Università di Milano Bicocca

CdL Tecnici di radiologia medica, Tecnici di laboratorio biomedico ed Igiene dentale

FISICA APPLICATA (FISICA GENERALE)

aa. 2019/2020

Dr. Panizza Denis

Unità Operativa di Fisica Sanitaria
ASST Monza - Azienda Ospedaliera San Gerardo
tel: +39 039 233 3205
e-mail: d.panizza@asst-monza.it
denis.panizza@unimib.it

Libro di testo consigliato:

F. Borsa, A. Lascialfari, "Principi di Fisica per indirizzo biomedico e farmaceutico", ed. Edises

RICHIAMI DI MATEMATICA

- **Relazioni, formule, leggi**

uguaglianze fra grandezze fisiche espresse tramite simboli letterari $\Rightarrow$ $\mathbf{F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}}$

ogni lettera assume un valore numerico che permette
di calcolare una qualsiasi grandezza incognita

$\mathbf{F = G\frac{m_1 m_2}{r^2}}$ oppure $\mathbf{m_2 = \frac{r^2\,F}{G\,m_1}}$

RICHIAMI DI MATEMATICA

$$\mathbf{F} = \mathbf{G}\frac{\mathbf{m_1 m_2}}{\mathbf{r^2}}$$

Proporzionalità:

$$\mathbf{F} \propto \mathbf{m_1}$$

$$\mathbf{F} \propto \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{r^2}}$$

Inverso di $\mathbf{r^2}$: $\dfrac{\mathbf{1}}{\mathbf{r^2}}$

F inversamente proporzionale a $\mathbf{r^2}$

RICHIAMI DI MATEMATICA

- **Proporzioni**

$$\boxed{a : b = c : d} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{a \cdot d = c \cdot b}$$

Esempio: conversione da **mmHg** a **barie**

Dati: 1 atmosfera = 760 mmHg = 10^6 barie = 10^5 Pa

$$x \text{ mmHg} : y \text{ barie} = 760 \text{ mmHg} : 10^6 \text{ barie}$$

$$x \text{ mmHg} = \frac{y \text{ barie} \cdot 760 \text{ mmHg}}{10^6 \text{ barie}} \qquad y \text{ barie} = \frac{x \text{ mmHg} \cdot 10^6 \text{ barie}}{760 \text{ mmHg}}$$

RICHIAMI DI MATEMATICA

- **Proporzioni**

$$\boxed{a : b = c : d} \Longrightarrow \boxed{a \cdot d = c \cdot b}$$

Esempio: conversione da **lire** a **euro**

Dati: 1 euro = 1936,27 lire

$$x \text{ lire} : y \text{ euro} = 1936{,}27 \text{ lire} : 1 \text{ euro}$$

$$x \text{ lire} = \frac{y \text{ euro} \cdot 1936{,}27 \text{ lire}}{1 \text{ euro}} \qquad y \text{ euro} = \frac{x \text{ lire} \cdot 1 \text{ euro}}{1936{,}27 \text{ lire}}$$

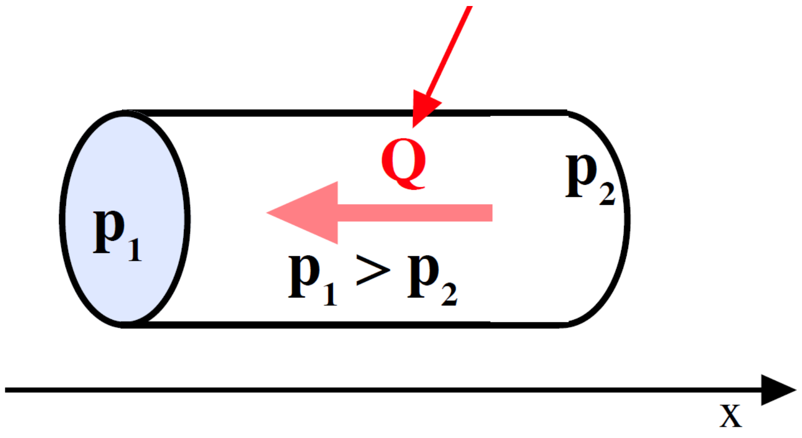
RICHIAMI DI MATEMATICA

variazione $a_2 - a_1 = \Delta a$

differenza $a_1 - a_2 = -\Delta a$

Variazione di pressione tra estremità di un vaso:

