresenta la direzione del fotone dal punto di uscita dal cristallo di NaI .

Si definisce poi la densità di probabilità $p_y(\theta, \varphi)$ di assorbimento per il fotone emesso in direzione dello spettrometro condizionata alla probabilità che il suo fotone correlato sia rilevato dal *gate* come

$$p_y(\theta, \varphi, \Phi) = 1 - e^{-\mu x_y(\theta, \varphi, \Phi)} \quad (6)$$

dove μ è il coefficiente di attenuazione corrispondente all'assorbimento per effetto fotoelettrico e Compton, nell'assunzione piuttosto larga che tutti gli eventi Compton diano luogo ad effetto fotoelettrico secondario e concorrano pertanto a definire il fotopicco. Chiaramente questo non risponde alla realtà fisica, essendo possibile che per effetto Compton un fotone venga deviato e fuoriesca dal cristallo (una cosiddetta "fuga"), non risultando nel computo totale degli eventi al fotopicco. Una stima più precisa dell'incidenza degli eventi di diffusione che danno luogo ad effetto fotoelettrico secondario contro quelli che non lo fanno risulta essere tuttavia piuttosto laboriosa e si è pertanto preferito impiegare questa approssimazione e dedicarsi al raffinamento del programma di simulazione.

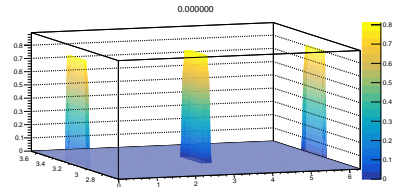


Figura 14: Densità di probabilità per $(\theta, \phi; \Phi = 0)$ con la sorgente posizionata nell'origine

La probabilità condizionata si ottiene imponendo che i fotoni possano essere rivelati dall'apparato a destra solamente se vengono generati lungo una linea contenuta all'interno del cono di luce sotteso dal rivelatore di sinistra.

Il cono di luce è definito dalle rette limite passanti per la posizione della sorgente e i vertici del cubo che approssima il rivelatore. Nel caso in cui un fotone (θ, φ) venga generato lungo una retta esterna al cono di luce, la probabilità p_y restituita è nulla. Questo concetto può essere facilmente visualizzato in due dimensioni, come riportato in figura 13.

La densità di probabilità in (6) è poi stata integrata con il metodo Montecarlo *Hit or Miss* bi-

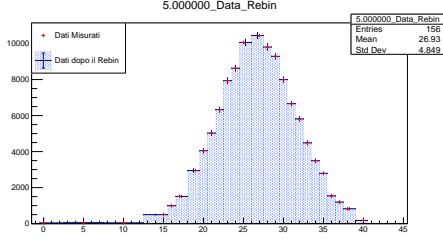


Figura 15: L'operazione di *rebinning* è qui illustrata per la posizione a $y = -5\text{cm}$

dimensionale sulla totalità degli angoli $\theta \in [0, \pi]$ e $\varphi \in [0, 2\pi]$ per ottenere la probabilità complessiva

$$P_y(\Phi) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \quad p_y(\theta, \varphi, \Phi) \quad (7)$$

dove Φ indica l'angolo disegnato dal rivelatore di destra rispetto alla direzione identificata dall'asse di quello di sinistra e y è la posizione della sorgente rispetto al centro del sistema (si veda la figura 13).

Al variare della posizione della sorgente y , trattata come un parametro nella definizione della probabilità di interazione, è stato poi prodotto dal programma un *database* di probabilità di rivelazione di un evento di coincidenza in funzione dell'angolo Φ .

5.2 Normalizzazione dei dati simulati e raccolti

Per potere stabilire l'efficacia del metodo di valutazione della posizione della sorgente a partire dal *database* generato dal programma di simulazione nel confronto con una generica distribuzione di conteggi al variare dell'angolo, si è deciso di valutare l'accordo tra i dati prodotti ed un campione di dati raccolti.

Per farlo si è acquisito il numero di conteggi ad un certo angolo scelto (Φ) per diverse posizioni fissate della sorgente. Gli angoli vengono spazzati su un intervallo in cui si è reputato plausibile avere conteggi non nulli. Il passo tra una presa dati e la successiva è variabile specialmente nelle regioni angolari in cui sono stati visualizzati pochi conteggi.

