Indice

Capitolo 0

Preliminari

In questo capitolo introduttorio vengono fornite alcune nozioni sulle misure, sul significato del loro valore numerico e sulla notazione con sui tali valori vengono riportati negli esercizi; si danno inoltre le convenzioni utilizzate per le unità di misura.

0.1 Errori di misura e cifre significative

In fisica ogni misura è affetta da errore che è dovuto alla mancanza di precisione dello strumento e alla mancanza di perizia dello sperimentatore: è facilmente immaginabile che la misura della stessa grandezza fisica dia risultati diversi se questa viene effettuata con strumenti diversi o da sperimentatori diversi. Per questo motivo in fisica le cifre che compaiono nel risultato numerico di una misura sono importanti; per esempio le seguenti misure della lunghezza ℓ

$$\ell_1 = 4.23\,\mathrm{m} \qquad , \qquad \ell_2 = 4.230\,\mathrm{m}$$

non sono uguali; la prima informa sulla misura effettuata fino al centimetro, la seconda fino al millimetro. La convenzione comunemente adottata è quella di considerare l'ultima cifra come affetta da errore e quindi incerta; in altre parole le due misure precedenti dicono che

$$4.22\,\mathrm{m} < \ell_1 < 4.24\,\mathrm{m} \qquad , \qquad 4.229\,\mathrm{m} < \ell_2 < 4.231\,\mathrm{m}\ .$$

Le cifre esatte e l'incerta, vengono dette *cifre significative* della misura. Eventuali cifre non significative non vanno esposte. Questo diviene particolarmente importante se un numero rappresenta il risultato di una misura indiretta, cioè se il valore è ottenuto da manipolazioni algebriche di misure ottenute direttamente dalla misura (per questo dette misure dirette). Si supponga di voler misurare la lunghezza di un tratto di strada costituito da due tratti rettilinei a e b; e che le misure della lunghezza dei due tratti, effettuate magari con metodi diversi, abbia dato i seguenti risultati:

$$a = 25.3\,\mathrm{m} \qquad , \qquad b = 14.21\,\mathrm{m}$$

cioè

$$25.2\,\mathrm{m} < a < 25.4\,\mathrm{m} \qquad , \qquad 14.20\,\mathrm{m} < b < 14.22\,\mathrm{m}\ ;$$

allora la lunghezza del tratto di strada è

$$39.40\,\mathrm{m} < a + b < 39.62\,\mathrm{m}\ .$$

Si vede cosí che la prima cifra decimale è incerta e quindi è l'ultima cifra significativa, la seconda cifra decimale quindi *non* è significativa e non va indicata nel risultato. La somma delle due grandezze va quindi approssimata all'ultima cifra significativa. Nel caso dell'esempio presente la somma delle due misure $a + b = 39.51\,\mathrm{m}$ va esposta nel modo seguente:

$$a + b = 39.5\,\mathrm{m}\ .$$

Tenendo conto di questo esempio, si addotta la seguente regola.

> *Nella somma e nella differenza di due misure l'ultima cifra significativa è l'ultima cifra significativa della misura meno precisa.*

Si supponga ora di dover misurare l'area di un terreno rettangolare; la misura delle lunghezze dei lati sono

$$a = 17.46\,\mathrm{m} \qquad , \qquad b = 9.33\,\mathrm{m}$$

cioè

$$17.45\,\mathrm{m} < a < 17.47\,\mathrm{m} \qquad , \qquad 9.32\,\mathrm{m} < b < 9.34\,\mathrm{m} \ .$$

L'area cercata è quindi

$$162.634\,\mathrm{m}^2 < a \cdot b < 163.1698\,\mathrm{m}^2 \ .$$

Si vede qui che la cifra delle unità è incerta e quindi è l'ultima cifra significativa. Il risultato della misura dell'area, $a \cdot b = 162.9018\,\mathrm{m}^2$, deve quindi essere approssimato alla cifra delle unità pertanto:

$$a \cdot b = 163\,\mathrm{m}^2 \ .$$

Si addotta quindi la seguente regola.

> *Nel prodotto e nel rapporto di due misure il numero di cifre significative del risultato è uguale e quello della misura che ne ha di meno.*

0.2 Notazione scientifica e ordine di grandezza

Con lo scopo di rendere immediatamente evidenti quali siano le cifre significative si una misura, è utile utilizzare la notazione scientifica; questa prescrive di indicare un numero mediante un coefficiente compreso fra 1 e 10 moltiplicato per una potenza di 10. Si considerino i seguenti esempi:

$$\begin{aligned}
&12 = 1.2 \cdot 10^1 \\
&2146.3 = 2.1463 \cdot 10^3 \\
&0.032 = 3.2 \cdot 10^{-2} \\
&12446000000 = 1.2446 \cdot 10^{10} \\
&0.00000000212 = 2.12 \cdot 10^{-9} \ .
\end{aligned}$$

Si vede, oltre a consentire una scrittura comoda e compatta di numeri molto grandi o molto piccoli, la notazione scientifica mette in evidenza le cifre significative; per gli ultimi due numeri, infatti, la lunga successione degli zeri è costituita interamente da cifre non significative, e quindi inutili oltre che scomode. Per numeri con due o tre cifre, come primo nel esempio, la notazione scientifica non è particolarmente utile e quindi non viene molto usata.

L'esponente di dieci che meglio approssima un numero viene detto *ordine di grandezza* del numero. Per esempio, le misure dei lati di un tavolo rettangolare hanno lo stesso ordine di grandezza: 0; l'ordine di grandezza del raggio medio della Terra, $r_T = 6371.005\,\mathrm{km}$ ha ordine di grandezza 5; la distanza di Roma da Milano è $594\,\mathrm{km}$ ha ordine di grandezza 4. Si noti che l'ordine di grandezza è assegnato al numero e non alla grandezza che misura; questa infatti può essere misurata da numeri di ordine di grandezza diversi a seconda dell'unità di misura prescelta.

0.3 Unità di misura

In questo eserciziario vengono usate le unità di misura fondamentali del Sistema Internazionale riassunte dalla seguente tabella.

Grandezza fisica	Simbolo della grandezza	Unità di misura	Simbolo dell'unità
lunghezza	l	metro	m
massa	m	chilogrammo	kg
intervallo di tempo	t	secondo	s
temperatura assoluta	T	kelvin	K
quantità di sostanza	n	mole	mol
intensità luminosa	I	candela	cd
intensità di corrente	i	ampere	A

A partire da queste si definiscono le unità di misura derivate, e qualche altra grandezza non standard ma di uso comune, che verranno introdotte via via nel testo.
Per pura comodità, verranno usati frequentemente i multipli e i sottomultipli di queste unità definiti mediante i prefissi riassunti nella seguente tabella.

10^n	prefisso	simbolo
10^{12}	tera	T
10^9	giga	G
10^6	mega	M
10^3	chilo	k
10^2	etto	h
10^1	deca	da
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p

Quindi, ad esempio, un intervallo di tempo t della durata di 5 microsecondi, cioè di 5 milionesimi di secondo, si scrive

$$t = 5\,\mu\mathrm{s}\ ,$$

e cosí via.

Capitolo 1

Cinematica del punto materiale

La *cinematica* studia il moto dei corpi. Per *punto materiale* si intende un corpo le cui dimensioni vengono considerate irrilevanti per lo studio del suo moto. Essenzialmente, qui ci si riferisce alla situazione in cui il corpo in questione si muove senza compiere rotazioni.
Per la descrizione del moto si fa uso di un *sistema di riferimento* costituito da un osservatore che disponga di un metro con cui misurare le distanze e di un orologio con cui misurare i tempi; si suppone che le distanze e i tempi misurati dall'osservatore siano *assoluti*, nel senso newtoniano del temine.
Si dice *traiettoria* l'insieme di tutte le posizioni successivamente occupate dal punto materiale in movimento.

1.1 Moti rettilinei

Un moto è detto *rettilineo* se la sua traiettoria è una porzione di retta.
Nel caso del moto rettilineo l'osservatore, utilizzando il metro, può costruire un asse delle ascisse x cui riferire le varie posizioni assunte dal punto materiale in movimento nei diversi istanti. In tal caso si indica con $x(t)$ la posizione occupata dal punto materiale in moto all'istante t. Con questa notazione, si dice *spostamento* la differenza delle ascisse delle posizioni successivamente occupate. Se in due istanti successivi t_1 e t_2 il punto materiale in moto si trova nelle due posizioni $x(t_1)$ ed $x(t_2)$, lo spostamento è dunque

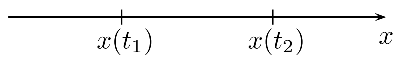


Figura 1.1: L'asse di riferimento

$$s = x(t_2) - x(t_1) \ .$$

Conviene adottare la notazione per cui la variazione di una grandezza si indica con la lettera greca Δ; per esempio se la grandezza A passa dal valore A_1 al valore A_2 la sua variazione si indica con

$$\Delta A = A_2 - A_1 \ .$$

Con questa notazione lo spostamento può essere convenientemente indicato dal simbolo

$$s = \Delta x \ .$$

Si osservi che lo spostamento s può essere positivo o negativo a seconda che il punto materiale si muova, o meno, nel verso delle ascisse crescenti, la distanza percorsa d è quindi il valore assoluto dello spostamento:

$$d = |s| = |x(t_2) - x(t_1)| = |\Delta x| \ . \tag{1.1}$$

1.1.1 Moto rettilineo uniforme

Si dice uniforme un moto in cui lo spostamento ed il tempo impiegato a percorrerlo sono grandezze proporzionali; la costante di proporzionalità è detta *velocità scalare* o piú semplicemente *velocità*.

Indicando con s spostamento, con t il tempo impiegato e con v la velocità, vale quindi

$$v = \frac{s}{t} \ .$$

L'osservatore che voglia determinare in ogni istante la posizione del punto materiale in moto rettilineo uniforme comincia a prendere la posizione in un certo istante iniziale t_0, questa posizione iniziale viene denotata con x_0; al successivo istante t la posizione $x(t)$ può essere determinata usando le equazioni precedenti:

$$v = \frac{x(t) - x_0}{t - t_0} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

da cui

$$x(t) = x_0 + v(t - t_0) \ . \tag{1.2}$$

La precedente è detta *legge del moto* rettilineo uniforme e, note la posizione iniziale e la velocità, consente di determinare la posizione in ogni istante successivo.
Quando possibile, si considera nullo l'istante iniziale cosicché la legge del moto assume la forma semplice

$$x(t) = x_0 + vt \ . \tag{1.3}$$

L'unità di misura della velocità è il metro al secondo (simbolo m/s). Nella pratica è molto usato anche il chilometro all'ora (simbolo km/h). Osservando che $1\,\mathrm{km} = 1000\,\mathrm{m}$ e che $1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}$, si ottiene facilmente la formula di conversione:

$$1\,\mathrm{m/s} = 3.6\,\mathrm{km/h} \ . \tag{1.4}$$

Si noti che la legge del moto rettilineo uniforme è un'equazione di primo grado nelle variabili x e t; è utile darne una rappresentazione grafica in un piano cartesiano spazio-tempo. Il grafico risultante è una retta che ha per coefficiente angolare la velocità e per intercetta la posizione iniziale.

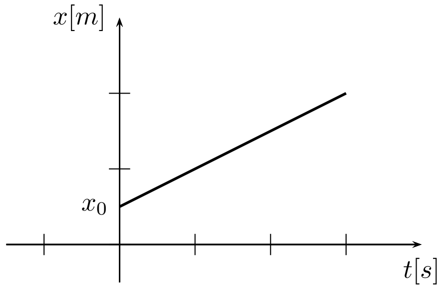


Figura 1.2: Grafico spazio-tempo per il moto uniforme.

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Una fanciulla A si muove da casa in bicicletta alla velocità costante di 36 km/h;

① scrivere la legge del moto della fanciulla e darne una rappresentazione grafica sul piano spazio-tempo;

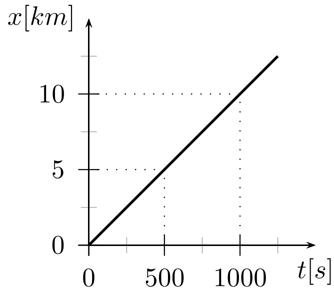
② determinarne la posizione dopo 2 minuti e mezzo;

③ determinare dopo quanto tempo la fanciulla avrà percorso 10 km.

Soluzione

① Si consideri un sistema di riferimento con l'origine nel punto di partenza della fanciulla A e orientato nel verso del moto; si consideri inoltre l'istante iniziale, e si ponga $t_0 = 0\,\mathrm{s}$, quello in cui la fanciulla parte. Per coerenza fra le unità di misura, conviene esprimere la velocità v_A della fanciulla in m/s, equazione (1.4):

$$v_A = \frac{36}{3.6}\ \mathrm{m/s} = 10\,\mathrm{m/s} \ .$$



La legge del moto della fanciulla è quindi, equazione (1.3):

$$x_A(t) = 10t \ .$$

② Dopo due minuti e mezzo, cioè dopo 150 s, la posizione della fanciulla è

$$x_A(150) = 10\,\text{m/s} \cdot 150\,\text{s} = 1500\,\text{m} = 1.5\,\text{km} \ .$$

③ Per trovare il tempo impiegato a percorrere un certa distanza, basta usare la legge del moto trovata al punto ①, determinando a quale istante la posizione è 10 km; sia t_1 tale istante, allora deve essere $x(t_1) = 10000\,\text{m}$, quindi

$$x(t_1) = 10t_1 \qquad \longleftrightarrow \qquad 10000 = 10t_1 \qquad \longleftrightarrow \qquad t_1 = 1000\,\text{s} = 16\,\text{min}\,40\,\text{s} \ .$$

Problema 2

Il fratello B della fanciulla A incontrata nel problema 1, dopo 4 minuti dalla sua partenza, comincia a seguirla alla velocità costante di 12 m/s;

① determinare in quale istante il fratello raggiunge la fanciulla;

② determinare la distanza percorsa dai due fratelli fino al momento dell'incontro.

Soluzione

① Il fratello parte 4 min = 240 s dopo la fanciulla, con velocità $v_B = 12\,\text{m/s}$, l'istante iniziale del suo moto non è pertanto zero ma $t_0 = 240\,\text{s}$; la sua legge del moto è quindi, equazione (1.2):

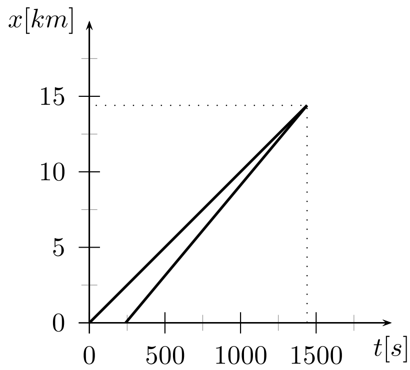
$$x_B(t) = 12(t - 240) \ .$$

La condizione per cui s'incontrino è che in un dato istante, sia t_2, le loro posizioni siano uguali, deve quindi valere

$$x_A(t_2) = x_B(t_2) \ ;$$

usando le leggi del moto si trova

$$10t_2 = 12(t_2 - 240)$$



da cui, con semplici calcoli,

$$t_2 = 1440\,\text{s} = 24\,\text{min} \ .$$

Il grafico spazio–tempo dei due moti è rappresentato in figura.

② I due fratelli percorrono la stessa distanza uguale alla posizione finale meno la posizione iniziale, equazione (1.1); la posizione iniziale è nulla, la posizione finale si può calcolare, indifferentemente, utilizzando la legge del moto dell'uno o dell'altro; vale infatti

$$x_A(t_2) = x_B(t_2) = 14400\,\text{m} \ ,$$

quindi

$$d = x(t_2) - x_0 = 14400\,\text{m} = 14.4\,\text{km} \ .$$

Problema 3

Due motociclette A e B partono simultaneamente da due caselli autostradali distanti $D = 50\,\text{km}$ muovendosi una verso l'altra. Sapendo che le loro velocità sono rispettivamente 120 km/h e 80 km/h,

① determinare dopo quanto tempo dalla partenza avviene l'incontro;

② determinare la distanza percorsa da ciascuna motocicletta fino al momento dell'incontro.