80 mmHg – 120 mmHg = – 40 mmHg



RICHIAMI DI MATEMATICA

- **Potenze**

$$N = a^n$$

esponente

base

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad 2^3\ 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 2 .2 .2 .2 .2 .2 .2 = 128$$

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad \frac{2^3}{2^4} = 2^{3-4} = 2^{-1} = \frac{1}{2} = 0.5$$

$$(a^n)^r = a^{n\,r} \qquad (2^3)^2 = 2^{3\cdot 2} = 2^6 = 2 .2 .2 .2 .2 .2 = 64$$

radici

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{2^3} = \sqrt{8} = 2.83$$

$$\left[\frac{a}{b}\right]^n = \frac{a^n}{b^n} = a^n\, b^{-n} \qquad \left[\frac{2}{3}\right]^3 = 2^3\, 3^{-3} = \frac{8}{27} = 0.296$$

potenze di 10

$$N = 602000000000000000000000$$

$$= 6.02\ 10^{23}$$

$$1 = 10^0$$

$$0.1 = 10^{-1}$$

$$0.01 = 10^{-2}$$

$$0.001 = 10^{-3}$$

RICHIAMI DI MATEMATICA

- **Logaritmi**

$$\boxed{\log_a N = n} \qquad N = a^{n}$$

esponente

base

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a\left(\frac{N}{M}\right) = \log_a N - \log_a M$$

$$\log_a (N \cdot M) = \log_a N + \log_a M$$

$$\log_a N^m = m \log_a N$$

logaritmi in base 10 : $\log_{10} N \equiv \mathrm{Log}\, N$

logaritmi in base *e* : $\log_e N \equiv \ln N$

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 2.718 \ldots$$

$$\ln a = \ln 10 \cdot \mathrm{Log}\, a$$

$$\mathrm{Log}\, a = \mathrm{Log}\, e \cdot \ln a$$

RICHIAMI DI MATEMATICA

- **Equazioni**

1° grado $a\,x + b = 0$ $\qquad x = -\dfrac{b}{a}$

2° grado $a\,x^2 + b\,x + c = 0$

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2\,a}$$

Sistemi lineari di equazioni

$$\begin{cases} a\,x + b\,y + k = 0 \\ c\,x + d\,y + h = 0 \end{cases}$$

RICHIAMI DI MATEMATICA

- Equazioni

esempio semplice

$$\begin{cases} 2x - 3y + 15 = 0 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$$

$x = 2y$

$2 \cdot 2y - 3y + 15 = 0$

$4y - 3y + 15 = 0$

$y + 15 = 0 \longrightarrow y = -15 \quad x = 2y = -30$

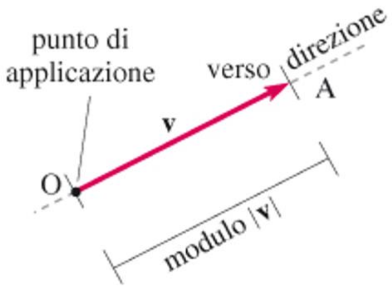
Sistemi lineari di equazioni

$$\begin{cases} a\,x + b\,y + k = 0 \\ c\,x + d\,y + h = 0 \end{cases}$$

GRANDEZZE SCALARI E GRANDEZZE VETTORIALI

Nel caratterizzare una grandezza fisica mediante la sua misura non sempre è sufficiente dare un unico numero che rappresenti il rapporto tra la grandezza data e quella campione scelta come unità di misura. Consideriamo per esempio la velocità.

