Laboratorio Didattico

Parabole e (Dis)Equazioni

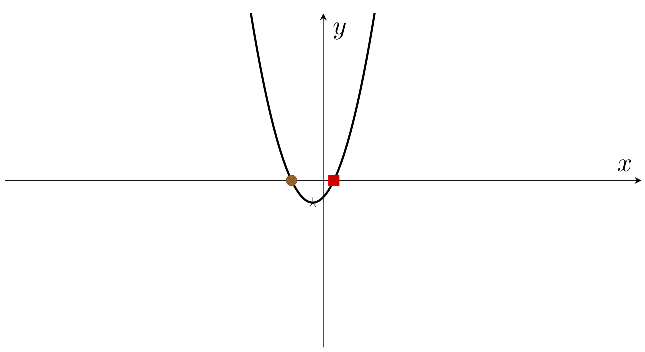
Esercizio 1 *Risolvere sia algebricamente sia graficamente l'quazione*

1. $3x^2 + 2x - 1 = 0$;

Svolgimento:

(*A*) *Dato che* $a = 3, b = 2, c = -1$ *e* $\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 3 = 16$ *si hanno due soluzioni distinte* $x_1 = \frac{1}{3}$ *e* $x_2 = -1$

(*G*) *Le soluzioni di* $3x^2 + 2x - 1 = 0$ *determinano l'ascissa dei punti di intersezione della parabola* $y = 3x^2 + 2x - 1$ *e l'asse delle ascisse. Quindi si deve disegnare la parabola* $y = 3x^2 + 2x - 1$ *nel piano cartesiano ed evidenziare i punti di intersezione.*



N.B. *Per disegnare la parabola ci serve determinare il vertice*

$$V = (-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}) = (-\frac{1}{3}, -\frac{4}{3})$$

Esercizio 2 *Risolvere sia algebricamente sia graficamente le seguenti disequazioni di secondo grado:*

1. $4x^2 - 5x + 6 \leq 7x - 3$;

   Svolgimento:

(A) $4x^2 - 5x + 6 \leq 7x - 3 \Leftrightarrow 4x^2 - 12x + 9 \leq 0$.

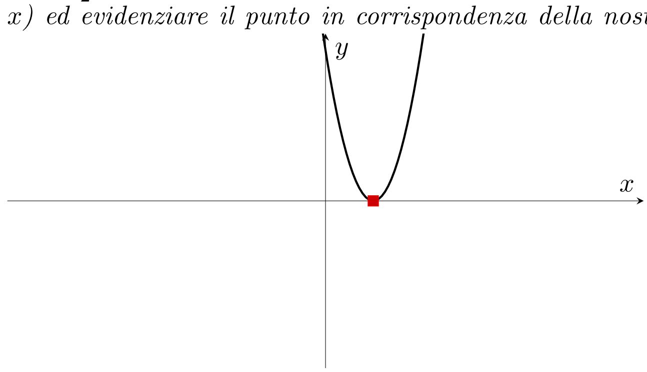
Dato che $a = 4, b = -12, c = +9$ *e* $\Delta = b^2 - 4ac = 144 - 4 \cdot 36 = 0$ *si hanno due soluzioni coincidenti* $x_1 = x_2 = \frac{3}{2}$ *della equazione* $4x^2 - 12x + 9 = 0$. *Quindi il polinomio* $4x^2 - 12x + 9$ *non cambia mai di segno. In particolare, è sempre positivo al variare di* x *e quindi la soluzione di* $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$ *è data dal solo* $x = \dfrac{3}{2}$.

Infatti, si vede chiaramente dalla seguente scomposizione

$$4x^2 - 12x + 9 = a(x - x_1)^2 = 4(x - \frac{3}{2})^2$$

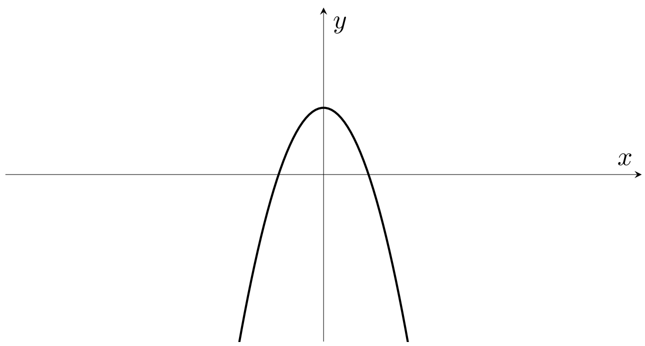
che è sempre positivo al variare di x.