Confrontare direttamente la distribuzione angolare così misurata con quella prodotta dalla simulazione non è però possibile: è necessario infatti che entrambe siano normalizzate ad uno. Per farlo,

si sono costruiti degli istogrammi i cui *bin* hanno ampiezza pari alla separazione data dal passo in Φ per quanto riguarda i dati simulati. Per quanto riguarda i dati osservati invece i *bin* hanno ampiezza data da metà della separazione tra il dato e quello precedente a sinistra, tra il dato e quello successivo a destra. In questo modo si è certi di non avere alcun *bin* vuoto all'interno della regione di presa dati. L'esito della operazione di *rebinning* è ben illustrato dalla figura 15.

In entrambi i casi poi ciascun *bin* è stato riempito all'altezza definita dal valore rispettivamente simulato e raccolto.

L'area dei due integrali è stata in seguito valutata sommando le aree dei rettangoli associati a ciascun *bin*; noto il suo valore è stato possibile poi normalizzare entrambi gli istogrammi così da poterli confrontare.

5.3 Determinazione della posizione della sorgente

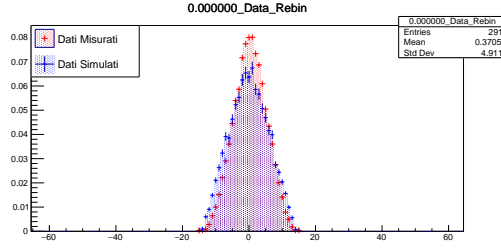
Determinare la posizione della sorgente è ora possibile a partire da un confronto quantitativo tra i dati raccolti sulla distribuzione dei conteggi ed il *database* generato dal programma di simulazione.

Definito un opportuno funzionale che confronti i dati acquisiti e normalizzati con la distribuzione generata dal programma Montecarlo, dipendente parametricamente dalla posizione della sorgente y e normalizzata, è infatti possibile determinare la posizione della sorgente che minimizza o massimizza tale funzionale, stabilendo in prossimità di tale valore la migliore stima del parametro y .

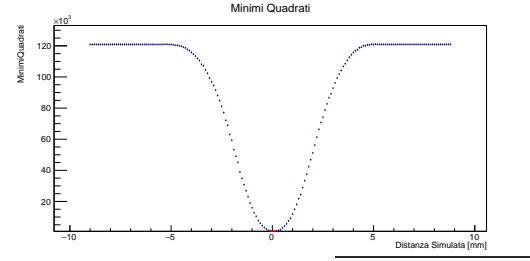
Il funzionale da noi scelto è quello dei minimi quadrati, definito da

$$Q^2(y) = \sum_{i=0}^N \left(\frac{Gen_i(y) - Oss_i}{\sqrt{\sigma_{oss,i}^2 + \sigma_{gen,i}(y)^2}} \right)^2 \quad (8)$$

dove N è il numero di *bin* dell'istogramma generato; Oss_i è il valore associato all' i -esimo *bin* dell'istogramma normalizzato ottenuto dai dati raccolti e rebinnati mentre $Gen_{i,y}$ è il contenuto del *bin* appartenente all'istogramma dei dati generati in corrispondenza del quale cade il centro di Oss_i . Questa operazione è il modo più semplice per potere confrontare istogrammi con *bin* di ampiezza diversa. A rigore si dovrebbero realizzare istogrammi



(a) istogrammi normalizzati a confronto a $y=0$



(b) Il funzionale minimi quadrati in $y=0$

Figura 16: A sinistra si propone il confronto tra l'istogramma normalizzato dei dati raccolti ad $y=0$ e l'analogo istogramma generato per la posizione $y=0$ (da nonconfondere con l'istogramma che minimizza il funzionale dei minimi quadrati). A destra il profilo del funzionale dei minimi quadrati per la posizione dei dati raccolti in $y=0$

descritti dagli stessi *bin*, ma si suppone che in prima approssimazione il metodo seguito possa fornire comunque risultati accettabili.

Ripetendo questo calcolo per i diversi valori del parametro y presenti nel *database* prodotto dalla simulazione si ottengono una serie di punti che grafichiamo come in figura 16 e che rappresentano il funzionale $Q^2(y)$. Interpolando con una parabola i dati in un intorno del minor valore $Q^2(y)$ si può ottenere una stima della posizione della sorgente y_{min} , estremante in corrispondenza del quale è presente il minimo della parabola. Si ripete tale procedura per le cinque posizioni della sorgente per le quali sono stati raccolti i dati. Si studi a titolo d'esempio questo procedimento per il caso di sorgente nell'origine a partire dalla figura 16.