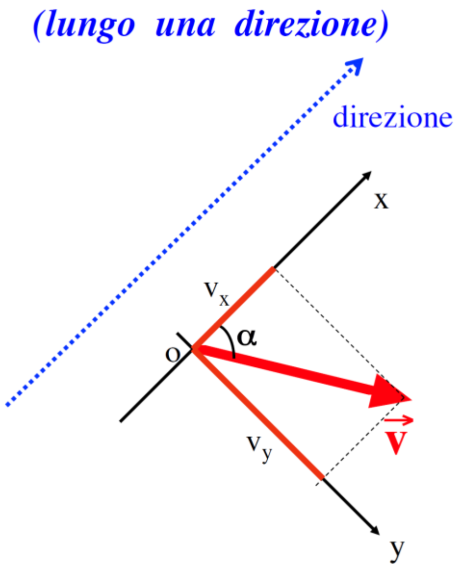
Definiamo ***grandezze scalari*** quelle grandezze che, stabilita una unità di misura, sono completamente caratterizzate da un numero che rappresenta il rapporto tra la grandezza considerata e l'unità di misura. Definiamo invece ***grandezza vettoriale*** una grandezza per definire la quale bisogna dare, oltre a un ***numero (modulo del vettore)***, anche una ***direzione*** e un ***verso***. Sono grandezze scalari, per esempio, il volume, la massa, l'energia; sono grandezze vettoriali lo spostamento, la velocità, l'accelerazione, la forza e così via.



Una rappresentazione intuitivamente efficace è quella geometrica: essa consiste nel rappresentare un vettore mediante un segmento orientato, la cui direzione e verso sono quelli della grandezza vettoriale e la cui lunghezza è proporzionale al modulo del vettore, ossia all'intensità della grandezza stessa. Talvolta è necessario specificare anche il punto di applicazione del vettore.

COMPONENTE DI UN VETTORE

$$\mathbf{v} = \vec{\mathrm{v}} \begin{cases} \text{modulo}|\mathbf{v}| \\ \text{direzione} \\ \text{verso} \end{cases}$$

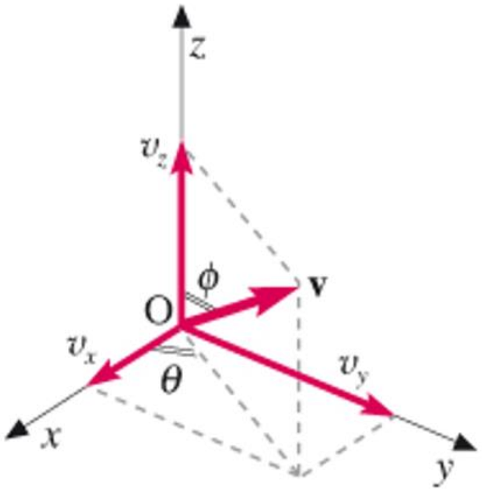


$$v_y = v \sin \alpha$$

$$v_x = v \cos \alpha$$

$$v_x^2 + v_y^2 = v^2 \sin^2 \alpha + v^2 \cos^2 \alpha =$$

$$= v^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = v^2$$



Un vettore **v** è individuato da un insieme di tre numeri, ad esempio le 3 coordinate cartesiane v_x, v_y e v_z del punto estremo del vettore (quello col simbolo di freccia), avendo posizionato l'altro estremo all'origine (punto O) del sistema di riferimento cartesiano (costituito dai tre assi **x**, **y**, **z**). v_x, v_y e v_z vengono indicate come le componenti o "proiezioni" del vettore lungo i tre assi coordinati.

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

VERSORE

$\vec{n}$ = direzione e verso

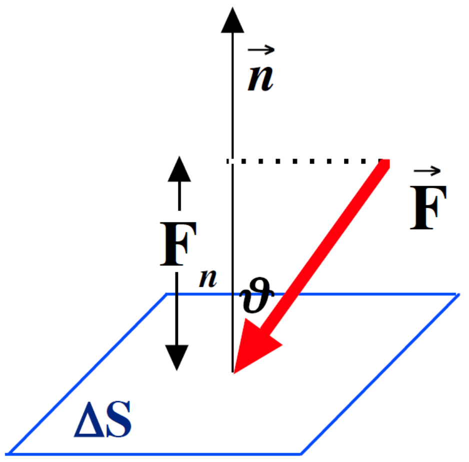
$$\vec{n} = \frac{\vec{v}}{v} \begin{cases} \text{modulo} = 1 \\ \text{direzione } \vec{v} \\ \text{verso } \vec{v} \end{cases}$$