(G) *Le soluzioni di* $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$ *determinano l'ascissa dei punti in cui il grafico della la parabola* $y = 4x^2 - 12x + 9$ *si trova non al di sopra dell'asse* x. *Quindi si deve prima disegnare la parabola* $y = 4x^2 - 12x + 9$ *nel piano cartesiano (che avrà come vertice il punto* $V = (\frac{3}{2}, 0)$ *e ci aspettiamo che non si trovi mai al di sotto dell'asse* x*) ed evidenziare il punto in corrispondenza della nostra soluzione.*



2. *Risolviamo* $-2x^2 + 4 \geq y$.

Essendo una disequazione di secondo grado in 2 incognite procediamo con la sola risoluzione grafica. Quindi disegnamo la parabola associata $y = -2x^2 + 4$. *Per disegnarla ci servono 3 punti, quindi prenderemo il vertice e altri due punti arbirari. Dato che* $a = -2, b = 0, c = 4$ *e* $\Delta = 32$ *abbiamo* $V = (0, 4)$*; in aggiunta scelgo i punti* $P = (-1, 2)$ *e* $Q = (1, 2)$ *arbitrari e disegno la parabola passante per questi 3 punti con vertice* V. *Le soluzioni della disequazione* $-2x^2 + 4 \geq y$ *sono date da quella porzione di piano che si trova al di sotto della parabola, e la evidenzio:*

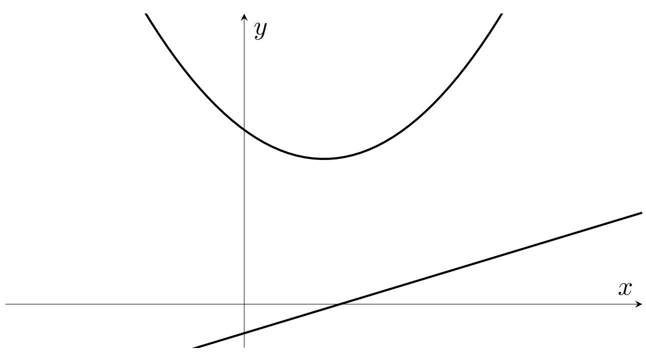


Esercizio 3 *Risolvere graficamente i seguenti sistemi:*

1. $\begin{cases} 2x^2 - 4x + 12 \leq y \\ 5x - 3y \geq 6 \end{cases}$

   Svolgimento: *Dato che mi serve la rappresentazione grafica, riscrivo il sistema di disequazioni ponendo in evidenza la variabile y. Il sistema quindi diventa* $\begin{cases} y \geq 2x^2 - 4x + 12 \\ y \leq \frac{5}{3}x - 2 \end{cases}$

   La disequazione $y \leq 2x^2 - 4x + 12$ mi richiede di evidenziare la porzione di piano che si trova al di sopra della parabola $y = 2x^2 - 4x + 12$, mentre la disequazione $y \leq \dfrac{5}{3}x - 2$ mi richiede di evidenziare la porzione di piano al di sotto della retta $y = \frac{5}{3}x - 2$. La soluzione del sistema sarà la intersezione delle due aree e quindi l'insieme vuoto.



2. $\begin{cases} 2x + 4y = 8 \\ x \geq 2 \end{cases}$

   Svolgimento: *Dato che mi serve la rappresentazione grafica, riscrivo il sistema di disequazioni ponendo in evidenza la variabile y dove possibile. Il sistema quindi diventa* $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \\ x \geq 2 \end{cases}$

L'equazione $y = \frac{1}{2}x + 2$ *è una retta, mentre* $x \geq 2$ *descrive la porzione di piano che si trova a destra della retta* $x = 2$ *quindi la soluzione del sistema sará la porzione della retta* $y = \frac{1}{2}x + 2$ *che si trova a destra della retta* $x = 2$.