Soluzione

① Il problema è del tutto simile al precedente, in questo caso però i punti materiali in movimento, le motociclette, si muovono in versi opposti; quindi fissato un asse cartesiano di riferimento con origine nel casello autostradale da cui parte A e orientato verso quello da cui parte B, è chiaro che A si muove nel verso delle ascisse crescenti e quindi il suo spostamento è positivo, mentre B si muove nel verso delle ascisse decrescenti e quindi il suo spostamento è negativo. Poiché le velocità sono il rapporto fra lo spostamento ed il tempo impiegato a percorrerlo è chiaro che, rispetto al sistema di riferimento prescelto, la velocità di A è positiva mentre quella di B è negativa; vale quindi

$$v_A = 120\,\mathrm{km/h} \qquad , \qquad v_B = -80\,\mathrm{km/h} \;;$$

le due leggi del moto dunque sono

$$x_A(t) = v_A t \qquad , \qquad x_B(t) = D + v_B t \;.$$

L'incontro avviene all'istante t^* per cui vale $x_A(t^*) = x_B(t^*)$ e quindi

$$v_A t^* = D + v_B t^* \qquad \longrightarrow \qquad t^* = \frac{D}{v_A - v_B} = \frac{50}{120+80}\mathrm{h} = 0.25\,\mathrm{h} = 15\,\mathrm{min} = 900\,\mathrm{s} \;.$$

② La distanza percorsa dalla motocicletta A è

$$d_A = \|v_A t^*\| = 30\,\mathrm{km}$$

mentre la distanza percorsa da B è

$$d_B = \|v_B t^*\| = 20\,\mathrm{km} \;;$$

si osservi che vale $d_A + d_B = D$, come deve.

1.1.2 Moto uniformemente accelerato

Si dice *accelerato* un moto in cui la velocità non è costante, ma varia nel tempo. Se la variazione di velocità e l'intervallo tempo di tempo in cui tale variazione si verifica sono grandezze proporzionali, il moto si dice *uniformemente accelerato* e la costante di proporzionalità è detta *accelerazione*. Se si indica con v_0 la velocità all'istante iniziale t_0 e con $v(t)$ la velocità ad un successivo istante t, l'accelerazione è quindi data da

$$a = \frac{v(t) - v_0}{t - t_0} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

da cui si ottiene

$$v(t) = v_0 + a(t - t_0) \;.$$

Questa equazione è la legge che, note l'accelerazione e la velocità iniziale, consente la determinazione della velocità in ogni istante successivo. Nel caso in cui t_0 sia l'istante nullo, l'equazione precedente assume la piú semplice forma:

$$v(t) = v_0 + at \;. \tag{1.5}$$

L'accelerazione è positiva se la velocità aumenta nel tempo, mentre è negativa se diminuisce; in quest'ultimo caso si usa spesso il termine *decelerazione*.
La legge del moto uniformemente accelerato è data dall'equazione seguente

$$x(t) = x_0 + v_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\,a(t - t_0)^2 \;, \tag{1.6}$$

che nel caso in cui sia $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ assume la piú semplice forma:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\,at^2 \;, \tag{1.7}$$

L'unità di misura dell'accelerazione è il metro al secondo al quadrato (simbolo $\mathrm{m/s^2}$).
La relazione 1.5 fra la velocità e il tempo nel moto uniformemente accelerato è di primo grado; il suo

grafico è quindi una retta avente l'accelerazione come coefficiente angolare e la velocità iniziale come intercetta. Con riferimento a tale grafico, lo spostamento compiuto è dato dall'area compresa fra il grafico e l'asse dei tempi fra i due istanti iniziali e finali del moto, come rappresentato in figura 1.3. La legge del moto 1.7 è di secondo grado nel tempo; il suo grafico spazio-tempo è quindi una porzione di parabola.

È talvolta utile il concetto di *velocità media* v_m: si tratta dello spostamento diviso per il tempo impiegato a percorrerlo:

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} \; . \tag{1.8}$$

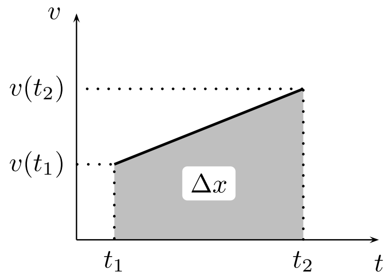


Figura 1.3: Lo spostamento del moto uniformemente accelerato.

In generale la velocità media dipende dall'intervallo di tempo considerato. Nel caso del moto uniforme la velocità media coincide con la velocità del moto; nel caso del moto uniformemente accelerato la velocità media è uguale alla media aritmetica delle velocità iniziale e finale.

Si definisce *velocità istantanea* all'istante t il valore $v(t)$ cui tende la velocità media calcolata nell'intervallo di tempo compreso fra t e $t + \Delta t$ al tendere a zero dell'intervallo di tempo Δt considerato:

$$v_m \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} v(t) \; . \tag{1.9}$$

Una relazione spesso utile è quella che lega lo spostamento di un moto uniformemente accelerato alla variazione di velocità:

$$\Delta x = \frac{v^2(t) - v_0^2}{2a} \qquad \longleftrightarrow \qquad v^2(t) = v_0^2 + 2a\Delta x \; .$$

Un'altra relazione assai utile si ottiene dalla precedente sostituendo all'accelerazione la sua definizione $a = \frac{v(t)-v_0}{t}$; si trova

$$\Delta x = \frac{v_0 + v(t)}{2}\, t \qquad \longrightarrow \qquad v_m = \frac{v_0 + v(t)}{2} \; , \tag{1.10}$$

da cui risulta che in un moto uniformemente accelerato la velocità media è la media aritmetica fra la velocità iniziale e la velocità finale.

Fra i moti uniformemente accelerati, particolarmente importante è il moto di caduta libera dei gravi: i punti materiali lasciati liberi cadono tutti con la stessa accelerazione detta *accelerazione di gravità*; il valore di questa dipende dalla distanza dal centro del pianeta sul quale si effettua l'esperimento. Sulla superficie terrestre, in particolare, l'accelerazione dipende dalla latitudine e dalla quota sul livello del mare; il suo valor medio si indica con la lettera g e vale

$$g = 9.80665\,\mathrm{m/s^2} \; ;$$

in questo eserciziario si userà per g il valore approssimato

$$g = 9.81\,\mathrm{m/s^2} \; .$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Un uomo in bicicletta, partendo da fermo, si muove con un'accelerazione costante $a = 1.21\,\mathrm{m/s^2}$;

① determinare l'istante in cui ha percorso 5.32 m e qual'è, in tale istante, la sua velocità;

② determinare quale distanza percorre in un tempo doppio;

③ determinare quale distanza deve percorrere per raggiungere una velocità tripla.

Soluzione

① Si consideri un sistema di riferimento con un asse orizzontale avente come origine il punto di partenza dell'uomo in bicicletta; con questa scelta $x_0 = 0\,\text{m}$; poiché parte da fermo la sua velocità iniziale è nulla, quindi $v_0 = 0\,\text{m/s}$; la legge del moto della bicicletta, equazione (1.7), e la legge della velocità, equazione (1.5), sono quindi

$$x(t) = \frac{1}{2}\,at^2 \qquad , \qquad v(t) = at \ ;$$

questa relazione può facilmente essere invertita per determinare l'istante, nota che sia la posizione:

$$t = \sqrt{\frac{2x(t)}{a}} \ ;$$

con i dati numerici forniti dal testo si trova quindi che l'istante t_1 in cui $x = 5.32\,\text{m}$ è

$$t_1 = 2.97\,\text{s} \ .$$

La velocità in questo istante è

$$v(t_1) = at_1 = 3.59\,\text{m/s} \ .$$

Si sarebbe potuto determinare la velocità senza determinare l'istante osservando che vale

$$v(t) = a\sqrt{\frac{2x(t)}{a}} = \sqrt{2ax(t)} \ .$$

② Nel tempo doppio la distanza percorsa è data dalla posizione

$$x(2t_1) = \frac{1}{2}\,a(2t_1)^2 = 2at_1^2 = 4x(t_1) = 21.3\,\text{m} \ .$$

In un tempo doppio, la distanza percorsa è dunque quadrupla.
③ Poiché nel moto uniformemente accelerato velocità e tempo sono grandezze proporzionali, la velocità tripla è raggiunta in un tempo triplo. La distanza percorsa in tale tempo triplo è dunque

$$x(3t_1) = \frac{1}{2}\,a(3t_1)^2 = \frac{9}{2}\,at_1^2 = 9x(t_1) = 47.9\,\text{m} \ .$$

Problema 2

Un camion si sta muovendo lungo una strada rettilinea alla velocità di 90.0 km/h, quando, a 85.0 metri di distanza vede una transenna che indica la chiusura della strada. L'autista del camion frena e il camion rallenta con una decelerazione di $3.80\,\text{m/s}^2$. Determinare

① l'istante in cui il camion si ferma;

② a quale distanza dalla transenna il camion riesce a fermarsi;

③ a quale distanza dalla transenna la velocità è dimezzata.

Soluzione

① Si consideri un sistema di riferimento con un asse orizzontale in cui l'origine coincide con il punto in cui il camionista vede la transenna a 85.0 metri e sia $t_0 = 0\,\text{s}$ l'istante in cui ciò avviene; valgono allora $x_0 = 0\,\text{m}$ e $v_0 = 90.0\,\text{km/h} = 25.0\,\text{m/s}$. La legge del moto del camion, e la legge della velocità sono quindi (il segno meno è dovuto al fatto che l'accelerazione è negativa)

$$x(t) = v_0t - \frac{1}{2}\,at^2 \qquad , \qquad v(t) = v_0 - at \ ;$$

L'istante t_1 in cui il camion si ferma è quello in cui la sua velocità è nulla; cioè

$$v(t_1) = 0\,\text{m/s}$$

e quindi

$$t_1 = \frac{v_0}{a} = 6.58\,\text{s} \ .$$

② La posizione del camion all'istante t_1 in cui si ferma è

$$x(t_1) = v_0 t_1 - \frac{1}{2}\,a t_1^2 = \frac{v_0^2}{a} - \frac{1}{2}\,a\left(\frac{v_0^2}{a}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2a} = 82.2\,\text{m} \ ;$$

il camion quindi riesce a fermarsi a distanza $d = 85.0\,\text{m} - 82.2\,\text{m} = 2.8\,\text{m}$ dalla transenna.
③ Sia t_2 l'istante in cui la velocità è dimezzata, sia cioè

$$v(t_2) = \frac{1}{2}\,v_0 = v_0 - a t_2 \ ,$$

allora

$$t_2 = \frac{v_0}{2a} \ ;$$

quindi

$$x(t_2) = \frac{v_0^2}{2a} - \frac{1}{2}\,a\frac{v_0^2}{4a^2} = \frac{3v_0^2}{8a} = 61.7\,\text{m} \ .$$

La distanza dalla transenna a cui la velocità è dimezzata è quindi

$$d = 85.0\,\text{m} - 61.7\,\text{m} = 23.3\,\text{m} \ ,$$

cioè un quarto della distanza totale.

Problema 3

Un punto materiale si muove con legge del moto $x(t) = t^2 - 5t + 2$. Determinare

① la velocità media nell'intervallo di tempo compreso fra gli istanti t e $t + \Delta t$;

② la velocità istantanea all'istante generico t.

Soluzione

① Lo spostamento è dato da

$$\begin{aligned}\Delta x = x(t+\Delta t) - x(t) &= (t+\Delta t)^2 - 5(t+\Delta t) + 2 - (t^2 - 5t + 2) = \\ &= t^2 + 2t\Delta t + (\Delta t)^2 - 5t - 5t\Delta t + 2 - t^2 + 5t - 2 = \\ &= \Delta t(2t - 5 + \Delta t) \ ;\end{aligned}$$

quindi la velocità media, equazione 1.8, è data da

$$v_m = \frac{\Delta x}{\Delta t} = 2t - 5 + \Delta t \ ;$$

si noti che la velocità media dipende dall'istante iniziale e dalla lunghezza dell'intervallo di tempo considerato.
② La velocità istantanea all'istante t si ottiene facendo tendere a zero l'intervallo Δt, equazione (1.9),

$$v_m \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} v(t) = 2t - 5 \ .$$

Si noti che il moto del punto materiale è uniformemente accelerato e quindi si sarebbe potuta applicare la legge della velocità (1.5), ottenendo il medesimo risultato.

***Problema 4**

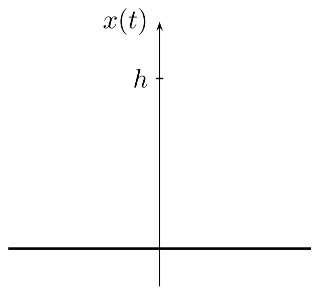
Un punto materiale viene lasciato cadere da un'altezza h;

① determinare il tempo impiegato ad arrivare al suolo;

② determinare la velocità di impatto con il suolo;

③ si consideri in particolare il caso con $h = 8.00\,\text{m}$.

Soluzione



① Si consideri un sistema di riferimento con un asse verticale orientato verso l'alto e con lo zero al suolo, come in figura; sia h quindi la posizione iniziale. Poiché il punto materiale *viene lasciato cadere*, la velocità iniziale è nulla. L'accelerazione è orientata verso il basso e quindi ha segno negativo: $a = -g$. Nella situazione presente quindi l'equazione (1.6) si scrive

$$x(t) = h - \frac{1}{2}gt^2 \ .$$

Si tratta cosí di risolvere l'equazione

$$0 = h - \frac{1}{2}gt^2 \qquad \longrightarrow \qquad t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \ . \tag{1.11}$$

② L'equazione (1.5) fornisce il valore della velocità in ogni istante; nel caso in questione si scrive

$$v(t) = -gt \ ,$$

quindi all'istante dato dalla (1.11) la velocità è

$$v = -g\sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh} \ . \tag{1.12}$$

Si osservi che la velocità è risultata negativa poiché è diretta verso il basso, cioè in verso opposto a quello positivo nel sistema di riferimento scelto.
③ Con $h = 8.00\,\mathrm{m}$ si trova:

$$t = 1.28\,\mathrm{s} \qquad , \qquad v = -12.5\,\mathrm{m/s} \ .$$

***Problema 5**

Un punto materiale viene lanciato verticalmente verso l'alto con velocità iniziale v_0;

① determinare l'istante in cui il punto materiale raggiunge l'altezza massima h e quale questa sia;
② determinare l'istante di ricaduta a terra e la velocità d'impatto;
③ si consideri in particolare il caso con $v_0 = 4.15\,\mathrm{m/s}$.

Soluzione

① Con riferimento al sistema di riferimento verticale del problema precedente, l'equazione del moto e la legge della velocità si scrivono

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2}\,gt^2 \qquad , \qquad v(t) = v_0 - gt \ .$$

L'istante t_1 in cui è raggiunta la massima altezza h è individuato dal fatto che in tale istante il punto materiale si ferma e quindi $v(t_1) = 0\,\mathrm{m/s}$; quindi

$$v_0 - gt_1 = 0 \qquad \longrightarrow \qquad t_1 = \frac{v_0}{g} \ .$$

L'altezza raggiunta in tale istante è

$$h = x(t_1) = v_0 t_1 - \frac{1}{2}\,gt_1^2 = v_0\frac{v_0}{g} - \frac{1}{2}\,g\left(\frac{v_0}{g}\right)^2 = \frac{v_0^2}{2g} \ .$$

② L'istante t_2 di ricaduta a terra è individuato dal fatto che in tale istante il punto materiale si trova a terra e quindi $x(t_2) = 0\,\mathrm{m}$; quindi

$$v_0 t_2 - \frac{1}{2}\, g t_2^2 = 0 \ .$$

Questa equazione ha due soluzioni: la prima è $t = 0\,\mathrm{s}$ e corrisponde alla posizione iniziale; l'altra soluzione è

$$t_2 = 2\frac{v_0}{g} = 2t_1 \ ;$$

il tempo di volo completo è quindi il doppio del tempo di salita; detto altrimenti, il punto materiale impiega lo stesso tempo a salire ed a scendere. La velocità d'impatto è la velocità all'istante t_2, quindi

$$v(t_2) = v_0 - g\ 2\frac{v_0}{g} = -v_0 \ .$$

A parte il segno negativo, dovuto al fatto che la velocità finale è volta nel verso opposto a quella dell'asse si riferimento prescelto, la velocità finale ha lo stesso valore della velocità iniziale. Questo risultato è comprensibile osservando che, come visto, il moto di salita e di discesa durano lo stesso tempo, e poiché l'accelerazione è costante e negativa la diminuzione di velocità nello stesso intervallo di tempo deve essere la stessa: salendo da v_0 a 0, scendendo da 0 a $-v_0$.
③ Con $v_0 = 4.15\,\mathrm{m/s}$ si trova:

$$t_1 = 0.423\,\mathrm{s} \quad , \quad h = 0.878\,\mathrm{m} \quad , \quad t_2 = 0.846\,\mathrm{s} \quad , \quad v(t_2) = -4.15\,\mathrm{m/s} \ .$$

*Problema 6

Un punto materiale parte da fermo muovendosi con accelerazione costante a;

① determinare lo spostamento effettuato dal punto materiale durante il primo, il secondo ed il terzo secondo dall'inizio del moto;

② estrapolarne la regola generale per determinare lo spostamento effettuato nel corso dell'n-esimo secondo dall'inizio del moto.