Esempio: componente di un vettore

$$F_n = F \cos \vartheta$$

prodotto scalare fra il vettore forza $\vec{F}$ e il versore $\vec{n}$

$$\boxed{F_n = \vec{F} \cdot \vec{n} = F \cos \theta}$$



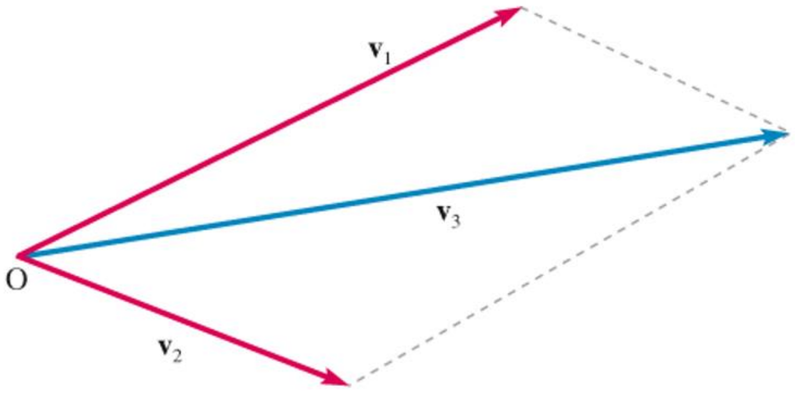
OPERAZIONI SUI VETTORI

Nel calcolo vettoriale vengono definite le operazioni sui vettori. Queste operazioni e le loro modalità di esecuzione permettono di esprimere in maniera relativamente semplice numerose definizioni e leggi fisiche in cui intervengono quantità vettoriali.

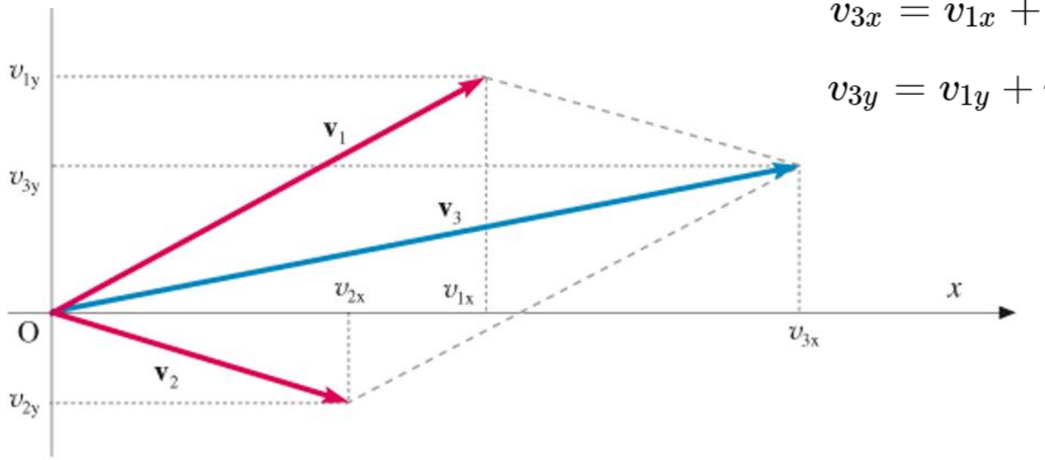
SOMMA DI VETTORI

Consideriamo due vettori aventi lo stesso punto di applicazione (origine). Se i vettori non hanno la stessa origine, uno di essi (o entrambi) verrà trasportato parallelamente a se stesso fino a che le origini coincidano. Dati i due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, la loro ***somma*** è data dal vettore $\mathbf{v}_3$ costruito sulla diagonale principale del parallelogramma che ha per lati $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

La somma vettoriale si può eseguire anche tramite le componenti dei vettori rispetto ad un determinato sistema di riferimento.