Nell'ipotesi di avere simulato dei dati aderenti al vero a meno di fluttuazioni statistiche, il valore del funzionale dei minimi quadrati nel punto di minimo $Q^2(y_{min})$ dovrebbe seguire una distribuzione statistica Chi-Quadrato a $(N - 1)$ gradi di libertà, dove 1 rappresenta il vincolo imposto dalla normalizzazione.

Come si può vedere dalla tabella 5.3 questo non avviene: la simulazione non è cioè dominata da errori casuali, ma è affetta da errori sistematici introdotti dalle svariate approssimazioni: sulla forma dei rivelatori e sul coefficiente di attenuazione *in primis*, ma anche sulle approssimazioni impiegate nel trattamento degli istogrammi.

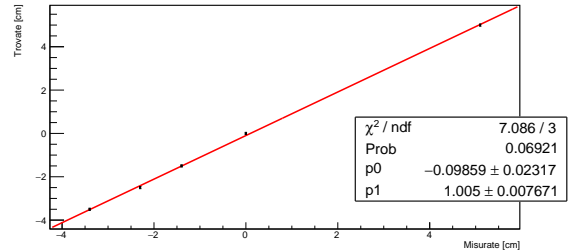


Figura 17: confronto tra le posizioni misurate della sorgente e quelle individuate a partire dalla simulazione

$y_{min}(cm)$	χ^2_{red}
$(-3,358 \pm 0,012)$	25,7
$(-2,347 \pm 0,011)$	20,8
$(-1,384 \pm 0,014)$	11,3
$(0,036 \pm 0,013)$	48,0
$(5,056 \pm 0,008)$	33,3

dove y_{min} rappresenta la posizione simulata della sorgente che minimizza il funzionale Q^2 .

Per ultimo è possibile costruire un grafico delle posizioni della sorgente simulate contro le posizioni note alle quali sono stati effettuati i conteggi nella speranza di ottenere comunque una relazione predittiva tra queste due quantità (si veda la figura 17). Le incertezze assegnate alle posizioni y_{min} trovate sono state valutate richiedendo che $\Delta Q^2 = 1$, ben sapendo che il classico significato statistico di questa operazione non si applica in questo caso.

Come emerge dall'analisi di tale grafico il parametro $p_1 = (1,005 \pm 0,008)$ rappresentativo del

coefficiente angolare è compatibile con il valore di 1 oltre il livello del 5%, mentre quello relativo all'intercetta con l'asse y , $p_0 = (-0,099 \pm 0,023)$ non risulta compatibile al livello del 1% con 0. La compatibilità è stata valutata effettuando il test t di Student ed ha fornito rispettivamente i risultati $t_1 = 0,64$ e $t_0 = 4,30$.

Il metodo impiegato per ricavare la posizione della sorgente fornisce quindi risultati *biased* con uno scarto costante ed individuato dal valore dell'intercetta p_1 . La linearità della relazione permette di risalire alla posizione della sorgente tramite il *database* generato; l'errore sistematico può essere imputato ad una disposizione sperimentale difettosa, nella quale il righello non è esattamente centrato sul centro geometrico del perno, ma risulta scostato sulla verticale esattamente della quantità individuata dal parametro p_1 (dell'ordine del millimetro).

6 Interposizione di un assorbitore

In condizioni ordinarie un apparato PET è utilizzato non tanto per individuare sorgenti radioattive nello spazio aperto, quanto localizzate all'interno di tessuti organici. Questo significa che per individuare correttamente la posizione di tali sorgenti è necessario sapere come trattare la presenza di un materiale assorbitore interposto tra essa ed i rivelatori.

Per studiare questa situazione si è deciso di montare al posto del righello un marinelli riempito di materiali assorbitori diversi (acqua e sale).

Si sono poi acquisiti spettri energetici in coincidenza per la sorgente fissata nell'origine degli assi (cfr figura 13) al variare dell'angolo Φ nel solo verso negativo e con campionamenti ogni 2-3 gradi e con prese dati della durata di un'ora per tener conto del minor numero di conteggi. Con i dati elaborati a partire da questi spettri si sono poi graficate le coppie di punti (N, Φ) da due polinomi di secondo grado (si ricordi che i dati sono stati presi solo in un verso).