③ si consideri in particolare il caso con $a = g$.

Soluzione

① La legge del moto è

$$x(t) = \frac{1}{2}\, a t^2 \ .$$

Lo spostamento effettuato durante il primo secondo del moto è

$$s_1 = x(1) - x(0) = \frac{1}{2}\, a \ .$$

Lo spostamento effettuato durante il secondo (si perdoni l'inevitabile bisticcio verbale) del moto è

$$s_2 = x(2) - x(1) = \frac{1}{2}\, a 2^2 - \frac{1}{2}\, a = \frac{3}{2}\, a = 3s_1 \ .$$

Lo spostamento effettuato durante il terzo secondo del moto è

$$s_3 = x(3) - x(2) = \frac{1}{2}\, a 3^2 - \frac{1}{2}\, a 2^2 = \frac{5}{2}\, a = 5s_1 \ .$$

② Da quanto visto al punto ①, risulta che gli spostamenti effettuati aumentano come la serie dei numeri dispari; poiché l'n-esimo numero dispari si può scrivere $(2n-1)$, lo spostamento effettuato nell'n-esimo secondo dall'inizio del moto è uguale a $(2n-1)$ volte lo spostamento effettuato nel primo secondo; quindi

$$s_n = (2n-1)s_1 = (2n-1)\frac{1}{2}\, a \ .$$

Si noti che, volendo, è facile ricavare lo spostamento totale dopo i primi n secondi sommando gli n spostamenti sopra determinati; infatti, com'è noto, la somma dei primi n numeri dispari è uguale ad n^2:

$$1 + 3 + 5 + \cdots + (2n - 1) = n^2 \ ;$$

quindi

$$s_1 + s_2 + s_3 + \cdots + s_n = s_1 + 3s_1 + 5s_1 + \cdots + (2n - 1)s_1 = n^2 s_1 = \frac{1}{2} a n^2$$

che è proprio lo spazio percorso nei primi n secondi come si può calcolare direttamente dalla legge del moto.
③ Per $a = g$ si trova

$$s_1 = 4.91\,\mathrm{m} \quad , \quad s_2 = 14.7\,\mathrm{m} \quad , \quad s_3 = 24.5\,\mathrm{m} \quad , \quad \ldots \quad , \quad s_n = (2n - 1)4.91\,\mathrm{m} \ .$$

1.1.3 Esercizi

Moto rettilineo uniforme

✍ **Es. 1** — Un'auto che viaggia alla velocità di $23\,\mathrm{m/s}$ transita all'istante $t = 4.5\,\mathrm{s}$ per la posizione $x = 11\,\mathrm{m}$;

a) scrivere la legge del moto;

b) determinare la posizione all'istante $t = 12\,\mathrm{s}$.

✍ **Es. 2** — In una gara di corsa di centro metri due atleti A e B impiegano rispettivamente $t_A = 9.95\,\mathrm{s}$ e $t_B 10.01\,\mathrm{s}$; determinare

a) le velocità medie dei due atleti:

b) quale distanza d dovrà ancora percorrere il secondo quando il primo avrà tagliato il traguardo.

✍ **Es. 3** — Un ciclista si trova all'istante $t_1 = 2.0\,\mathrm{s}$ nella posizione $x_1 = 3.0\,\mathrm{m}$, e all'istante $t_2 = 12\,\mathrm{s}$ nella posizione $x_2 = 87\,\mathrm{m}$; determinare

a) l'equazione del moto;

b) l'istante in cui il ciclista raggiunge la posizione $x = 100\,\mathrm{m}$.

☞ **Es. 4** — Un maratoneta corre a una velocità $v_A = 4.50\,\mathrm{m/s}$; un secondo maratoneta, che corre a una velocità $v_B = 3.80\,\mathrm{m/s}$, si trova in vantaggio sul primo di una distanza d; sapendo che il primo raggiunge il secondo dopo aver percorso $400\,\mathrm{m}$, determinare d.

✍ **Es. 5** — Un treno si trova nella posizione $x = 350\,\mathrm{m}$ all'istante $t = 36.0\,\mathrm{m}$; sapendo che la sua velocità è $v = 42.0\,\mathrm{m/s}$,

a) scrivere l'equazione del moto;

b) determinare la pozione del treno all'istante $t = 0\,\mathrm{s}$.

☞ **Es. 6** — Due persone A e B sono disposte lungo una strada rispettivamente a $d_A = 10\,\mathrm{km}$ e a $d_B = 30\,\mathrm{m}$ da un osservatore O fermo. All'istante $t = 0\,\mathrm{s}$ A accende una luce e B emette un suono; sapendo che la velocità del suono in aria è $v_s = 343.21\,\mathrm{m/s}$ e che la velocità della luce in aria è $v_l = 299702547\,\mathrm{m/s}$; determinare la distanza percorsa dal suono prima di essere raggiunto dalla luce.

✍ **Es. 7** — Due automobili si muovono di moto rettilineo secondo le equazioni del moto $x_1(t) = 3 - 5t$ e $x_2(t) = 16 + 12t$ sulla stessa retta; determinare

a) l'istante in cui si incontrano;

b) la distanza d fra le automobili all'istante $t = 1\,\mathrm{min}$

✍ **Es. 8** — Due uomini partono da una distanza $d = 2\,\mathrm{km}$ e si vengono incontro; uno cammina con velocità $v_1 = 2\,\mathrm{m/s}$, l'altro con velocità $v_2 = 1.5\,\mathrm{m/s}$; determinare dove si trova il secondo quando il primo ha raggiunto il punto da cui il secondo era partito.

☞ **Es. 9** — In una staffetta 4×100 i quattro frazionisti hanno le seguenti caratteristiche: il primo percorre $50\,\mathrm{m}$ in $5.5\,\mathrm{s}$; il secondo ha una velocità di $35.1\,\mathrm{km/h}$; il terzo impiega $20.4\,\mathrm{s}$ a percorrere $200\,\mathrm{m}$; il quarto ha una velocità pari a 1.01 volte quella del secondo; supponendo le quattro velocità costanti, determinare

a) la velocità di ciascun frazionista espressa in metri al secondo;

b) il tempo totale impiegato dalla staffetta a percorrere i $400\,\mathrm{m}$.

☞ **Es. 10** — Achille, famoso corridore, fa una gara di corsa, sui cento metri, con una tartaruga; Achille corre con velocità $v_A = 10.0\,\mathrm{m/s}$ mentre la tartaruga percorre $24.0\,\mathrm{cm}$ in $20.0\,\mathrm{s}$; per rendere la sfida più interessante, Achille dà alla tartaruga un vantaggio di 99.0 metri;

a) scrivere le due leggi del moto, fissando l'origine nel punto in cui parte Achille;

b) stabilire chi vince la gara, e dove si trova il perdente quando il vincitore è arrivato;

c) determinare quale vantaggio D Achille dovrebbe dare alla tartaruga affinché i due arrivino al traguardo insieme.

✍ **Es. 11** — Il ciclista A sta conducendo una gara con un vantaggio $D = 250\,\mathrm{m}$ sul secondo ciclista B, pedalando ad una velocità $v_A = 8.46\,\mathrm{m/s}$, quando B comincia l'inseguimento pedalando alla velocità $v_B = 38.5\,\mathrm{km/h}$; determinare a quale istante t il distacco è ridotto alla distanza $d = 50.0\,\mathrm{m}$.

☞ **Es. 12** — L'automobile A parte da Bologna verso Firenze muovendosi alla velocità costante di $v_A = 100\,\mathrm{km/h}$; nello stesso istante l'automobile B parte nello stesso istante da Firenze verso Bologna muovendosi alla velocità costante di $v_B = 110\,\mathrm{km/h}$; sapendo che la distanza fra Firenze e Bologna è $D = 109\,\mathrm{km}$; determinare

a) l'equazione del moto della prima automobile;

b) la sua distanza d_1 da Bologna dopo un tempo $t_1 = 15\,\mathrm{min}$;

c) a quale istante t_2 la distanza dalla prima automobile da Bologna è $d_2 = 24\,\mathrm{km}$;

d) in quale istante t_3 le due automobili si incontrano e tracciare il grafico spazio-tempo del moto delle due automobili;

e) a che distanza d da Firenze avviene l'incontro.

✐ **Es. 13** — Un'automobile si muove alla velocità costante di $v_A = 23.4\,\mathrm{m/s}$; ad un certo istante, $t = 0\,\mathrm{s}$, passa davanti ad una volante della polizia stradale che rileva un eccesso di velocità; dopo un intervallo di tempo $t_0 = 1\,\mathrm{min}$, la volante parte all'inseguimento muovendosi alla velocità $v_V = 100\,\mathrm{km/h}$; determinare

a) in quale istante t_1 la volante raggiunge l'automobile;

b) le distanze d_V e d_A percorse dalla volante e dall'automobile dall'inizio dell'inseguimento.

✐ **Es. 14** — Un bue dopo una giornata al pascolo torna verso la stalla, che si trova a distanza $d = 200\,\mathrm{m}$, muovendosi alla velocità uniforme $v_B = 0.70\,\mathrm{m/s}$; una mosca, nello stesso tempo, si muove avanti e indietro dal corno destro del bue fino alla porta della stalla muovendosi alla velocità uniforme $v_M = 2.24\,\mathrm{m/s}$. Determinare la distanza D percorsa dalla mosca prima di rimanere schiacciata fra il corno destro del bue e la porta della stalla.

Moto uniformemente accelerato

✍ **Es. 1** — Un razzo, partendo da fermo, viene lanciato verso l'alto con un'accelerazione costante $a = 4.21\,\mathrm{m/s^2}$; determinare

a) la distanza d_1 percorsa dopo un tempo $t_1 = 3\,\mathrm{s}$;

b) l'istante t_2 in cui ha percorso una distanza $d_2 = 50.0\,\mathrm{m}$ e quale è, in tale istante, la sua velocità v_2;

c) quale distanza d_3 deve percorrere per raggiungere la velocità $v_3 = 40\,\mathrm{m/s}$.

☞ **Es. 2** — Una zavorra viene lasciata cadere da una mongolfiera ferma a 180 m di quota;

a) determinare quanto tempo impiega la zavorra ad arrivare a terra e qual è la sua velocità massima;

b) una seconda zavorra viene spinta verso il basso; quale velocità v_0 le viene impressa se giunge al suolo in $t_1 = 4.5\,\mathrm{s}$;

c) determinare la velocità con cui deve essere lanciata la zavorra perché impieghi $t_2 = 7\,\mathrm{s}$ per giungere al suolo.

☞ **Es. 3** — Un atleta dei 100 metri piani corre per i primi 40.0 metri di moto uniformemente accelerato raggiungendo una velocità $v = 13.0\,\mathrm{m/s}$ e la mantiene costante negli ultimi 60.0 metri; determinare

a) la accelerazione nella prima parte del moto e il tempo totale t impiegato a correre i 100 metri;

b) la velocità media v_m tenuta dall'atleta sull'intero percorso;

c) l'accelerazione che avrebbe un atleta che percorresse tutti e 100 i metri di moto uniformemente accelerato nel tempo $t = 10.25\,\mathrm{s}$.

☞ **Es. 4** — James Bond, mentre sta guidando la sua Aston Martin a velocità $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}$, trova un messaggio del cattivo che lo informa che l'auto esploderà dopo 6 s; egli frena immediatamente e si ferma dopo aver percorso lo spazio $s = 50\,\mathrm{m}$; tenendo conto che esce solo dopo che l'automobile si è fermata, e che impiega 1 s ad uscire, stabilire se si salva.

✐ **Es. 5** — Due treni viaggiano lungo lo stesso binario rettilineo, diretti l'uno contro l'altro. I macchinisti vengono avvisati del pericolo e iniziano a frenare contemporaneamente in un istante in cui i treni sono distanti $d = 400\,\mathrm{m}$; sapendo che le velocità dei due treni sono $v_1 = 136.8\,\mathrm{km/h}$ e $v_2 = 162\,\mathrm{km/h}$ e che i due treni frenano con la stessa decelerazione $a = 4\,\mathrm{m/s^2}$,

a) verificare che i treni si scontrano;

b) determinare la distanza minima alla quale avrebbero dovuto cominciare a frenare per evitare lo scontro;

c) determinare le velocità dei treni al momento dello scontro.

☞ **Es. 6** — Willy il Coyote si accorge di avere un burrone davanti a sé a una distanza $D = 25\,\mathrm{m}$. Sapendo che stava correndo alla velocità $v_0 = 27\,\mathrm{km/h}$ e che inizia a rallentare con una decelerazione $a = 1.15\,\mathrm{m/s^2}$

a) verificare che si ferma prima di cadere, determinando l'istante t e la distanza d dal bordo del burrone;

b) determinare l'accelerazione necessaria a fermarsi in dopo aver percorso $s = 20\,\mathrm{m}$.

☞ **Es. 7** — Un tuffatore si lancia da un trampolino che si trova a $h = 10\,\mathrm{m}$ dall'acqua spingendosi verso l'alto con una velocità $v_0 = 2.1\,\mathrm{m/s}$; determinare

a) il tempo di durata del tuffo e la velocità con cui il tuffatore raggiunge l'acqua;

b) la velocità media del tuffatore durante il tuffo.

☞ **Es. 8** — Un tuffatore si lancia da un trampolino che si trova a $h = 5\,\mathrm{m}$ dall'acqua; determinare

a) la velocità iniziale con cui deve spingersi se vuole che il suo tuffo duri $t = 1.2\,\mathrm{s}$;

b) la velocità iniziale con cui deve spingersi se vuole arrivare in acqua con velocità $v = 11\,\mathrm{m/s}$; la durata t_1 del tuffo in questo caso.

☞ **Es. 9** — Batman sta salendo appeso alla corda di un montacarichi con velocità uniforme $v = 2.0\,\mathrm{m/s}$; nel momento in cui si trova a $h = 10\,\mathrm{m}$ da terra un cattivo lancia verticalmente una freccia avvelenata verso di lui, da terra, con velocità iniziale $v_0 = 15\,\mathrm{m/s}$;

a) verificare che Batman non viene colpito;

b) determinare la velocità iniziale minima che deve avere la freccia perché Batman venga colpito.

☞ **Es. 10** — La palla 1 viene lanciata verticalmente dal suolo verso l'alto con una velocità iniziale $v_0 = 8.2\,\mathrm{m/s}$; simultaneamente la palla 2 viene lasciata cadere dall'altezza $H = 6.0\,\mathrm{m}$ verso la palla 1; determinare

a) in quale istante e a che altezza le palle si scontrano;

b) se le palle si scontrano prima o dopo che la 1 abbia raggiunto la massima altezza della sua traiettoria;

c) come cambia la risposta alla domanda a) se la palla 2 viene spinta verso il basso con una $v = 1.4\,\mathrm{m/s}$.

☞ **Es. 11** — Un collaudatore di auto da corsa partendo da fermo percorre il primo tratto $x_1 = 500\,\mathrm{m}$ di moto uniformemente accelerato raggiungendo la velocità $v = 65\,\mathrm{m/s}$, che mantiene per il secondo tratto $x_2 = 400\,\mathrm{m}$, poi frena e si ferma percorrendo di moto uniformemente decelerato il terzo tratto $x_3 = 400\,\mathrm{m}$; determinare

a) quanto tempo dura il moto;

b) la velocità v_1 che dovrebbe avere un secondo pilota per percorrere la stessa distanza nello stesso tempo di moto rettilineo uniforme.

✐ **Es. 12** — Per misurare la profondità di una cavità viene lasciato cadere, all'istante $t_0 = 0\,\mathrm{s}$, un sasso verso il fondo e si registra l'arrivo del suono del sasso che sbatte sul fondo all'istante $t = 8.16\,\mathrm{s}$; sapendo che la velocità del suono in aria è $v_s = 343.21\,\mathrm{m/s}$, determinare la profondità h della cavità.