Somma di due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ con metodo grafico



$$v_{3x} = v_{1x} + v_{2x}$$

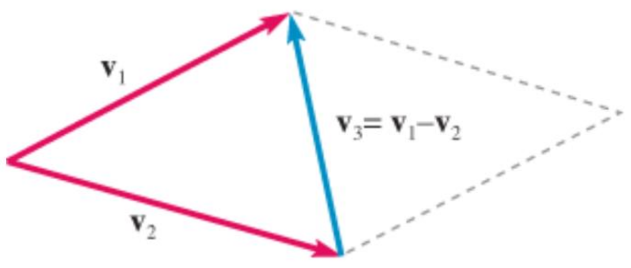
$$v_{3y} = v_{1y} + v_{2y}$$

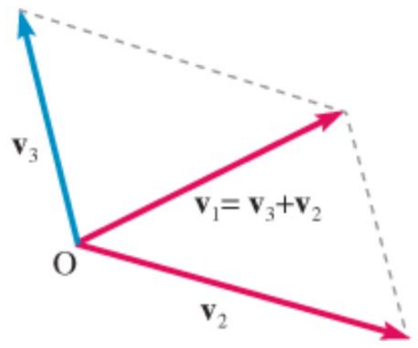
Somma di due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ con metodo analitico (somma delle coponenti omologhe)

DIFFERENZA DI VETTORI

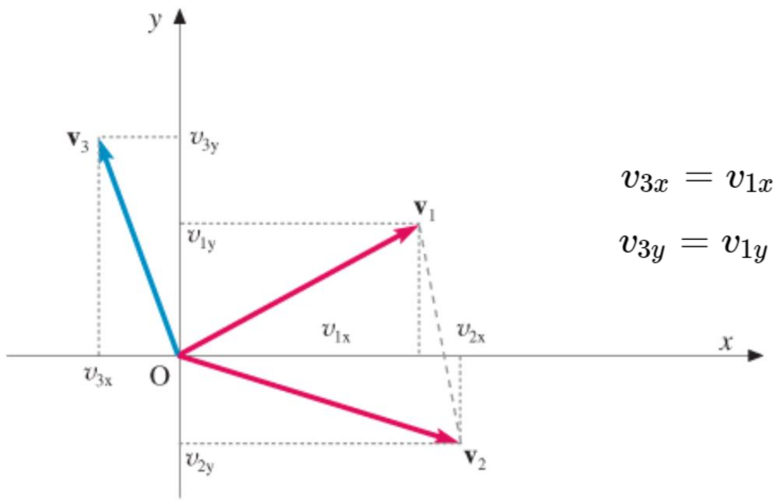
La ***differenza*** tra i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ è data dal vettore $\mathbf{v}_3$ che, sommato a $\mathbf{v}_2$, fornisce il vettore $\mathbf{v}_1$: $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$ e quindi $\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Il vettore differenza è rappresentato dall'altra diagonale del parallelogramma di lati $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$.

NB: se il vettori $\mathbf{v}_3$ avesse verso opposto, la somma $\mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2$ non sarebbe il vettore $\mathbf{v}_1$





Operando sulle componenti si può eseguire la differenza di due vettori prendendo semplicemente la differenza delle componenti corrispondenti. La somma di due vettori di uguale modulo e verso opposto ha le componenti uguali a zero (vettore nullo).



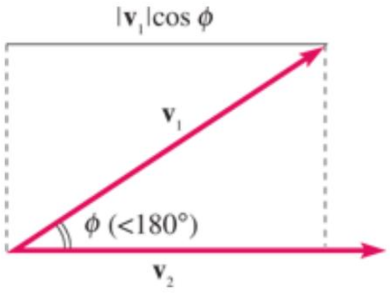
$$v_{3x} = v_{1x} - v_{2x}$$

$$v_{3y} = v_{1y} - v_{2y}$$

PRODOTTO SCALARE E PRODOTTO VETTORIALE

Il prodotto di due vettori può venire definito in modo da dare luogo a una quantità scalare oppure ad una quantità vettoriale. Nel primo caso il prodotto si dice ***scalare*** e nel secondo ***vettoriale***.
Dati due vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ si definisce ***prodotto scalare*** dei due vettori la quantità scalare che si ottiene moltiplicando fra loro i moduli dei due vettori e moltiplicando questo prodotto per il ***coseno*** dell'angolo ϕ formato dai due vettori:

$$\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = v_1\, v_2 \cos\phi$$



Si può dimostrare che, in termini di componenti, il prodotto scalare di due vettori è dato da:

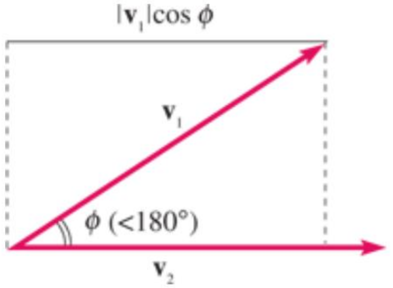
$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = v_{1x}v_{2x} + v_{1y}v_{2y} + v_{1z}v_{2z}$$

