ESERCIZIO 1

$$f(x,y) = \int_1^x \log\sqrt{t}\, dt + x e^y \qquad (1,0)$$

f è definita su $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x e^y \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = 1 \neq 0.$$

Per il Teorema del Dini (Funzione Implicita):

$\exists (a,b),(c,d) \subset \mathbb{R}$ con $1 \in (a,b)$, $0 \in (c,d)$, $(a,b)\times(c,d) \subseteq \Omega$ t.c.

$\forall x \in (a,b) \quad \exists !\, y =: \varphi(x) \in (c,d) \; : \; f(x, \varphi(x)) = 0.$

Dunque $\forall x \in (a,b)$

$$0 = f(x, \varphi(x)) = \int_1^x \log\sqrt{t}\, dt + x e^{\varphi(x)}.$$

Derivo:

$\varphi(1)=0$

$$(*) \quad 0 = \log\sqrt{x} + e^{\varphi(x)} + x\varphi'(x) e^{\varphi(x)} \Rightarrow \varphi'(1) = -1$$

$\Rightarrow$ la retta tangente al grafico di $y = \varphi(x)$ nel punto $(1,0)$ è $y = -x+1$.

Derivo $(*)$:

$$0 = \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} + \varphi'(x)e^{\varphi(x)} + \varphi'(x)e^{\varphi(x)} + x\varphi''(x)e^{\varphi(x)} + $$
$$+ x[\varphi'(x)]^2 e^{\varphi(x)}$$

e, valutando in $x=1$, trovo:

$$0 = \frac{1}{2} + (-1) + (-1) + \varphi''(1) + 1 \quad \Rightarrow \varphi''(1) = \frac{1}{2} > 0.$$

Quindi, in un intorno di $x=1$, $\varphi(x)$ ha concavità positiva (è convessa).

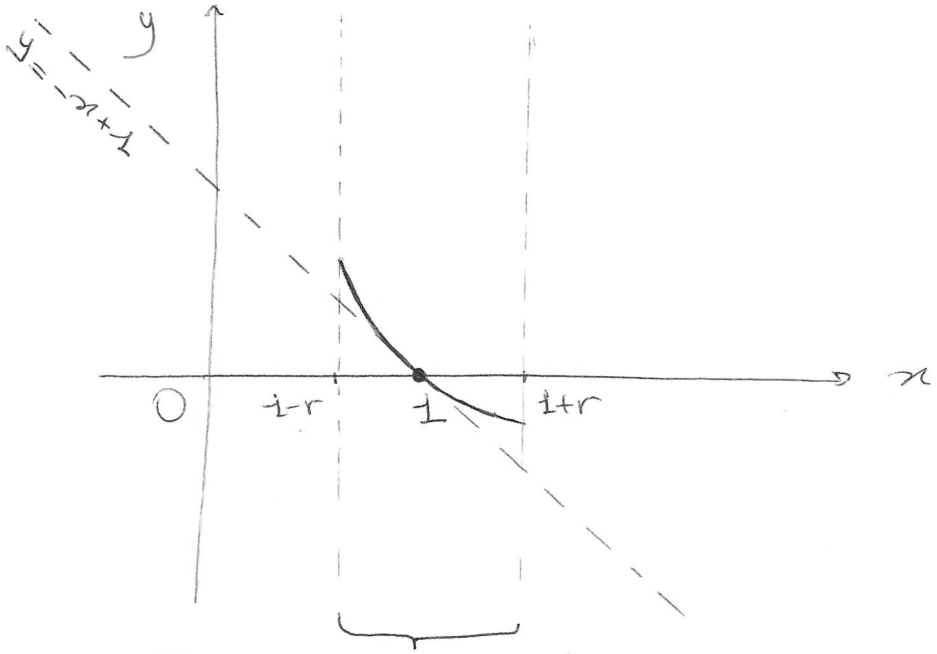

Grafico della funzione implicita $y = \varphi(x)$ in un intorno $B((1,0),r)$ di $(1,0)$ di raggio $r>0$ opportunamente piccolo. ■

ESERCIZIO 2 $\quad F(x,y,z) := e^{x^2-1} - e^{yz} - y + 1.$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y,z) = -ze^{yz} - 1 \implies \frac{\partial F}{\partial y}(1,1,0) = -1 \neq 0.$$

Per il teorema della funzione implicita (Dini):
$\exists A, B, C \subset \mathbb{R}$ aperti con $1 \in A, 1 \in B, 0 \in C$ t.c.
$\forall (x,z) \in A \times C \quad \exists!\, y =: f(x,z) \in B \ : \ F(x, f(x,z), z) = 0.$

Quindi
$$0 = F(x, f(x,z), z) = e^{x^2-1} - e^{f(x,z)z} - f(x,z).$$

Derivo rispetto a x:
$$0 = 2xe^{x^2-1} - \frac{\partial f}{\partial x}(x,z) \cdot z e^{f(x,z)z} - \frac{\partial f}{\partial x}(x,z).$$

Valuto in $(x,z) = (1,0)$:
$$0 = 2 - \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) \implies \frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 2 \neq 0.$$

PER ASSURDO: se $(1,0)$ fosse punto di massimo relativo per la funzione $y = f(x,z)$ allora $(1,0)$ sarebbe punto critico per f (perché f è di classe $\mathcal{C}^1$, essendo F di classe $\mathcal{C}^1$). In particolare, si avrebbe
$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = 0. \quad \text{ASSURDO}.$$

Quindi $(1,0)$ <u>non</u> è punto di massimo relativo per f. ■

$\boxed{\text{ESERCIZIO 3}}$

$\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ intorno aperto di $(0,1,0)$

$$F : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} F_1(x,y,z) \\ F_2(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + \int_1^y \sqrt{t}\, e^{t^2}\, dt + xyz \\ \ln y + e^z - 1 + x^4 - 2z + xz \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Jac}_{(x,y,z)}(F) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x + yz & \sqrt{y}\, e^{y^2} + xz & xy \\ 4x^3 + z & \frac{1}{y} & e^z - 2 + x \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Jac}_{(0,1,0)}(F) = \begin{bmatrix} 0 & e & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & e \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} e & 0 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = -e \neq 0 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$ Dal teorema delle funzioni implicite,

$\exists\, U \subseteq \mathbb{R}$, $V \subseteq \mathbb{R}^2$ aperti, $0 \in U$, $(1,0) \in V$

t.c. $\forall x \in U$ $\exists!\, (y,z) \in V$: $F(x,y,z) = 0$.

Definiamo $\varphi(x) := (y,z)$ ossia

$$(y,z) = (y(x), z(x)) = \varphi(x).$$