✍ **Es. 13** — Una motocicletta parte al verde di un semaforo muovendosi con accelerazione costante $a = 1.2\,\mathrm{m/s^2}$; determinare in quale istante la motocicletta ha attraversato l'incrocio largo $d = 11\,\mathrm{m}$ e qual'è la sua velocità v in tale istante.

☞ **Es. 14** — L'automobile A viaggia in autostrada alla velocità costante $v_A = 30\,\mathrm{m/s}$; nell'istante in cui passa davanti all'uscita di un'area di servizio, una motocicletta, dopo il rifornimento di carburante, si riimmette in autostrada alla velocità alla velocità iniziale $v_M = 2\,\mathrm{m/s}$; determinare quale accelerazione costante deve mantenere la motocicletta per raggiungere l'automobile dopo aver percorso la distanza $d = 4.5\,\mathrm{km}$.

✍ **Es. 15** — Un punto materiale viene messo in movimento con una velocità iniziale $v_0 = 2.31\,\mathrm{m/s}$ e di moto uniformemente accelerato; sapendo che percorre la distanza $d = 56.3\,\mathrm{m}$ nel tempo $t = 10.4\,\mathrm{s}$, determinare l'accelerazione a e la velocità finale $v(t)$.

☞ **Es. 16** — Dimostrare che nel moto uniformemente accelerato la velocità media è uguale alla media aritmetica della velocità iniziale e della velocità finale.

☞ **Es. 17** — Un punto materiale viene messo in movimento con velocità iniziale $v_0 = 3.25\,\mathrm{m/s}$ e di moto uniformemente accelerato; sapendo che dopo aver percorso la distanza $d = 124\,\mathrm{m}$ la sua velocità è $v = 42.7\,\mathrm{m/s}$, determinare l'accelerazione a ed il tempo impiegato t.

☞ **Es. 18** — Se un'automobile viaggia ad una velocità costante $v_0 = 50\,\mathrm{km/h}$ quando la vettura davanti ad essa frena improvvisamente; supponendo che il tempo di reazione del guidatore sia $t_r = 0.8\,\mathrm{s}$ e che il valore dell'accelerazione durante la frenata sia costante e valga $a = 3.2\,\mathrm{m/s^2}$, determinare la distanza D percorsa prima di arrestarsi.

✐ **Es. 19** — Un punto materiale si muove con legge del moto $x(t) = 2 + 3t - t^3$ determinarne la velocità istantanea al generico istante t

☞ **Es. 20** — Un punto materiale viene lanciato verticalmente da terra con velocità iniziale $v_0 = 19.4\,\mathrm{m/s}$; determinare in quale istante si trova ad un'altezza $h = 15.2\,\mathrm{m}$ dal suolo e qual'è la velocità in tale istante.

☞ **Es. 21** — Una fanciulla precipita dal tetto di un grattacelo alto $H = 50\,\mathrm{m}$; dopo il tempo di reazione $t_r = 0.8\,\mathrm{s}$, Superman si getta al suo soccorso lasciandosi cadere con una velocità iniziale $v_0 = 12\,\mathrm{m/s}$; determinare il tempo t di caduta della fanciulla e a quale altezza h dal suolo Superman la raggiunge.

✐ **Es. 22** — Un fanciullo osserva un pietra cadere verticalmente attraverso un finestra alta $h = 1.5\,\mathrm{m}$; egli misura il tempo t impiegato dalla pietra a percorrere lo spazio della finestra e trova $t = 0.64\,\mathrm{s}$ determinare a quale altezza H rispetto alla base della finestra è stata lasciata cadere la pietra.

✐ **Es. 23** — Un punto materiale viene lasciato cadere da una certa altezza con velocità iniziale nulla; determinare quanto tempo t si deve attendere perché a partire da quell'istante il punto materiale percorra uno spazio $s = 20.0\,\mathrm{m}$ nel tempo $\tau = 0.5\,\mathrm{s}$.

✐ **Es. 24** — Tre punti materiali vengono successivamente lasciati cadere da un'altezza $h = 6\,\mathrm{m}$ con un intervallo di tempo $\tau = 0.2\,\mathrm{s}$ fra una caduta e la successiva; determinare

a) l'intervallo di tempo Δt fra due successivi arrivi al suolo;

b) la distanza h fra il secondo ed il terzo punto materiale quando il primo tocca terra.

1.2 Vettori

Se la traiettoria del moto non è una retta, la descrizione precedente non è sufficiente e occorre introdurre il concetto di vettore. Un *vettore* è un oggetto matematico individuato da tre grandezze: un *modulo*, o intensità, una *direzione* e un *verso*. Graficamente i vettori vengono rappresentati da frecce. Algebricamente, rispetto ad un sistema di assi cartesiani, sono rappresentati dalle loro componenti, come illustrato in figura in cui il vettore $\boldsymbol{A}$ è rappresentato dalle componenti A_x e $A_y$rispetto a due assi cartesiani e si scrive $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y)$. La direzione ed il verso di un vettore sono convenzionalmente individuati dall'angolo α, detto *anomalia*, formato dal vettore stesso con la direzione del semiasse positivo delle ascisse, come indicato in figura 1.4; valgono le relazioni:

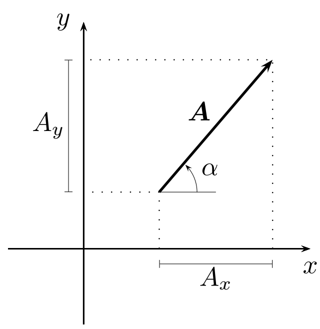


Figura 1.4: Componenti di un vettore.

$$A_x = A\cos\alpha \qquad , \qquad A_y = A\,\mathrm{sen}\,\alpha\ .$$

Un vettore è spesso denotato indicando i punti dei suoi estremi, per esempio il vettore $\boldsymbol{A}$ che unisce i punti P e Q si può anche indicare con $\boldsymbol{PQ}$. Il modulo del vettore si scrive

$$A = \|\boldsymbol{A}\| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2}\ ;$$

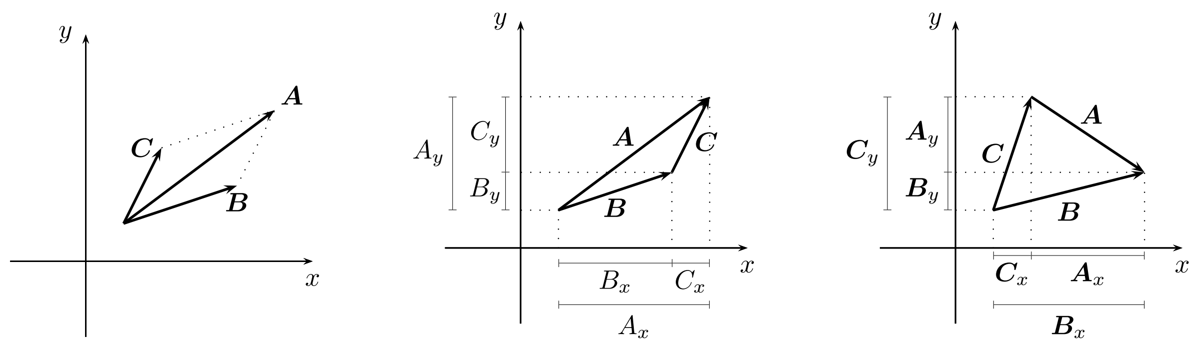
per l'anomalia occorre fare attenzione e distinguere quattro casi:

$$\alpha = \begin{cases} \operatorname{arctg} \dfrac{A_y}{A_x} & \text{se } A_x \text{ e } A_y \text{ sono entrambe positive} \\ 180^\circ + \operatorname{arctg} \dfrac{A_y}{A_x} & \text{se } A_x \text{ è negativa e } A_y \text{ è positiva} \\ 180^\circ + \operatorname{arctg} \dfrac{A_y}{A_x} & \text{se } A_x \text{ e } A_y \text{ sono entrambe negative} \\ 360^\circ + \operatorname{arctg} \dfrac{A_y}{A_x} & \text{se } A_x \text{ è positiva e } A_y \text{ è negativa .} \end{cases}$$

1.2.1 Somma e differenza

Somma e differenza di vettori si possono rappresentare graficamente con il metodo *del parallelogramma* o con il metodo *punta-coda*, illustrati, nel caso piano, nella figura 1.5, o algebricamente in termini delle componenti. Se infatti vale $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$ allora

$$\begin{cases} A_x = B_x + C_x \\ A_y = B_y + C_y \\ A_z = B_z + C_z \ . \end{cases} \tag{1.13}$$



(a) Parallelogramma. (b) Punta-coda. (c) Differenza.

Figura 1.5: Somma e differenza di vettori.

La differenza fra vettori si definisce similmente; se vale $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} - \boldsymbol{C}$ allora

$$\begin{cases} A_x = B_x - C_x \\ A_y = B_y - C_y \\ A_y = B_y - C_y \ ; \end{cases}$$

si noti che in figura 1.5(c) la componente A_y del vettore $\boldsymbol{A}$ è negativa.
Molto utile è, inoltre, esprimere i vettori in termini dei versori degli assi cartesiani.

$$\boldsymbol{A} = A_x \hat{\boldsymbol{\imath}} + A_y \hat{\boldsymbol{\jmath}} + A_z \hat{\boldsymbol{k}} \ ;$$

in figura 1.6 è rappresentato il vettore tridimensionale $\boldsymbol{OP}$ tramite i tre versori degli assi.

1.2.2 Prodotto di vettori

Il prodotto di un vettore $\boldsymbol{A}$ per uno scalare c è un vettore che ha la stessa direzione di $\boldsymbol{A}$, ha lo stesso verso di $\boldsymbol{A}$ se c è positivo e verso opposto se c è negativo e ha modulo uguale a cA.
In termini di componenti vale la relazione seguente

$$c\boldsymbol{A} = (cA_x, cA_y, cA_z) \ . \tag{1.14}$$

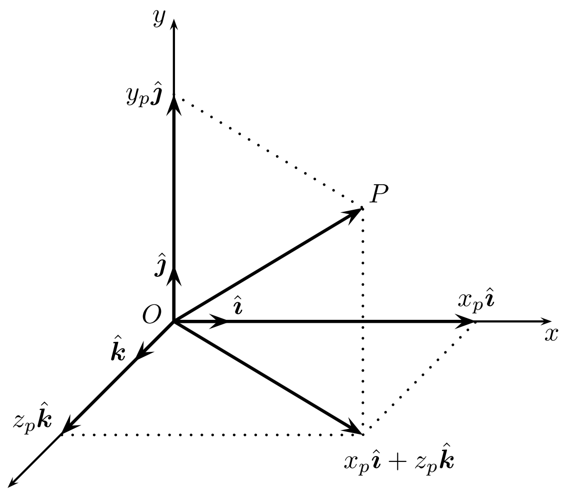
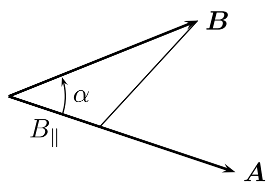
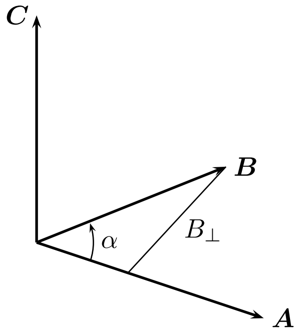


Figura 1.6: Rappresentazione con versori di un vettore tridimensionale

Fra vettori si definiscono due prodotti: il *prodotto scalare* che ha come risultato un numero ed il *prodotto vettoriale* che ha come risultato un vettore. Dati i vettori $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, si dice prodotto scalare, e si indica con $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$, il numero che si ottiene moltiplicando uno dei due vettori per la componente dell'altro nella direzione del primo. Se i vettori formano un angolo ottuso il prodotto viene preceduto dal segno meno.



(a) Scalare.



(b) Vettoriale.

Figura 1.7: Prodotti fra vettori.

Dati i vettori $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$, si dice prodotto vettoriale, e si indica con $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$, il vettore avente per modulo il prodotto di uno dei due vettori per la componente dell'altro nella direzione perpendicolare al primo, come direzione quella perpendicolare al piano individuato da $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ e come verso quello dal quale la rotazione di $\boldsymbol{A}$ verso $\boldsymbol{B}$ risulti antioraria [1]. Negli esempi illustrati in figura 1.7, si calcolano il prodotto scalare

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = AB_{\parallel} = AB\cos\alpha \ , \tag{1.15}$$

e il prodotto vettoriale

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \qquad \text{con} \qquad C = AB_{\perp} = AB\,\mathrm{sen}\,\alpha \ .$$

Dalla definizione segue che se due vettori hanno prodotto scalare nullo sono perpendicolari; similmente sono perpendicolari due vettori paralleli che abbiano prodotto vettoriale nullo.
In termini delle componenti, il prodotto scalare si trova nel modo seguente

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{A} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \ .$$

[1] La convenzione sul verso del prodotto vettoriale è anche nota come *regola della mano destra*.

Come conseguenza della definizione si trova che il prodotto scalare di un vettore con sé stesso è uguale al quadrato del suo modulo, infatti

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = \|\boldsymbol{A}\|^2 \ .$$

Per prodotto vettoriale vale

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = -\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A} = (A_y B_z - A_z B_y)\hat{\boldsymbol{\imath}} + (A_z B_x - A_x B_z)\hat{\boldsymbol{\jmath}} + (A_x B_y - A_y B_z)\hat{\boldsymbol{k}} \ . \tag{1.16}$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Dimostrare che la somma di vettori è commutativa.

Soluzione

Che sia commutativa si può vedere sia dalla rappresentazione grafica col metodo punta coda, sia dal calcolo delle componenti; per la componente x vale infatti:

$$(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C})_x = B_x + C_x = C_x + B_x = (\boldsymbol{C} + \boldsymbol{B})_x$$

e similmente per le altre componenti.

Problema 2

Dati, in un riferimento cartesiano, i punti di coordinate $A(3,1)$, $B(-1,3)$, $C(-2,-2)$;

① si determinino le componenti dei tre vettori $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{BC}$ e $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{CA}$;

② si determinino le componenti del vettore $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$;

③ si verifichi che $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{V} + \boldsymbol{W} = \boldsymbol{0}$;

④ si rappresentino i risultati ottenuti in un piano cartesiano.

Soluzione

① La componente x di un vettore è la differenza delle ascisse dei suoi estremi, presi ordinatamente: l'ascissa del secondo estremo meno l'ascissa del primo estremo e similmente per la componente y; quindi

$$U_x = x_B - x_A = -1 - 3 = -4$$
$$U_y = y_B - y_A = 3 - 1 = 2 \ .$$

Quindi, usando il procedimento analogo per $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ si trova

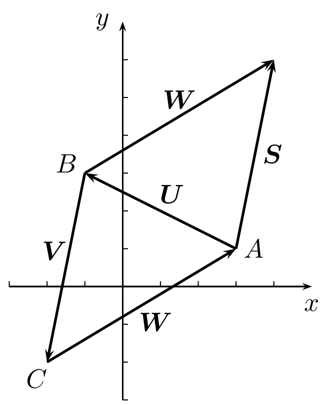
$$\boldsymbol{U} = (-4, 2) \qquad , \qquad \boldsymbol{V} = (-1, -5) \qquad , \qquad \boldsymbol{W} = (5, 3) \ .$$

② Per la (1.13) le componenti di $\boldsymbol{S}$ sono la somma delle componenti di $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{W}$; quindi

$$\boldsymbol{S} = (1, 5) \ .$$

③ La somma delle componenti dei tre vettori $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{W}$ è nulla quindi la loro somma è il vettore nullo. D'altra parte, usando il metodo punta-coda, risulta che il vettore somma ha come punto iniziale e finale il punto A, si tratta cioè del vettore $\boldsymbol{AA} = \boldsymbol{0}$.

④ Per la rappresentazione grafica si faccia riferimento alla figura, tenendo presente che o vettori non hanno qui punto di applicazione definito quindi per la somma di $\boldsymbol{U}$ e $\boldsymbol{W}$ si è usato il metodo punta-coda applicando il vettore $\boldsymbol{W}$ sulla punta di $\boldsymbol{U}$.



Problema 3

Dati i vettori $\boldsymbol{u} = (3,2)$, $\boldsymbol{v} = (-1,3)$ e $\boldsymbol{w} = (2,-1)$

① determinare $\frac{1}{2}\boldsymbol{u} - \frac{2}{3}\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{w}$;

② determinare $(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w}$;

③ verificare che $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$.