Da questi dati è possibile estrarre il valore della risoluzione angolare del sistema, valutata in questo caso come distanza tra il punto di massimo (assunto essere assunto sempre in $\Phi = 0$ per ragioni di simmetria) ed il punto \tilde{x} appartenente alla parabola di

destra in corrispondenza del quale la funzione di *fit* assume valore pari a metà del massimo dell'altezza totale.

$$\mathcal{R}_\theta = \tilde{x} \quad (9)$$

L'errore su tale quantità è stato propagato sulla formula risolutiva (5) come già fatto per la risoluzione angolare, tenendo conto dei soli errori sui parametri della parabola di destra, avendo assunto che il massimo fosse assunto in corrispondenza dello zero angolare.

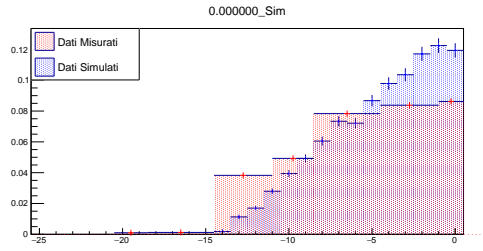
Si osserva in generale, come ci si poteva attendere da eventi di diffusione casuale dovuti al materiale interposto, un peggioramento della risoluzione angolare, come riportato nella seguente tabella:

Assorbitore	Risoluzione ($^\circ$)
Acqua	$(10,6 \pm 2,3)$
Sale	$(9,3 \pm 1,9)$

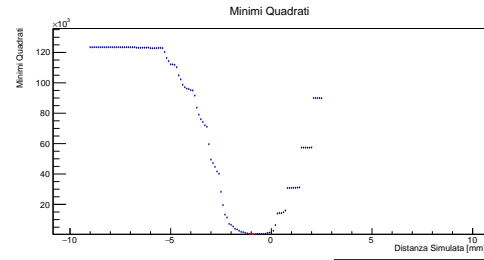
Successivamente si è deciso di testare la validità predittiva del metodo di individuazione della posizione della sorgente in presenza di assorbitore, ripetendo le operazioni descritte in precedenza (trasformazione dei dati in un istogramma, sua normalizzazione e confronto con i dati simulati per mezzo del funzionale Q^2).

Queste operazioni sono state svolte considerando solamente la metà dei dati simulati così da avere la possibilità di confrontarli correttamente con i dati misurati, estesi in un solo verso angolare (cfr figura 18, pannello a sinistra).

Il test ha dato esito negativo, non essendo stato in grado di prevedere correttamente la posizione della sorgente in 0. Questo tuttavia è un risultato che non deve sorprendere e che può essere massimamente imputato al fatto che, come già evidenziato, la presa dati ha avuto luogo in un solo verso. Se infatti si ripetesse quanto fatto considerando solo metà dei dati raccolti in assenza dell'assorbitore, si otterrebbe un risultato incompatibile con la posizione misurata della sorgente, come mostrato, per esempio, dalla figura 19.



(a) Sovrapposizione degli istogrammi normalizzati simulati e misurati per H_2O



(b) Il funzionale Q^2 per H_2O

Figura 18: Ricerca della posizione della sorgente con interposizione di acqua

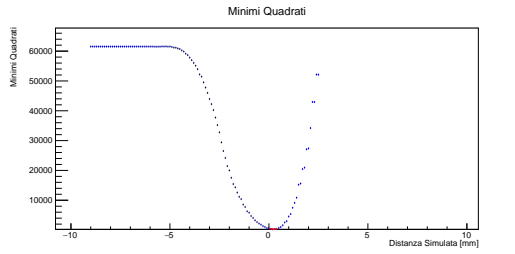


Figura 19: Il funzionale minimi quadrati per i dati simulati e misurati in assenza di assorbitore cui sono stati rimossi i conteggi effettuati ad angoli positivi

in maniera asimmetrica.

7 Conclusioni

Il lavoro svolto ha permesso di caratterizzare un apparato per la PET che può essere utilizzato per ricostruire la posizione di una sorgente radioattiva posta lungo una direzione nota.

Questo è stato possibile sviluppando un complesso sistema di simulazione Montecarlo per la creazione di un database con il quale confrontare i dati raccolti con quelli generati minimizzando il funzionale dei minimi quadrati.

Il metodo sviluppato permette di individuare con successo, per mezzo di una relazione lineare, la posizione della sorgente. E' stato individuato un *bias* dell'ordine del millimetro, probabilmente legato ad un cattivo allineamento degli strumenti di misura utilizzati per determinare la posizione della sorgente.

Si è cercato di estendere questo metodo anche a misure effettuate in presenza di un assorbitore. Non è stato tuttavia possibile verificarne la correttezza per via di un numero limitato di dati raccolti