Note di matematica
Cenni di logica e calcolo proposizionale

Giuseppe Vittucci Marzetti*

2 ottobre 2019

1 I connettivi logici

I *connettivi logici* sono congiunzioni o locuzioni con cui è possibile comporre tra loro due o più *proposizioni* (o *enunciati*), dando origine a una nuova proposizione.[1]

Il nuovo enunciato ha un *valore di verità* – vero (V) o falso (F)[2] – che dipende dal valore di verità delle proposizioni che la compongono e dai connettivi logici. Le regole logiche sono sintetizzate nelle *tavole* (o *tabelle*) *di verità* (Tabella 1).

Congiunzione La congiunzione è un connettivo logico *binario*, cioè operante su due enunciati. Si indica col simbolo $\wedge$ (letto "e").

Un enunciato composto col connettivo di congiunzione è vero se e solo se sono veri entrambi gli enunciati che lo compongono.

Disgiunzione inclusiva La disgiunzione inclusiva è un connettivo logico binario. Si indica con il simbolo $\vee$ (letto "o").

Un enunciato composto col connettivo di disgiunzione inclusiva è vero se e solo se è vero almeno uno tra gli enunciati che lo compongono.

Disgiunzione esclusiva La disgiunzione esclusiva è un connettivo logico binario. Si indica in genere con il simbolo $\dot{\vee}$ (letto "xor").

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, 20126 Milano, Tel.: +39 02 64487457, Fax: +39 02 64487561. Email: giuseppe.vittucci@unimib.it

[1] Se l'enunciato composto è sempre vero solo in virtù della sua particolare struttura si parla di *tautologia*. Se invece è sempre falso in virtù della sua particolare struttura si parla di *contraddizione*.

[2] Nell'*algebra booleana*, quel ramo dell'algebra in cui i valori delle variabili sono valori di verità (vero o falso), "vero" è spesso indicato con 1 e "falso" con 0.

p	q	$\overline{p}$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \dot{\vee} q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
V	V	F	V	V	F	V	V
V	F	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F
F	F	V	F	F	F	V	V

Tabella 1: Tavole della verità

Un enunciato composto col connettivo di disgiunzione esclusiva è vero solo se le due proposizioni che lo compongono hanno valore di verità opposto.

Negazione La negazione è un connettivo logico *unario*, cioè operante su una sola proposizione. Si indica col simbolo $\neg$ o con una barra orizzontale sulla proposizione che si vuole negare (letto "non").

Dato un enunciato p, la sua negazione ($\neg p$ o $\overline{p}$) ha valore di verità opposto.

Implicazione L'*implicazione materiale* è un connettivo logico binario. Si indica con il simbolo $\rightarrow$ (letto "implica").

Dati due enunciati p e q, la proposizione composta $p \rightarrow q$ (letto: "se p allora q" o "p implica q") è falsa solo se la prima proposizione è vera e la seconda è falsa.[3]

Coimplicazione La *doppia implicazione materiale* è un connettivo logico binario. Si indica con il simbolo $\leftrightarrow$ (letto "se e solo se").

Un enunciato composto col connettivo logico di doppia implicazione è vero solo se i due enunciati di partenza hanno lo stesso valore di verità.

Se un enunciato composto è formato da più di due proposizioni unite da connettivi logici diversi, per determinarne il valore di verità si seguono le seguenti *regole di precedenza*:

i) negazione;

ii) congiunzione

iii) disgiunzione;

iv) implicazione;

v) coimplicazione.

[3] L'implicazione $p \rightarrow q$ è falsa solo quando p è vera e q è falsa, mentre è vera in tutti gli altri casi, anche se gli enunciati p e q sono disconnessi.

2 L'implicazione logica

L'implicazione è un legame tra proposizioni che mette in relazione i valori di verità di due enunciati, chiamati *antecedente* e *conseguente*.

Dall'implicazione materiale, il connettivo logico già discusso e indicato con il simbolo $\rightarrow$, va distinta l'implicazione logica.

L'*implicazione logica*, indicata con il simbolo $\Rightarrow$, non è un connettivo logico ed esprime una relazione tra *predicati*, ovvero enunciati che dipendono da una o più variabili, appartenenti a un determinato dominio.[4]

Dati due predicati $p(x)$ e $q(x)$, se ogni valore di x che rende vero $p(x)$ rende vero anche $q(x)$, si dice che $p(x)$ implica logicamente $q(x)$:

$$p(x) \Rightarrow q(x) \tag{1}$$

Se vale l'implicazione logica (1) si dice che:

- $p(x)$ è *condizione sufficiente* per il verificarsi di $q(x)$;
- $q(x)$ è *condizione necessaria* per il verificarsi di $p(x)$.

Se invertendo i due predicati $p(x)$ e $q(x)$ si ottiene un'ulteriore implicazione logica, ossia se

$$p(x) \Rightarrow q(x) \qquad \text{e} \qquad q(x) \Rightarrow p(x) \tag{2}$$

i due predicati sono logicamente equivalenti e si usa la notazione:

$$p(x) \Leftrightarrow q(x) \tag{3}$$

In tal caso si dice che $p(x)$ è condizione necessaria e sufficiente per il verificarsi di $q(x)$.

3 Alcuni principi e leggi notevoli della logica delle proposizioni

Principio di identità

$$p \rightarrow p$$

$$p \equiv p$$

(letto: p è *equivalente* a p)

[4] Nei predicati il valore di verità dipende dal valore della variabile. Esempio "$p(x)$: x è un triangolo, con x appartenente all'insieme delle figure piane" è un predicato che può essere vero o falso in base ad x.

Nel caso in cui $p(x) \rightarrow q(x)$ è un predicato vero qualsiasi sia il valore della x, allora si possono usare indistintamente i simboli di implicazione materiale e implicazione logica.

Principio del terzo escluso

$$p \vee \overline{p}$$

Principio di non contraddizione

$$\overline{p \wedge \overline{p}}$$

Legge della doppia negazione

$$p \equiv \overline{\overline{p}}$$

Proprietà commutativa

$$p \wedge q \equiv q \wedge p$$

$$p \vee q \equiv q \vee p$$

Proprietà associativa

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

Proprietà distributiva

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

Leggi di De Morgan

$$\overline{p \vee q} \equiv \bar{p} \wedge \bar{q}$$

$$\overline{p \wedge q} \equiv \bar{p} \vee \bar{q}$$

Legge di trasposizione (o di contrapposizione)

$$(p \to q) \equiv (\bar{q} \to \bar{p})$$

Principi della riduzione all'assurdo (*reductio ad absurdum*)

$$(p \to \bar{p}) \to \bar{p}$$

$$\big(p \to (q \wedge \bar{q})\big) \to \bar{p}$$

Leggi del sillogismo

$$(p \to q) \to \Big((q \to r) \to (p \to r)\Big)$$

$$(q \to r) \to \Big((p \to q) \to (p \to r)\Big)$$

$$\Big((p \to q) \wedge (q \to r)\Big) \to (p \to r)$$