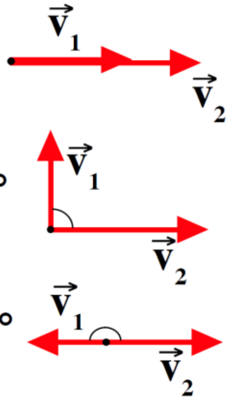
Il prodotto scalare gode delle proprietà ***commutativa*** e ***distributiva*** :

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_1 \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$$

PRODOTTO SCALARE E PRODOTTO VETTORIALE

Prodotto scalare $\mathbf{v_1} \cdot \mathbf{v_2} = v_1\, v_2 \cos\phi$





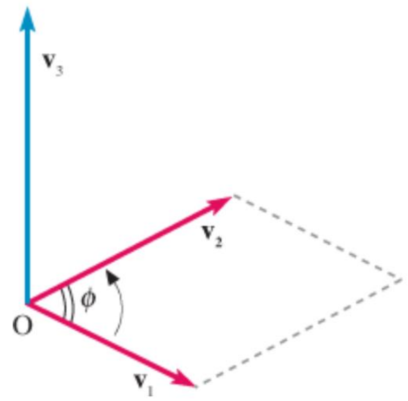
$\phi = 0$ $\qquad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos\phi = v_1 v_2$

$\phi = 90°$ $\qquad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos\phi = 0$

$\phi = 180°$ $\qquad \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2 = v_1 v_2 \cos\phi = - v_1 v_2$

Il **prodotto vettoriale** di due vettori $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ è un vettore $\mathbf{v_3}$ così definito: il **modulo** di $\mathbf{v_3}$ è dato dal prodotto dei moduli di $\mathbf{v_1}$ e $\mathbf{v_2}$ per il seno dell'angolo ϕ compreso tra i due vettori (cioè dall'area del loro parallelogramma):

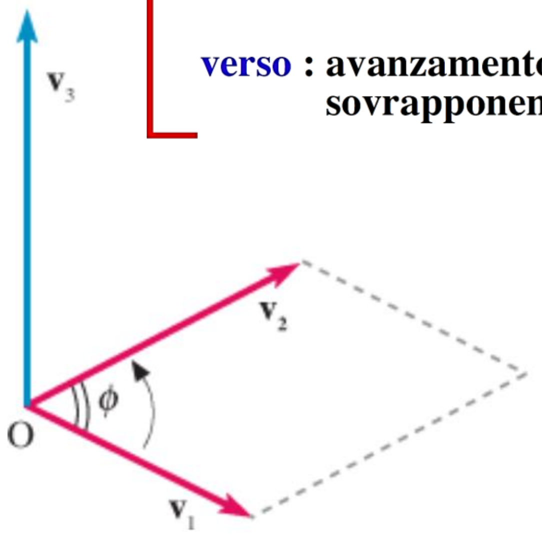
$$|v_3| = v_1\, v_2 \sin\phi$$



PRODOTTO SCALARE E PRODOTTO VETTORIALE

La **direzione** di $\mathbf{v_3}$ è quella della perpendicolare al piano del parallelogramma e il **verso** è scelto per convenzione in modo da coincidere col verso di avanzamento di una vite che ruoti sovrapponendo il primo vettore del prodotto $\mathbf{v_1}$ sul secondo, descrivendo un angolo inferiore a 180°. Il **prodotto vettoriale** si indica $\mathbf{v_1} \wedge \mathbf{v_2} = \mathbf{v_3}$

$\mathbf{v_3}$:
- **modulo** $|\mathbf{v_3}| = \mathbf{v_1}\, \mathbf{v_2}$ **sen** ϕ
- **direzione** $\perp\ \mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}$
- **verso : avanzamento vite che ruota sovrapponendo** $\mathbf{v_1}$ **su** $\mathbf{v_2}$