Soluzione

① Usando la (1.14) si trova

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{u} - \frac{2}{3}\boldsymbol{v} + 2\boldsymbol{w} = \left(\frac{3}{2}, 1\right) - \left(-\frac{2}{3}, 2\right) + (4,-2) = \left(\frac{37}{6}, -3\right) .$$

② Si trova:

$$(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) \cdot \boldsymbol{w} = (4,-1) \cdot (2,-1) = 9 .$$

③ Non sono necessari calcoli, infatti il vettore $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ è perpendicolare al piano individuato da $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$, quindi in particolare è perpendicolare a $\boldsymbol{w}$ e quindi il prodotto scalare è nullo. Si fa notare, di passaggio, che il prodotto $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w}$ è ben definito senza bisogno di parentesi, infatti il prodotto $\boldsymbol{v} \times (\boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{w})$ non ha senso in quanto si tratta di un prodotto vettoriale fra un vettore ed uno scalare.

Problema 4

Dati i punti $A(-1,2)$, $B(2,-1)$ e $C(4,3)$ determinare

① l perimetro del triangolo ABC;

② l'area del triangolo ABC.

Soluzione

① Le lunghezze dei lati del triangolo sono uguali ai moduli dei vettori $\boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{BC}$ e $\boldsymbol{CA}$; quindi il perimetro è dato da

$$\begin{aligned}\mathcal{P} &= \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2} + \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2} + \sqrt{(x_A - x_C)^2 + (y_A - y_C)^2} = \\ &= 3\sqrt{2} + 2\sqrt{5} + \sqrt{26} .\end{aligned}$$

② Dalla definizione di prodotto vettoriale risulta che il modulo del prodotto vettoriale di $\boldsymbol{AB}$ e $\boldsymbol{AC}$ è uguale al prodotto del modulo di $\boldsymbol{AB}$ per la componente di $\boldsymbol{AC}$ perpendicolare ad $\boldsymbol{AB}$; con riferimento al triangolo ABC si tratta quindi del prodotto della base AB per l'altezza CH; pertanto l'area del triangolo è data da

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\| \boldsymbol{AB} \times \boldsymbol{AC}\| ;$$

osservando che le componenti z dei due vettori sono nulle dall'equazione (1.16) risulta che la sola componente non nulla del prodotto vettoriale è la componente z e quindi

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)\right| = \frac{1}{2}\left|3 \cdot 1 + 3 \cdot 5\right| = 9 .$$

1.2.3 Esercizi

VETTORI

✍ **Es. 1** — Stabilire quale fra delle seguenti grandezze è scalare e quale vettoriale: velocità, tempo, lunghezza, accelerazione, età, temperatura.

✍ **Es. 2** — Dato il vettore $\boldsymbol{v}$ di modulo 5/3, dire quanto vale il modulo del vettore $\boldsymbol{w} = 2.5\boldsymbol{v}$; determinare quindi quali direzione e verso del vettore $\boldsymbol{u} = -2\boldsymbol{v}$.

✍ **Es. 3** — Dati i vettori di componenti $\boldsymbol{u} = (3, 2)$, $\boldsymbol{v} = (-1/2, 1)$, $\boldsymbol{w} = (0, -2)$, determinare per ciascuno di essi modulo e anomalia, quindi determinare le componenti del vettore $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} - \boldsymbol{w}$.

✍ **Es. 4** — Dati 2 vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ non nulli stabilire se sono vere le seguenti uguaglianze

a) $\|\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1\| = \|\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2\|$;

b) $\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$.

✍ **Es. 5** — Dati i vettori $\boldsymbol{v}_1$ disposto lungo l'asse delle ascisse e $\boldsymbol{v}_2$ disposto lungo l'asse delle ordinate, aventi rispettivamente modulo 4 e 2; determinare le componenti dei vettori $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$, $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{c} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1$; determinarne quindi i moduli.

☞ **Es. 6** — Sapendo che i vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ sono perpendicolari e che vale $\|\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1\| = 10$, stabilire quali delle seguenti alternative è l'unica possibile:

a) $\|\boldsymbol{v}_1\| = 4$, $\|\boldsymbol{v}_2\| = 14$;

b) $\|\boldsymbol{v}_1\| = 6$, $\|\boldsymbol{v}_2\| = 19$;

c) $\|\boldsymbol{v}_1\| = 6$, $\|\boldsymbol{v}_2\| = 8$;

d) $\|\boldsymbol{v}_1\| = -3$, $\|\boldsymbol{v}_2\| = 13$.

☞ **Es. 7** — Sono dati due vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ aventi uguale direzione e uguale verso; è noto che $\|\boldsymbol{v}_1\| = 4$ e $\|\boldsymbol{v}_2\| = 6$; determinare, specificando per ciascuno modulo e verso, i vettori $\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{b} = 2\boldsymbol{v}_1 - 3\boldsymbol{v}_2$.

☞ **Es. 8** — Sono dati due vettori $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ aventi uguale direzione ma verso opposto; è noto che $\|\boldsymbol{v}_1\| = 6$ e $\|\boldsymbol{v}_2\| = 14$; determinare, specificando per ciascuno modulo e verso, i vettori $\boldsymbol{a} = \frac{4}{3}\boldsymbol{v}_1 - \frac{4}{7}\boldsymbol{v}_2$ e $\boldsymbol{b} = 2\frac{4}{3}\boldsymbol{v}_1 + \frac{4}{7}\boldsymbol{v}_2$.

☞ **Es. 9** — Sono dati i vettori paralleli e discordi $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$; è noto che $\|\boldsymbol{v}_1\| = 6$;

a) determinare, se esiste, $\|\boldsymbol{v}_2\|$ tale che $\frac{3}{2}\boldsymbol{v}_2 - \frac{2}{3}\boldsymbol{v}_1$ sia nullo;

b) determinare, se esiste, $\|\boldsymbol{v}_2\|$ tale che $\frac{2}{3}\boldsymbol{v}_1 + \frac{3}{2}\boldsymbol{v}_2$ sia nullo;

c) con il valore di $\|\boldsymbol{v}_2\|$ calcolato al punto precedente determinare, $\frac{3}{2}\boldsymbol{v}_2 + \frac{2}{3}\boldsymbol{v}_1$.

☞ **Es. 10** — Dati due vettori perpendicolari di moduli $\|\boldsymbol{v}_1\| = 2$ e $\|\boldsymbol{v}_2\| = 3$, determinare il modulo del vettore $\boldsymbol{w}$ tale che si abbiano:

a) $4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$;

b) $4\boldsymbol{v}_1 - 2\boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$;

c) $4\boldsymbol{v}_1 + 2\boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{w} = \boldsymbol{0}$.

☞ **Es. 11** — Verificare che i due vettori di componenti $\boldsymbol{u} = (1, -1/2, -1)$ e $\boldsymbol{v} = (-4, 2, 4)$ hanno prodotto vettoriale nullo.

☞ **Es. 12** — Dati i vettori di componenti $\boldsymbol{u} = (3, 2, 0)$, $\boldsymbol{v} = (0, 1, -2)$, $\boldsymbol{w} = (-1, 0, -1)$ calcolare i prodotti vettoriali $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}$ e $\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}$, quindi verificare che vale l'uguaglianza $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u})$.

1.3 Moti piani

I moti piani si descrivono e si studiano come composizione di moti rettilinei; l'idea è di proiettare in ogni istante il punto della traiettoria su ciascuno dei due assi cartesiani del piano e studiare separatamente i due moti rettilinei che si svolgono su ciascun asse.
Con riferimento al sistema di assi cartesiani Oxy, la posizione del punto P è determinata in ogni istante t dal vettore $\boldsymbol{r}(t) = \boldsymbol{OP}(t)$; questo può essere scritto in termini delle sue componenti nella forma

$$\boldsymbol{r}(t) = x(t)\hat{\boldsymbol{\imath}} + y(t)\hat{\boldsymbol{\jmath}} \ ;$$

il vettore velocità è

$$\boldsymbol{v} = \frac{\Delta \boldsymbol{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{\imath}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\boldsymbol{\jmath}} = v_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + v_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \ .$$

In questa equazione v_x e v_y sono rispettivamente le velocità delle proiezioni di P sull'asse x e sull'asse y.
Similmente, il vettore accelerazione è dato da

$$\boldsymbol{a} = a_x\hat{\boldsymbol{\imath}} + a_y\hat{\boldsymbol{\jmath}} \ .$$

Ove a_x e a_y sono rispettivamente le accelerazioni delle proiezioni di P sull'asse x e sull'asse y. Il moto piano di un punto materiale viene quindi descritto per mezzo dei moti delle sue proiezioni sugli assi, valgono cioè

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} v_x = v_x(t) \\ v_y = v_y(t) \end{cases} \qquad \begin{cases} a_x = a_x(t) \\ a_y = a_y(t) \ . \end{cases}$$

PROBLEMI RISOLTI

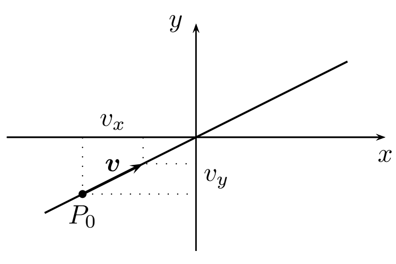
Problema 1

Si consideri il moto di un punto materiale avente per traiettoria la retta di equazione $x - 2y = 0$; sapendo che la traiettoria viene percorsa con velocità di modulo $v = 4.20\,\mathrm{m/s}$ e che all'istante $t = 0\,\mathrm{s}$ si trova nella posizione di coordinate $P_0(-6, -3)$; determinare le coordinate della posizione per ogni valore di t.

Soluzione

Si considerino le componenti v_x e v_y della velocità; per la loro determinazione si osservi, con riferimento alla figura, che devono valere le relazioni

$$v_x = 2v_y \qquad , \qquad v_x^2 + v_y^2 = v^2$$



da cui

$$5v_y^2 = v^2$$

e quindi

$$v_x = 3.76\,\mathrm{m/s} \qquad , \qquad v_y = 1.88\,\mathrm{m/s} \ .$$

Le componenti della velocità sono costanti, quindi il moto è scomponibile in due moti rettilinei ed uniformi; uno lungo l'asse delle ascisse con velocità v_x e uno lungo l'asse delle ordinate con velocità v_y. Le posizioni occupate da P per diversi valori di t sono quindi quelle aventi coordinate date dalle

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_x t = -6 + 3.76\,t \\ y(t) = y_0 + v_y t = -3 + 1.88\,t \ . \end{cases}$$

Problema 2

Si consideri un punto materiale in moto piano secondo le leggi del moto

$$\begin{cases} x(t) = 1.7 - 1.20t \\ y(t) = -4.6 + 2.8t \ ; \end{cases}$$

① determinare la velocità del punto materiale in ogni istante;

② determinare l'equazione cartesiana della traiettoria del moto.

Soluzione

① La velocità è costante perché lo sono le sue componenti $v_x = -1.20\,\mathrm{m/s}$ e $v_y = 2.8\,\mathrm{m/s}$; quindi

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 3.0\,\mathrm{m/s} \ .$$

② Per la determinazione dell'equazione della traiettoria è necessario trovare l'equazione che lega le due coordinate eliminando il parametro t; ricavando quindi t dalle prima delle equazioni del moto e sostituendola nella seconda si trova

$$y = -2.3x - 0.63 \ ,$$

la traiettoria è quindi una retta. Il moto pertanto è rettilineo uniforme.

Problema 3

Un punto materiale parte all'istante $t = 0\,\mathrm{s}$ dal punto $P_0(2.5, 1.2)$ con velocità iniziale di componenti $v_{0x} = 2.1\,\mathrm{m/s}$ e $v_{0y} = 0\,\mathrm{m/s}$, muovendosi con accelerazione costante di componenti $a_x = -1.2\,\mathrm{m/s^2}$ e $a_y = 0.20\,\mathrm{m/s^2}$;

① determinare la posizione all'istante $t_1 = 5.1\,\mathrm{s}$;

② determinare la velocità all'istante t_1.

Soluzione

① Il punto materiale si muove in modo che le sue proiezioni sugli assi si muovano di moto uniformemente accelerato; valgono infatti

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t + \dfrac{1}{2}\,a_x t^2 = 2.5 + 2.1t - 0.6t^2 \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t + \dfrac{1}{2}\,a_y t^2 = 1.2 + 0.10t^2 \ , \end{cases}$$

quindi all'istante t_1 si trova

$$\begin{cases} x(t_1) = -2.4\,\mathrm{m} \\ y(t_1) = 3.8\,\mathrm{m} \ . \end{cases}$$

② Similmente, per le componenti della velocità si trova

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} + a_x t = 2.1 - 1.2t \\ v_y(t) = v_{0y} + a_y t = 1.2 + 0.20t \ , \end{cases}$$

e quindi

$$\begin{cases} v_x(t_1) = -4.0\,\mathrm{m/s} \\ v_y(t_1) = 2.2\,\mathrm{m/s} \ ; \end{cases}$$

pertanto la velocità all'istante t_1 è

$$v(t_1) = \sqrt{v_x^2(t_1) + v_y^2(t_1)} = 4.6\,\mathrm{m/s} \ .$$

1.3.1 Moto parabolico

Un punto materiale lanciato con velocità iniziale $\boldsymbol{v}_0 = v_{0x}\hat{\boldsymbol{\imath}} + v_{0y}\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ e quindi lasciato andare all'azione dell'attrazione terrestre si muove con una traiettoria curva che è la composizione di un moto orizzontale con velocità uniforme v_{0x} e del moto verticale di caduta uniformemente accelerato con accelerazione $\boldsymbol{a} = -g\hat{\boldsymbol{\jmath}}$. Le leggi del moto sono quindi

$$\begin{cases} x(t) = x_0 + v_{0x}t \\ y(t) = y_0 + v_{0y}t - \dfrac{1}{2}\,gt^2 \end{cases},$$

le leggi della velocità

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases}.$$

L'equazione della traiettoria è la parabola di equazione

$$y = -\frac{g}{2v_{0x}^2}\,x^2 + \frac{v_{0x}v_{0y} - gx_0}{v_{0x}^2}\,x - \frac{gx_0^2}{2v_{0x}^2} - \frac{v_{0y}}{v_{0x}}\,x_0 + y_0$$

che diviene particolarmente semplice se il punto di lancio è l'origine, in tal caso infatti $x_0 = y_0 = 0$ e rimane

$$y = -\frac{g}{2v_{0x}^2}\,x^2 + ds\frac{v_{0y}}{v_{0x}}\,x\ .$$

Il punto piú alto della traiettoria è il vertice della parabola e ha coordinate

$$x_{\text{MAX}} = \frac{v_{0x}v_{0y}}{g} \qquad , \qquad y_{\text{MAX}} = \frac{v_{0y}^2}{2g}\ .$$

Si osservi che quest'ultima espressione è formalmente identica a quella trovata per l'altezza massima raggiunta da un punto materiale lanciato verso l'alto; si veda problema 5 della sezione 1.1.2. Il punto di massima altezza è raggiunto all'istante

$$t_{\text{MAX}} = \frac{v_{0y}}{g}\ .$$

La gittata G si trova determinando l'intersezione (diversa dall'origine) della parabola con l'asse delle ascisse; quindi

$$G = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}\ ; \tag{1.17}$$

si osservi che è il doppio di x_{MAX}.
Il tempo di volo è

$$t_G = \frac{2v_{0y}}{g} = 2t_{\text{MAX}}\ .$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Un punto materiale viene gettato da un'altezza $h = 2.0\,\text{m}$ con velocità iniziale $\boldsymbol{v} = 3.2\hat{\boldsymbol{\imath}} + 2.4\hat{\boldsymbol{\jmath}}$ m/s; determinare

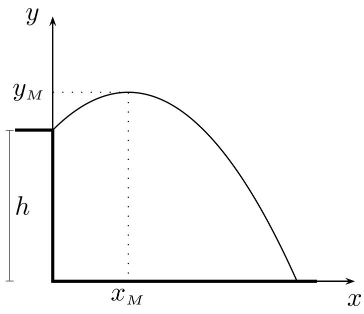
① l'altezza massima raggiunta;
② il tempo di volo;
③ la distanza orizzontale dal punto di lancio al punto di atterraggio;
④ la velocità d'impatto.

Soluzione

① Supponendo di scegliere l'origine del sistema di riferimento nel punto al suolo sotto il punto di lancio, le equazioni del moto nel caso in esame divengono

$$\begin{cases} x(t) = v_{0x}t \\ y(t) = h + v_{0y}t - \frac{1}{2}\,gt^2 \end{cases} ,$$

$$\begin{cases} v_x(t) = v_{0x} \\ v_y(t) = v_{0y} - gt \end{cases} .$$



L'altezza massima raggiunta si ha nell'istante t_1 in cui la velocità è orizzontale, cioè in cui $v_y = 0$; ciò si verifica per

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = 0.24\,\mathrm{s}$$

e quindi l'altezza massima è

$$y_{MAX} = y(t_1) = h + \frac{v_{0y}^2}{2g} = 2.3\,\mathrm{m} .$$

② Il tempo di volo coincide con l'istante in cui il punto materiale tocca terra è l'istante t_2 in cui vale $y = 0$; è quindi la soluzione positiva dell'equazione di secondo grado $h + v_{0y}t - \frac{1}{2}\,gt^2 = 0$ e quindi

$$t_2 = \frac{v_{0y} + \sqrt{v_{0y}^2 + 2gh}}{g} = 0.93\,\mathrm{s} .$$

③ La distanza orizzontale percorsa coincide con l'ascissa nell'istante in cui il punto materiale tocca terra, è quindi

$$x(t_2) = v_{0x}t_2 = 3.0\,\mathrm{m} .$$

④ La velocità d'impatto è la velocità all'istante t_2, è quindi

$$v(t_2) = \sqrt{v_x^2(t_2) + v_y^2(t_2)} = 7.4\,\mathrm{m/s} .$$

Problema 2

Un punto materiale viene lanciato da un punto al suolo con velocità di modulo v_0 e tale da formare con l'orizzontale un angolo α; determinare il valore di α per il quale, per v_0 fissato, si abbia la gittata massima.

Soluzione

Ricordando l'equazione (1.17), si tratta di determinare quando sia massimo il prodotto $v_{0x}v_{0y}$ con la condizione che sia $v_{0x}^2 + v_{oy}^2 = v_0^2$; per far ciò conviene osservare che è equivalente determinare quando sia massimo il prodotto fra i quadrati $v_{0x}^2 v_{0y}^2$; per rendere piú chiara la questione, soprattutto dal punto di vista della notazione, conviene definire $v_{0x}^2 = a$ e $v_{0y}^2 = b$; allora si tratta di rendere massimo il prodotto ab con la condizione $a + b = v_0^2$; si tratta cioè di rendere massimo il prodotto

$$a(v_0^2 - a) = -a^2 + v_0^2 a ;$$

si tratta, come si vede, di una parabola volta verso il basso e quindi assume il suo valore massimo in corrispondenza del vertice, cioè per

$$a = \frac{v_0^2}{2} ;$$

pertanto

$$a = b = \frac{v_0^2}{2}$$

e quindi

$$v_{0x} = v_{0y} = \frac{v_0}{\sqrt{2}} \ ,$$

le due componenti della velocità sono cosí uguali e quindi l'angolo per cui la gittata è massima è $\alpha = 45°$. Si osservi che il problema qui risolto è equivalente al problema della determinazione del rettangolo di area massima e perimetro dato, che, quindi, risulta essere il quadrato.

Problema 3

Un cannone spara una palla con una velocità iniziale avente componenti $v_{0x} = \frac{4}{5}v_0$ e $v_{0y} = \frac{3}{5}v_0$. Il bersaglio da colpire si trova ad una distanza di $D = 5800\,\mathrm{m}$ in una valle piú bassa di 150 m rispetto alla posizione di tiro;

① determinare v_0 in modo che il cannone colpisca il bersaglio;

② determinare l'istante in cui il bersaglio viene colpito;

③ determinare la velocità della palla quando colpisce il bersaglio.

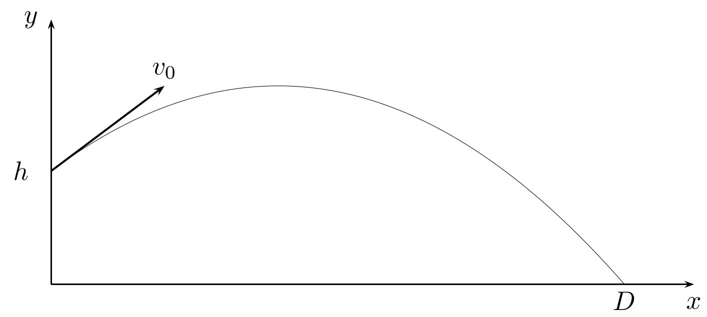
Soluzione

① Le leggi del moto della palla sono

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{4}{5}\, v_0 t \\ y(t) = h + \dfrac{3}{5}\, v_0 t - \dfrac{1}{2}\, g t^2 \ , \end{cases}$$

ove $h = 150\,\mathrm{m}$ è l'altezza del cannone rispetto alla valle sottostante. La palla colpisce il bersaglio se in un dato istante t_1 si trova nel punto di coordinate $(D, 0)$; cioè se vale

$$\begin{cases} D = \dfrac{4}{5}\, v_0 t_1 \\ 0 = h + \dfrac{3}{5}\, v_0 t - \dfrac{1}{2}\, g t^2 \ . \end{cases}$$



Utilizzando la prima delle equazioni del moto si trova

$$t_1 = \frac{5D}{4v_0}$$

che sostituita nella seconda dà

$$h + \frac{3}{4}\, D - \frac{25D^2}{32v_0^2}\, g = 0 \qquad (\star)$$

da cui

$$v_0 = \frac{5}{2}\, D \sqrt{\frac{g}{8h + 6D}} = 239\,\mathrm{m/s} \ .$$

② Sostituendo la precedente nell'espressione per t_1 si trova

$$t_1 = \sqrt{\frac{4h + 3D}{2g}} = 30.3\,\mathrm{s} \ .$$

③ Per la determinazione della velocità di impatto occorre utilizzare la legge della velocità, che nel caso presente si scrive

$$\begin{cases} v_x(t) = \dfrac{4}{5}\, v_0 \\ v_y(t) = \dfrac{3}{5}\, v_0 - gt \ ; \end{cases}$$

all'istante t_1 si trova quindi

$$\begin{cases} v_x(t_1) = \dfrac{4}{5}\, v_0 \\ v_y(t_1) = \dfrac{3}{5}\, v_0 - \dfrac{5D}{4v_0}\, g\ . \end{cases}$$

Pertanto

$$v^2(t_1) = v_x^2(t_1) + v_y^2(t_1) = \frac{16}{25}\, v_0^2 + \frac{9}{25}\, v_0^2 - \frac{3}{2}\, Dg + \frac{25D^2}{16v_0^2}\, g^2 = v_0^2 + 2gh$$

ove si è utilizzata l'equazione ($\star$); cosí

$$v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 245\,\mathrm{m/s}\ .$$

1.3.2 Moto circolare uniforme

Il moto circolare uniforme è un moto piano in cui la traiettoria è una circonferenza e la velocità ha modulo costante; lo spostamento in questo caso è un arco di circonferenza che qui viene indicato con s; vale quindi

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}\ .$$

In ogni punto la velocità è tangente alla traiettoria quindi la velocità ha una direzione diversa in ogni istante; il vettore velocità, pertanto, non è costante e quindi vi è un vettore accelerazione detto *accelerazione centripeta* $\boldsymbol{a}_c$. Il modulo dell'accelerazione centripeta dipende dalla velocità e dal raggio della traiettoria, vale infatti

$$a_c = \frac{v^2}{r}\ . \tag{1.18}$$

Il moto circolare uniforme è un moto periodico; il periodo T del moto è il tempo impiegato a percorrere un giro completo; si definisce, inoltre, *frequenza* ν il numero di giri percorsi nell'unità di tempo; se l'unità di tempo è il secondo, l'unità di misura della frequenza è detto hertz (Hz); spesso si usa anche indicare la frequenza in giri al minuto. Valgono quindi le relazioni

$$\nu = \frac{1}{T} \tag{1.19}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r \nu\ .$$

Spesso conviene descrivere la cinematica del moto circolare usando grandezze angolari; fissato un semiasse x delle ascisse con origine in O, la posizione del punto materiale P è individuata dall'angolo θ formato dal semiasse di riferimento ed il vettore $\boldsymbol{OP}$, come in figura 1.8; l'angolo θ viene misurato in radianti e definito dal rapporto dell'arco di circonferenza ℓ percorso ed il raggio r;

$$\theta = \frac{\ell}{r}\ .$$

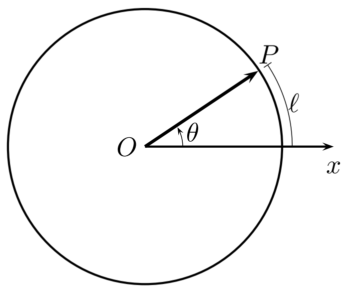


Figura 1.8: La coordinata angolare.

Si definisce inoltre la *velocità angolare* ω come l'angolo percorso nell'unità di tempo; vale quindi

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

da cui si ottengono

$$\omega = \frac{v}{r} = \frac{2\pi}{T} \tag{1.20}$$

$$a_c = \omega^2 r = \frac{4\pi^2 r}{T^2} \ . \tag{1.21}$$

È spesso è utile definire il vettore velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ che ha modulo ω, direzione perpendicolare al piano del moto e verso quello dal quale il moto di rotazione avviene in senso antiorario.

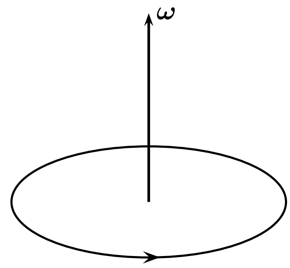


Figura 1.9: Il vettore $\boldsymbol{\omega}$.

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Supponendo che l'orbita del moto di rivoluzione terrestre attorno al Sole sia una circonferenza, determinare la velocità e l'accelerazione della Terra.

Soluzione

Usando i valori riportati in appendice A si trova

$$T = 3.156 \cdot 10^7\,\mathrm{s} \qquad , \qquad r = 1.496 \cdot 10^8\,\mathrm{m}$$

quindi

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 29.78\,\mathrm{m/s} \qquad , \qquad a = \frac{v^2}{r} = 2.810 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m/s^2} \ .$$

Problema 2

Una giostra compie tre giri al minuto;

① determinare la velocità angolare della giostra;

② determinare la velocità di un bambino che si trova a una distanza di 3.2 metri dal centro.

Soluzione

① Se la giostra compie tre giri al minuto, visto che in un minuto ci sono 60 secondi, impiega 20 secondi a compiere un giro; quindi $T = 20\,\mathrm{s}$; pertanto

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 0.31\,\mathrm{rad/s} \ .$$

② La velocità del bambino si trova usando la (1.20);

$$v = \omega r = 1\,\mathrm{m/s} \ .$$

1.3.3 Moto armonico

Il moto di un punto materiale P è armonico se l'accelerazione di P è un vettore diretto in ogni istante verso un centro O e di modulo proporzionale alla distanza di P da O; vale cioè

$$\boldsymbol{a} = -k\,\boldsymbol{OP} \ .$$

Il moto armonico è rettilineo non uniforme, è un'oscillazione fra due punti allineati ed equidistanti da O; la distanza massima A di P dal centro O è detta *ampiezza* del moto armonico.
La proiezione di un moto circolare su un diametro è armonico; quindi ogni moto circolare può essere

considerato come la composizione di due moti armonici ortogonali.
Il moto armonico è periodico e il periodo è legato alla costante di proporzionalità k; si definisce *pulsazione* ω del moto armonico la radice quadrata di k: $\omega = \sqrt{k}$; la scelta della lettera è giustificata dalla seguente relazione fra periodo e pulsazione:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \; .$$

Il numero di oscillazioni compiute in un secondo è detto *frequenza* ν del moto armonico. Frequenza e periodo sono legati dalla stessa relazione (1.19) valida per il moto circolare uniforme.
Fissato un asse delle ascisse con l'origine nel centro del moto armonico, le equazioni che danno le leggi del moto, della velocità e dell'accelerazione sono:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \theta_0) \quad , \quad v(t) = -A\,\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \theta_0) \quad , \quad a(t) = -A\,\omega^2\cos(\omega t + \theta_0) \; . \tag{1.22}$$

La costante θ_0, detta *fase iniziale*, dipende dalla posizione del punto materiale all'istante iniziale.
Dalle precedenti equazioni, si vede che il valore massimo del modulo della velocità è

$$v_{\scriptscriptstyle M} = A\omega \; ;$$

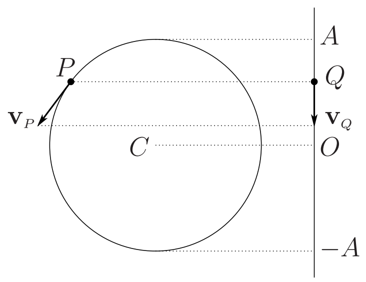
ed è assunto quando posizione e accelerazione sono nulle, cioè nel centro di oscillazione, mentre è nullo quando la distanza da O e il modulo dell'accelerazione sono massime.

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Il punto materiale P si muove di moto circolare uniforme su una circonferenza di raggio $r = 23\,\mathrm{cm}$ con velocità $v = 3.5\,\mathrm{m/s}$; la sua ombra Q proiettata su uno schermo si muove di moto armonico; determinare l'ampiezza, il periodo e la massima velocità di Q.

Soluzione



Con riferimento alla figura, il punto Q si muove di moto armonico avente per centro la proiezione sullo schermo del centro C della circonferenza e per ampiezza il raggio della circonferenza; quindi

$$A = r = 0.23\,\mathrm{m} \; .$$

Il periodo del moto armonico è uguale al periodo del moto circolare, quindi

$$T = \frac{2\pi r}{v} = 0.41\,\mathrm{s} \; ;$$

dal valore del periodo si ottiene la pulsazione e quindi la massima velocità:

$$v_{\scriptscriptstyle M} = \omega A = \frac{2\pi}{T}\,A = v = 3.5\,\mathrm{m/s} \; ;$$

si osservi che la velocità massima coincide con la velocità del moto circolare.

Problema 2

Un punto materiale compie una oscillazione armoniche in 4 secondi di ampiezza $A = 20\,\mathrm{cm}$, sapendo che all'istante $t = 0\,\mathrm{s}$ si trova nella posizione $x_0 = 10\,\mathrm{cm}$, determinare posizione, velocità e accelerazione all'istante $t = 7\,\mathrm{s}$.

Soluzione

Poiché vale $\omega = 2\pi\nu$, utilizzando la prima delle (1.22), all'istante iniziale $t = 0\,\mathrm{s}$, si ha

$$x(0) = A\cos(2\pi\nu\cdot 0 + \theta_0) = x_0 \qquad \longrightarrow \qquad \cos\theta_0 = \frac{x_0}{A} = \frac{1}{2} \qquad \longrightarrow \qquad \theta_0 = \frac{\pi}{3} \; .$$

Quindi

$$x(t) = A\cos\left(2\pi\nu t + \frac{\pi}{3}\right) \quad , \quad v(t) = -2\pi\nu A \,\mathrm{sen}\left(2\pi\nu t + \frac{\pi}{3}\right) \quad , \quad a(t) = -4\pi^2\nu^2 A\cos\left(2\pi\nu t + \frac{\pi}{3}\right)$$

e quindi, osservando che $\nu = 0.25\,\mathrm{Hz}$, si ottiene

$$x(7) = 0.2\cos\frac{149\pi}{6} = -0.2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = -0.17\,\mathrm{cm}\ .$$

1.3.4 Esercizi

Moto parabolico

✍ **Es. 1** — Un proiettile viene sparato dal suolo con velocità iniziale di componenti $v_{0x} = 35\,\mathrm{m/s}$ e $v_{0y} = 42\,\mathrm{m/s}$; determinare

a) la gittata;
b) l'altezza massima raggiunta:
c) il modulo della velocità v con cui ricade al suolo.

✍ **Es. 2** — Un punto materiale viene lanciato dal suolo con un angolo di 30° sull'orizzontale; sapendo che ricade a terra a una distanza $D = 150\,\mathrm{m}$ dal punto di lancio determinare

a) il modulo v_0 della velocità di lancio:
b) la massima altezza h_M raggiunta dal punto materiale.

✍ **Es. 3** — Una pallina rotola su una superficie orizzontale alla velocità costante $v_0 = 50\,\mathrm{cm/s}$; giunta sul bordo del tavolo cade a terra. Sapendo che tocca terra a una distanza $D = 20\,\mathrm{cm}$ dal tavolo, determinare

a) l'altezza del tavolo;
b) il tempo impiegato a cadere;
c) la velocità finale.