Si dimostra che la definizione di prodotto vettoriale equivale alla seguente definizione in termini di componenti:

$$v_{3x} = v_{1y}v_{2x} - v_{2y}v_{1z}$$

$$v_{3y} = v_{2x}v_{1z} - v_{1x}v_{2z}$$

$$v_{3z} = v_{1x}v_{2y} - v_{2x}v_{1y}$$

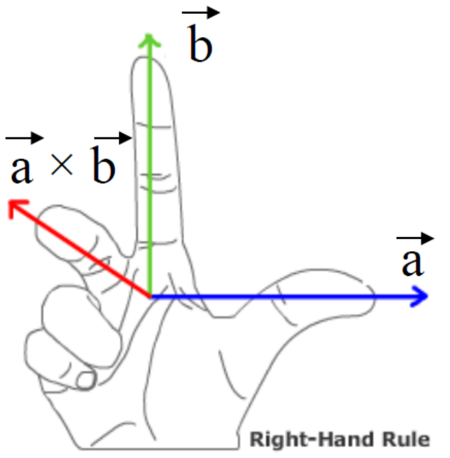
Si noti che il prodotto vettoriale di due vettori paralleli è uguale al vettore nullo (sen 0° = 0). Il prodotto vettoriale, per la definizione del verso del vettore risultante, non gode della proprietà commutativa. Infatti è: $\mathbf{v}_2 \wedge \mathbf{v}_1 = -\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2$

Il prodotto vettoriale gode comunque della proprietà distributiva rispetto alla somma:

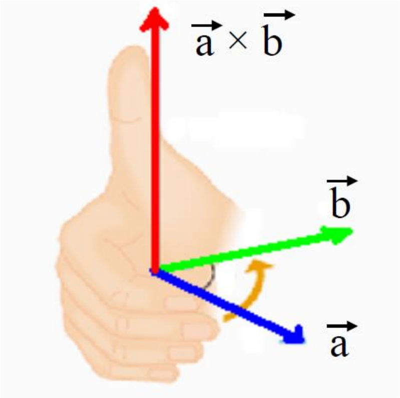
$$\mathbf{v}_1 \wedge (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_2) + (\mathbf{v}_1 \wedge \mathbf{v}_3)$$

REGOLA DELLA MANO DESTRA

- Prima formulazione
  - Si dispone il pollice lungo il primo vettore
  - Si dispone l'indice lungo il secondo vettore
  - Il verso del medio individua il verso del prodotto vettoriale



- Seconda formulazione
  - Si chiude a pugno la mano destra mantenendo sollevato il pollice
  - Le dita chiuse a pugno devono indicare il verso in cui il primo vettore deve ruotare per sovrapporsi al secondo in modo che l'angolo θ di rotazione sia minore di 180°
  - Il verso del pollice individua il verso del prodotto vettoriale



OPERAZIONI SUI VETTORI

Esercizio 1

Dati due vettori **A** (2,1) e **B** (4,7), dove tra parentesi sono riportate le componenti lungo l'asse x e lungo l'asse y rispettivamente, individuare le componenti del vettore **C** = **A** + **B**, il modulo del vettore **C** e l'angolo che esso forma con l'asse x .

Soluzione

Le componenti del vettore **C** sono date dalla somma delle rispettive componenti dei vettori **A** e **B** : $C_x = A_x + B_x = 2 + 4 = 6$ e $C_y = A_y + B_y = 1 + 7 = 8$.

Il modulo del vettore **C** e l'angolo che esso forma con l'asse x sono quindi:

$$C = \sqrt{C_x^2 + C_y^2} = \sqrt{36 + 64} = 10$$

$$\theta = \text{arctg}\frac{C_y}{C_x} = \text{arctg}\frac{8}{6} = \text{arctg } 1.33 = 53.1°.$$

OPERAZIONI SUI VETTORI

Esercizio 2

Individuare il vettore **M**, prodotto vettoriale tra i due vettori **A** e **B** dell'esempio precedente.

Soluzione

dato che i due vettori **A** e **B** non hanno componenti lungo l'asse z ,
cioè $A_z = B_z = 0$, abbiamo che $M_x = M_y = 0$ e:

$$M = M_z = A_x B_y - B_x A_y = (2 \cdot 7) - (4 \cdot 1) = 10$$

e la direzione e il verso sono quelli dell'asse z nella terna cartesiana.