☞ **Es. 4** — Un fanciullo vuole colpire con una freccia una mela che si trova sul ramo di un albero ad un'altezza $h = 4\,\mathrm{m}$ e a una distanza $D = 10\,\mathrm{m}$; sapendo che la velocità iniziale della freccia ha componente orizzontale $v_{0x} = 10\,\mathrm{m/s}$; determinare

a) la componente verticale v_{0y} della velocità iniziale;
b) l'angolo α formato dalla freccia con l'orizzontale nel momento in cui viene scoccata.

☞ **Es. 5** — Un bombardiere vola ad un'altezza $h = 5000\,\mathrm{m}$ dal suolo ad una velocità costante $v_0 = 800\,\mathrm{km/h}$;

a) determinare la distanza D dalla verticale sul bersaglio il bombardiere deve sganciare il suo ordigno;
b) determinare la velocità v^* di impatto;
c) rispondere alle due domande precedenti nel caso in cui il bombardiere stia volando contro un vento avente velocità $v_V = 60\,\mathrm{km/h}$.

☞ **Es. 6** — Un motociclista percorre una strada alla velocità costante $v_0 = 60\,\mathrm{km/h}$, quando incontra un fosso largo $D = 2\,\mathrm{m}$; dopo il fosso la strada continua ad un livello piú basso di $h = 20\,\mathrm{cm}$;

a) verificare che il motociclista riesca a saltare il fosso;
b) determinare a che distanza d dal bordo del fosso il motociclista atterra;
c) determinare la velocità minima che il motociclista deve avere per riuscire a saltare il fosso.

☞ **Es. 7** — Willy il coyote, mentre sta inseguendo Bip-Bip, cade inavvertitamente in un dirupo da un'altezza $h = 55\,\mathrm{m}$; sapendo che il coyote stava correndo con velocità di modulo $v = 10\,\mathrm{m/s}$, determinare:

a) la lunghezza orizzontale della sua traiettoria;

b) il tempo di volo.

✐ **Es. 8** — Un merlo si trova sulla sommità di un tetto inclinato 45°; All'istante $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ il merlo sputa un nòcciolo di ciliegia verso l'alto con un'inclinazione di $\alpha = 30°$ e una velocità di modulo $v_0 = 1.2\,\mathrm{m/s}$; determinare

a) a che distanza d dalla sommità il nòcciolo colpisce il tetto;

b) l'istante t in cui il nòcciolo raggiunge il punto piú alto della traiettoria.

✐ **Es. 9** — Un giavellotto viene lanciato con un'inclinazione di un angolo $\alpha = 35°$ rispetto al piano orizzontale; determinare:

a) il modulo della velocità che si deve imprimere al giavellotto per ottenere un lancio con una gittata $G = 90\,\mathrm{m}$ (si assuma che il giavellotto parta al livello del suolo);

b) la quota massima raggiunta dal giavellotto.

✐ **Es. 10** — Un calciatore scommette con un amico di essere in grado di calciare un pallone alla distanza $d = 250\,\mathrm{m}$; egli esegue la prova imprimendo al pallone (inizialmente posato al suolo) una velocità di modulo v_0, con un'inclinazione di un angolo $\alpha = 45°$ rispetto alla direzione orizzontale;

a) determinare v_0;

b) l'altezza massima raggiunta.

✐ **Es. 11** — Un giocatore di pallacanestro tira il pallone da una quota $h = 2.85\,\mathrm{m}$ verso il canestro, che si trova ad un'altezza $H = 3.05\,\mathrm{m}$ dal suolo, con un'inclinazione di un angolo $\alpha = 30°$, da una distanza $d = 4.0\,\mathrm{m}$; determinare:

a) il modulo v_0 della velocità iniziale che occorre imprimere al pallone per segnare;

b) la quota massima h_M raggiunta dal pallone durante il volo.

☞ **Es. 12** — Una palla viene lanciata dal suolo verso un muro distante $d = 22\,\mathrm{m}$; sapendo che il modulo della velocità iniziale della palla è $v_0 = 25\,\mathrm{m/s}$ e l'angolo formato dal vettore $\boldsymbol{v}_0$ con l'orizzontale è $\alpha = 40°$; determinare:

a) a quale altezza h da terra la palla colpisce il muro;

b) se la palla raggiunge il muro prima o dopo avere superato il punto più alto della sua traiettoria.

✐ **Es. 13** — Un'automobilina giocattolo viene lanciata con una velocità iniziale orizzontale di modulo $v_0 = 4.2\,\mathrm{m/s}$ verso una rampa di scale i cui gradini sono alti $h = 17\,\mathrm{cm}$ e profondi $b = 30\,\mathrm{cm}$; determinare

a) su quale gradino va a cadere l'automobilina;

b) in tempo di volo.

☞ **Es. 14** — Un campione di getto del peso lancia l'attrezzo dall'altezza $h = 1.80\,\mathrm{m}$ dal suolo; la velocità iniziale $\boldsymbol{v}_0$ forma un angolo $\alpha = 40°$ rispetto all'orizzontale; sapendo il peso cade a una distanza $D = 22\,\mathrm{m}$, determinare il modulo della velocità iniziale.

Moto circolare uniforme

✍ **Es. 1** — Un punto materiale si muove di moto uniforme lungo una traiettoria circolare avente raggio r percorrendo n giri in t secondi; sapendo che $r = 24\,\mathrm{cm}$, $n = 7$, $t = 5.2\,\mathrm{s}$, determinare

a) velocità;
b) accelerazione;
c) frequenza;
d) periodo.

☞ **Es. 2** — Un ragazzino fa roteare un sasso legato a una corda lunga $\ell = 0.52\,\mathrm{m}$ al ritmo di 1.6 giri al secondo; determinare

a) i moduli delle velocità angolare e lineare del sasso;
b) periodo e modulo dell'accelerazione centripeta del sasso.

☞ **Es. 3** — Un ragazzino fa roteare un sasso legato a una corda lunga $\ell = 0.8\,\mathrm{m}$; sapendo che il modulo dell'accelerazione centripeta è $a_c = 1.4\,\mathrm{m/s^2}$, determinare

a) i moduli delle velocità angolare e lineare del sasso;
b) come variano i moduli delle velocità angolare e lineare del sasso se la corda fosse piú corta di $10\,\mathrm{cm}$ e l'accelerazione fosse la stessa.

✐ **Es. 4** — Un ragazzino fa ruotare un sasso legato ad uno spago lungo $\ell = 20\,\mathrm{cm}$ che forma con la verticale un angolo $\alpha = 30°$; il moto avviene su un piano orizzontale che si trova ad un'altezza $h = 1.2\,\mathrm{m}$ dal suolo; ad un dato istante il sasso si scioglie dallo spago e cade a terra a una distanza $d = 1.8\,\mathrm{m}$; determinare il periodo del moto di rotazione.

☞ **Es. 5** — Una giostra compie 6.0 giri al minuto; tre bambini si trovano uno al centro, uno a distanza $d_2 = 1.8\,\mathrm{m}$ e uno a distanza $d_3 = 2.5\,\mathrm{m}$ dal centro; determinare

a) la velocità angolare e quella lineare di ciascun bambino;
b) periodo e accelerazione centripeta di ogni bambino.

☞ **Es. 6** — Due bambini su una giostra sono soggetti rispettivamente alle accelerazioni centripete di moduli $a_1 = 1.5\,\mathrm{m/s^2}$ e $a_2 = 2.0\,\mathrm{m/s^2}$; Sapendo che in 1 minuto la giostra compie 6 giri, calcolare per ciascuno dei due bambini

a) la distanza dal centro di rotazione della giostra;
b) la velocità lineare.

☞ **Es. 7** — Un satellite artificiale percorre un'orbita circolare a una distanza $d = 1800\,\mathrm{km}$ dalla superficie della Terra; sapendo che la sua accelerazione è $a_c = 6.35\,\mathrm{m/s^2}$, determinare

a) la velocità angolare e la velocità lineare del satellite;
b) il periodo di rivoluzione del satellite ed esprimerlo in minuti.

☞ **Es. 8** — Un satellite geostazionario, che compie un'orbita circolare in un giorno, ha accelerazione centripeta di modulo $a_c = 0.223\,\mathrm{m/s^2}$; determinare:

a) il raggio dell'orbita in chilometri;
b) la velocità lineare del satellite.

✍ **Es. 9** — Determinare il modulo dell'accelerazione centripeta della Luna, supponendo l'orbita circolare.

✍ **Es. 10** — Determinare i moduli della velocità e dell'accelerazione centripeta della Terra nel suo moto attorno al Sole, supponendo l'orbita circolare.

✍ **Es. 11** — Durante la missione Apollo 11 la navicella in orbita intorno alla Luna compiva una rivoluzione con periodo $T = 6.5 \cdot 10^3$ s, con un'accelerazione centripeta di modulo $a_c = 1.7\,\mathrm{m/s^2}$; determinare

a) la velocità angolare e la velocità lineare del satellite;

b) il raggio dell'orbita.

✍ **Es. 12** — Calcolare i moduli della velocità lineare e dell'accelerazione centripeta di un ragno che si trova sulla punta della lancetta dei secondi dell'orologio di un campanile, lunga $\ell = 1.6\,\mathrm{m}$.

☞ **Es. 13** — Un astronauta deve essere sottoposto per 1 minuto a un'accelerazione di modulo $a = 4g$ con un dispositivo rotante di periodo $T = 3.2\,\mathrm{s}$; determinare quanto deve essere il raggio del suo moto, e qual la sua velocità.

☞ **Es. 14** — L'elica di un aereo, lunga $\ell = 0.80\,\mathrm{m}$, ruota compiendo 20 giri al secondo; determinare

a) i moduli della velocità e dell'accelerazione della punta dell'elica;

b) la frequenza di rotazione necessaria perché il modulo della velocità sia $v = 800\,\mathrm{m/s}$;

c) come varia v se l'elica, mantenendo la stessa frequenza di rotazione, ha lunghezza doppia.

☞ **Es. 15** — Una lavatrice ha il cestello di diametro $d = 48.0\,\mathrm{cm}$; la biancheria viene asciugata adeguatamente se sottoposta a un'accelerazione centripeta di modulo $a_c = 36.0\,\mathrm{m/s^2}$; determinare

a) quanti giri al minuto deve compiere il cestello per asciugare la biancheria;

b) la velocità lineare del cestello.

☞ **Es. 16** — Un frullatore ha un'elica le cui punte si muovono con una velocità di modulo $v = 2.8\,\mathrm{m/s}$ e con un periodo $T = 0.2\,\mathrm{s}$; determinare

a) il raggio dell'elica ed esprimerla in centimetri;

b) quanto dovrebbe essere il raggio dell'elica affinché, a parità di periodo, la punta abbia un'accelerazione di modulo $a_c = 100\,\mathrm{m/s^2}$.

Moto armonico

✍ **Es. 1** — Un punto materiale oscilla di moto armonico intorno alla posizione di equilibrio compiendo 4.25 oscillazioni in 5.22 secondi; sapendo che l'ampiezza dell'oscillazione è $A = 4.2\,\mathrm{cm}$, determinare

a) il periodo;

b) la pulsazione;

c) la velocità massima;

d) l'accelerazione massima.

☞ **Es. 2** — Un punto materiale compie oscillazioni armoniche; quando la sua distanza d dal centro delle oscillazioni è metà della ampiezza dell'oscillazione la sua accelerazione ha modulo $a = 1.2\,\mathrm{m/s^2}$; sapendo che $d = 12.5\,\mathrm{cm}$, determinare

a) il periodo;

b) la velocità nel centro delle oscillazioni.

✍ **Es. 3** — Le punte di un diapason oscillano di moto armonico intorno alla loro posizione di equilibrio con frequenza $\nu = 440\,\mathrm{Hz}$; sapendo che la loro velocità massima ha modulo $v = 220\,\mathrm{m/s}$ determinare l'ampiezza di oscillazione delle punte del diapason.

☞ **Es. 4** — Un cardellino si appoggia sull'estremità di un ramo il quale comincia ad oscillare di moto armonico con un ampiezza $A = 2.5\,\mathrm{cm}$; sapendo che vengono compiute 4 oscillazioni complete in 6 secondi; determinare

a) il periodo e la frequenza delle oscillazioni;

b) il modulo della velocità e dell'accelerazione all'istante $t = 3.0\,\mathrm{s}$.

☞ **Es. 5** — Una boa si muove di moto armonico sotto l'azione delle onde; sapendo che passa un'onda ogni 5.0 secondi, che la velocità massima della boa ha modulo $v = 0.26\,\mathrm{m/s}$ e che all'istante $t_0 = 0\,\mathrm{s}$ la boa si trova nella posizione di riposo, determinare la legge del moto della boa.

1.4 Moti relativi.

Dati due punti materiali P_1 e P_2 in moto rispetto ad un sistema di riferimento di origine O con velocità $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ e accelerazioni $\boldsymbol{a}_1$ e $\boldsymbol{a}_2$, si dice *moto relativo* di P_2 rispetto a P_1 il moto di P_2 nel sistema di riferimento in cui P_1 è fermo. Il vettore

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{P_1P_2} = \boldsymbol{OP_2} - \boldsymbol{OP_1}$$

è detto *posizione relativa* di P_2 rispetto a P_1; i vettori

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_1 \qquad , \qquad \boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_2 - \boldsymbol{a}_1$$

sono detti rispettivamente velocità e accelerazione relativa di P_2 rispetto a P_1.
Piú in generale, si considerino due sistemi di riferimento S ed S' rispettivamente di origini O e O' e assi x, y, z e x', y', z'. Si supponga inoltre che il moto di S' rispetto ad S sia generico e sia, in ogni istante t, $v_{O'}$ la velocità di O' rispetto a O e sia $\boldsymbol{\omega}$ la velocità angolare con cui S' ruota rispetto a S. Indicando senza apice le grandezze misurate in S e con apice quelle misurate in S' valgono in generale le relazioni

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{OP} = \boldsymbol{OO'} + \boldsymbol{O'P} \\
&\boldsymbol{v}_P = \boldsymbol{v}_{O'} + \boldsymbol{v}'_P + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{O'P} \\
&\boldsymbol{a}_P = \boldsymbol{a}_{O'} + \boldsymbol{a}'_P + 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'_P - \omega^2 \boldsymbol{O'P} \ .
\end{aligned} \tag{1.23}$$

Nel caso in cui S' si muova di moto traslatorio rispetto ad S si pone $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{0}$; nel caso in cui S' si muova di moto rotatorio rispetto ad S si pone $\boldsymbol{v}_{O'} = \boldsymbol{0}$. Nell'ultima delle (1.23), si definiscono rispettivamente *accelerazione di Coriolis* e *accelerazione centrifuga* le quantità

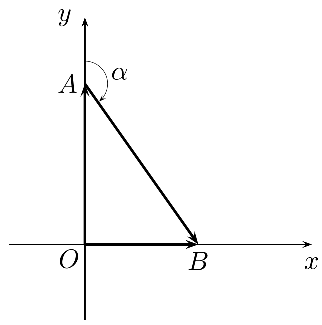
$$\boldsymbol{a}_{CO} = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'_P \qquad , \qquad \boldsymbol{a}_c = -\omega^2 \boldsymbol{O'P} \ .$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

L'aereo A sta volando verso nord alla velocità costante $v_A = 850\,\mathrm{km/h}$; un secondo aereo B viaggia alla stessa quota di A muovendosi verso est alla velocità costante $v_B = 600\,\mathrm{km/h}$; determinare la traiettoria e la velocità di B rispetto ad A.

Soluzione



Si riferisce il moto ad un sistema di assi cartesiani con l'asse x orientato verso est e l'asse y orientato verso nord; supponendo, per semplicità, che all'istante $t = 0$ i due aerei si trovassero entrambi nell'origine degli assi, le posizioni dei due aerei al generico istante t sono date dai vettori

$$\boldsymbol{OA}(t) = y_A \hat{\boldsymbol{\jmath}} = v_A t \hat{\boldsymbol{\jmath}} \qquad , \qquad \boldsymbol{OB}(t) = x_B \hat{\boldsymbol{\imath}} = v_B t \hat{\boldsymbol{\imath}} \ .$$

La posizione di B relativa ad A è quindi data dal vettore

$$\boldsymbol{AB}(t) = \boldsymbol{OB} - \boldsymbol{OA} \ .$$

Come si deduce dalla figura, il moto di B rispetto ad A è un moto rettilineo uniforme di avente la direzione ed il verso del vettore AB; questa direzione forma con il nord un angolo α tale che sia

$$\alpha = 90° + \operatorname{arctg} \frac{v_A}{v_B} = 145° \ .$$

La velocità di B rispetto ad A ha modulo dato da

$$v_{BA} = \sqrt{v_A^2 + v_B^2} = 1040 \, \mathrm{km/h} \ .$$

Problema 2

Su un treno in moto con velocità costante di modulo $v_t = 84 \, \mathrm{km/h}$ un bambino lascia cadere una pallina da un'altezza $h = 1.25 \, \mathrm{m}$. Determinare le leggi del moto della pallina rispetto ad un osservatore O' sul treno e rispetto ad un osservatore che guardi la scena stando fermo sulla banchina di una stazione.

Soluzione

Rispetto ad un osservatore sul treno, per esempio lo stesso bambino, la pallina cade verticalmente di moto uniformemente accelerato con accelerazione g; indicando con S' il sistema di riferimento la legge del moto della pallina P è quindi

$$y'_P(t) = h - \frac{1}{2} g t^2 = 1.25 - 4.91 t^2 \ .$$

Per determinare la legge del moto rispetto ad un osservatore esterno O, il cui sistema di riferimento viene denotato con S, occorre utilizzare la prima delle (1.23); indicando con x l'asse cartesiano di riferimento allineato con le rotaie, la posizione dell'osservatore O' rispetto ad O è data da

$$x_{O'}(t) = v_t t \ .$$

Quindi la posizione della pallina P rispetto ad O è data dal vettore $\boldsymbol{OP}$ di componenti

$$\boldsymbol{OP} = (x_{O'}, y'_P) \ ;$$

rispetto ad O la pallina pertanto si muove di un moto che è la composizione di un moto orizzontale rettilineo uniforme ed un moto verticale uniformemente accelerato; si ha dunque un moto parabolico.

***Problema 3**

Un punto materiale P si muove verso il centro di un giostra rotante che compie cinque giri ogni due secondi; se il modulo della velocità di P rispetto al centro O della giostra è costante e vale $v'_p = 1.37 \, \mathrm{m/s}$ determinare velocità e accelerazione di P rispetto ad un osservatore esterno alla giostra, quando la distanza di P dal centro è $r = 15.6 \, \mathrm{cm}$.

Soluzione

In questo caso il sistema di riferimento S', solidale alla giostra, ruota senza traslare; è possibile quindi fissare gli assi dei due sistemi di riferimento in modo che le origini coincidano, cioè che valga $O' \equiv O$; e valgono

$$\boldsymbol{v}_{O'} = \boldsymbol{a}_{O'} = \boldsymbol{0} \ ;$$

inoltre, poiché P si muove sulla giostra, e quindi nel sistema S', di moto uniforme, vale anche $\boldsymbol{a}'_p = \boldsymbol{0}$. Per determinare la velocità rispetto al sistema S non rotante si usa la seconda delle (1.23):

$$\boldsymbol{v}_p = \boldsymbol{v}'_p + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{OP} \ .$$

Supponendo che la rotazione della giostra avvenga in verso antiorario il vettore $\boldsymbol{\omega}$ è uscente dal foglio e quindi i due addendi del membro di destra della equazione precedente sono vettori perpendicolari e orientati come rappresentato nella figura (a); il modulo di $\boldsymbol{v}_p$ è quindi

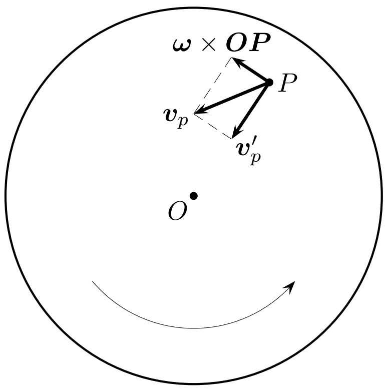
$$v_p = \sqrt{{v'_p}^2 + \omega^2 r^2} \ .$$

Resta da determinare il modulo di $\boldsymbol{\omega}$ osservando che il periodo di rotazione è $T = \frac{2}{5}\mathrm{s} = 0.4\,\mathrm{s}$ e quindi

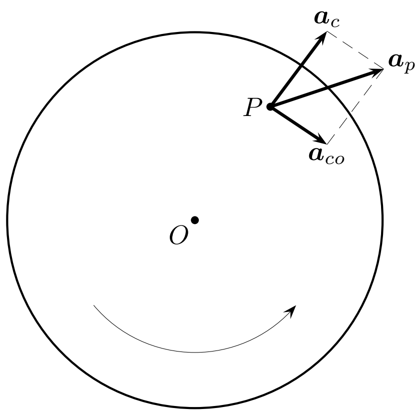
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 15.7/\mathrm{s} \ .$$

Cosí si ottiene

$$v_p = 7.88\,\mathrm{m/s} \ .$$



(a)



(b)

Per quanto riguarda l'accelerazione si usa la terza delle (1.23) che, nel caso presente, diventa

$$\boldsymbol{a}_p = \boldsymbol{a}_{co} + \boldsymbol{a}_c = 2\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{v}'_p - \omega^2 \boldsymbol{OP} \ ;$$

i vettori accelerazione di Coriolis e centrifuga sono perpendicolari e sono rappresentati nella figura (b); il modulo della loro somma è pertanto

$$a_p = \sqrt{4\omega^2 {v'_p}^2 + \omega^4 r^2} = 40\,\mathrm{m/s^2} \ .$$

1.4.1 Esercizi

MOTI RELATIVI

✍ **Es. 1** — Un ascensore sta scendendo alla velocità costante di modulo $v_a = 1.2\,\mathrm{m/s}$; uno dei passeggeri lascia cadere una sferetta metallica da un'altezza $h = 136\,\mathrm{cm}$ dal pavimento dell'ascensore; rispetto ad un sistema di riferimento fermo, all'istante in cui la sferetta colpisce il pavimento dell'ascensore, determinare

a) il modulo della velocità;

b) i modulo dell'accelerazione.

✍ **Es. 2** — Ripetere l'esercizio precedente nell'ipotesi che l'ascensore sia in caduta libera.

✍ **Es. 3** — Utilizzando i valori riportati in appendice B, determinare l'accelerazione di gravità g^* sulla superficie terrestre all'equatore tenendo conto della correzione dovuta all'accelerazione centripeta causata dal moto di rotazione terrestre.

☞ **Es. 4** — Un nuotatore attraversa un fiume di larghezza $d = 240\,\mathrm{m}$, nuotando perpendicolarmente alle rive con velocità rispetto all'acqua avente modulo $v_n = 0.75\,\mathrm{m/s}$; sapendo che la corrente del fiume si muove con velocità di modulo $v_f = 2.4\,\mathrm{m/s}$, determinare

a) il modulo v della velocità del nuotatore rispetto alla riva;

b) il tempo t impiegato ad attraversare il fiume;

c) la distanza D percorsa dal nuotatore misurata da un osservatore a riva.

☞ **Es. 5** — Un motoscafo si muove sul fiume dell'esercizio precedente con una velocità di modulo $v_m = 5\,\mathrm{m/s}$ determinare la direzione verso cui deve muoversi perché la traiettoria vista da un osservatore a riva risulti perpendicolare alle rive.

Capitolo 2

Dinamica del punto materiale

La dinamica studia il moto dei punti materiali mettendo in relazione le forze agenti e le caratteristiche del moto risultante. In particolare l'interesse della teoria, sviluppata da Newton, è quello di ricavare deterministicamente le leggi del moto una volta che siano note tutte le forze agenti su di essi.

2.1 Leggi della dinamica

Newton enunciò tre leggi; la prima definisce il sistema di riferimento inerziale, la seconda mette in relazione la forza totale agente su un punto materiale con la sua accelerazione, la terza chiarisce la relazione fra le forze con cui interagiscono due punti materiali.

2.1.1 Principio d'inerzia

L'enunciato del principio è il seguente.

Un punto materiale che non interagisce con altri punti materiali si muove di moto rettilineo e uniforme.

Questo enunciato non è valido in ogni sistema di riferimento: si definisce inerziale un sistema di riferimento in cui il principio ora enunciato sia valido. Per questo principio normativo non vi sono esercizi.

2.1.2 Legge di Newton

Se m indica la massa di un corpo e $\boldsymbol{F}$ la risultante delle forze agenti su di esso, la legge di Newton, nota anche come *legge fondamentale della dinamica*, si scrive nel modo seguente

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} \ , \tag{2.1}$$

ove $\boldsymbol{a}$ è il vettore accelerazione.
La precedente equazione va considerata come *definizione* di forza agente su di un punto materiale. Dalla sua definizione risulta che l'unità di misura della forza è $\mathrm{kg\,m/s^2}$, che viene convenzionalmente detto *newton*, simbolo N.

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Un corpo di massa $m = 6.3\,\mathrm{kg}$ si muove con velocità uniforme $v_0 = 3.7\,\mathrm{m/s}$ quando comincia ad agire su di esso una forza $\boldsymbol{F}$ di modulo $F = 54\,\mathrm{N}$ nella direzione del moto ma in verso contrario; determinare il quanto tempo il corpo si ferma e quanto spazio percorre da quando è iniziata l'azione della forza.

Soluzione

Usando la (2.1), è possibile determinare l'accelerazione, che risulta costante e il cui modulo è

$$a = \frac{F}{m} \ ;$$

si osservi che la forza ha il verso opposto al moto e cosí anche l'accelerazione; quindi si tratta di una decelerazione. Il moto è dunque uniformemente accelerato con accelerazione negativa; convenendo di scegliere come istante zero quello in cui comincia ad agire la forza, la legge del moto e la legge della velocità diventano

$$x(t) = v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 \qquad , \qquad v(t) = v_0 - at \ ;$$

dalla seconda si ottiene l'istante t_1 in cui il corpo si ferma, cioè in cui la sua velocità è zero:

$$t_1 = \frac{v_0}{a} = \frac{m v_0}{F} = 0.43\,\mathrm{s} \ ;$$

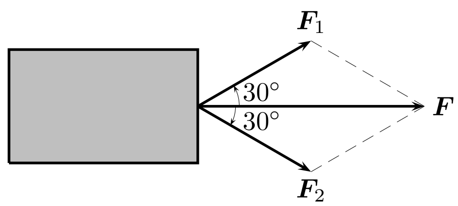
sostituendo questo risultato nella prima si trova la posizione all'istante dell'arresto e quindi lo spazio percorso:

$$x(t_1) = \frac{v_0^2}{2a} = \frac{m v_0^2}{2F} = 0.80\,\mathrm{m} \ .$$

Problema 2

Un carrello su ruote di massa $m = 23\,\mathrm{kg}$ è messo in movimento da fermo grazie a due forze uguali in modulo che tirano lungo direzioni tali da formare angoli $\alpha = 30°$ con la direzione del moto; sapendo che le ruote girano senza attrito e che all'istante $t_1 = 5.0\,\mathrm{s}$ la distanza percorsa è $d = 4.0\,\mathrm{m}$; si determini il modulo delle due forze.

Soluzione



Dette $\boldsymbol{F}_1$ ed $\boldsymbol{F}_2$ le due forze, con riferimento alla figura, la loro risultante è un vettore diretto nella direzione e nel verso del moto e di modulo $F = \sqrt{3}\,F_1$; questa forza muove il carrello con un'accelerazione data dalla (2.1); il moto del carrello è quindi uniformemente accelerato; la distanza percorsa all'istante t_1 è quindi data da

$$d = \frac{1}{2}\frac{F}{m}t_1^2 = \frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}F_1}{m}t_1^2 \ ,$$

quindi

$$F_1 = \frac{2md}{\sqrt{3}\,t_1^2} = 4.2\,\mathrm{N} \ .$$

Problema 3

La Terra e la Luna si attirano vicendevolmente con una forza media di modulo $F = 1.983 \cdot 10^{20}\,\mathrm{N}$; determinare le accelerazioni dei due corpi celesti.

Soluzione

Le accelerazioni della Terra e della Luna sono date dalla (2.1), utilizzando i valori riportati in appendice B si trova:

$$a_T = \frac{F}{m_T} = 3.320 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m/s^2} \qquad , \qquad a_L = \frac{F}{m_L} = 2.699 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2} \ ;$$

si vede dunque che l'accelerazione della Luna è piú di ottanta volte maggiore dell'accelerazione della Terra; con questa approssimazione in mente è corretto dire che la Luna gira attorno ad una Terra ferma.

2.1.3 Principio di azione e reazione

Se il punto materiale 1 agisce sul punto materiale 2 con una forza $\boldsymbol{F}_{12}$ anche il punto 2 agisce sul corpo 1 con una forza $\boldsymbol{F}_{21}$ uguale ed opposta, vale cioè

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} \ .$$

Utilizzando la legge di Newton (2.1) si ottiene la seguente

$$m_1\boldsymbol{a}_1 = -m_2\boldsymbol{a}_2 \ ;$$

se due punti materiali interagiscono solo fra loro, quindi, le loro accelerazioni sono parallele, hanno versi opposti e i loro moduli sono inversamente proporzionali alle rispettive masse.

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Due ragazzi, assimilabili a punti materiali, hanno masse $m_1 = 45\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 55\,\mathrm{kg}$ giocano su un lago ghiacciato; il primo spinge il secondo con una forza costante di modulo $F = 120\,\mathrm{N}$; sapendo che la spinta dura un tempo $t = 0.5\,\mathrm{s}$, determinare le velocità finali dei due ragazzi.

Soluzione

Tenendo conto della (2.1), i moduli delle due accelerazioni sono

$$a_1 = \frac{F}{m_1} \qquad , \qquad a_2 = \frac{F}{m_2}$$

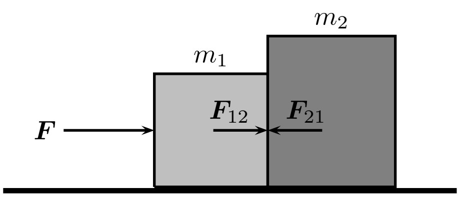
quindi

$$v_1 = a_1 t = 1.3\,\mathrm{m/s} \qquad , \qquad v_2 = a_2 t = 1.1\,\mathrm{m/s} \ .$$

Problema 2

Due casse sono poste a contatto su di un piano orizzontale privo di attrito; le loro masse sono $m_1 = 2.4\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 3.6\,\mathrm{kg}$; le casse sono messe in movimento da una forza di modulo $F = 12\,\mathrm{N}$ che agisce sulla prima cassa; determinare l'intensità F_c della forza di contatto agente fra le casse e la loro accelerazione.

Soluzione



Con riferimento alla figura, le due casse si spingono vicendevolmente con due forze $\boldsymbol{F}_{12}$ ed $\boldsymbol{F}_{21}$ opposte di modulo aventi lo stesso modulo; posto dunque $\|\boldsymbol{F}_{12}\| = \|\boldsymbol{F}_{12}\| = F_c$, la (2.1) applicata alle due casse, che si muovono insieme e quindi con la stessa accelerazione, diventa

$$\begin{cases} F_c = m_2 a \\ F - F_c = m_1 a \end{cases}$$

ricavando l'accelerazione dalla prima equazione e sostituendola nella seconda si trova

$$F - F_c = \frac{m_1}{m_2} F_c \qquad \longrightarrow \qquad F_c = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F = 7.2\,\mathrm{N}$$

e quindi

$$a = \frac{F_c}{m_2} = 2.0\,\mathrm{m/s} \ .$$

2.1.4 Esercizi

Legge di Newton

✍ **Es. 1** — Un uomo tira orizzontalmente un carretto di massa $m = 22\,\mathrm{kg}$, con una forza di modulo $F = 12\,\mathrm{N}$; determinare l'accelerazione del carretto.

✍ **Es. 2** — Un'automobile con due persone a bordo ha complessivamente massa $m = 1355\,\mathrm{kg}$ partendo da ferma raggiunge la velocità $v = 100\,\mathrm{km/h}$ nel tempo $t = 12.5\,\mathrm{s}$; determinare la forza agente supponendo che sia costante.

☞ **Es. 3** — Un genitore trascina il figlio su una slitta che scivola sul ghiaccio applicando una forza di modulo $F = 125\,\mathrm{N}$ inclinata di $60°$ rispetto all'orizzontale; sapendo che complessivamente la slitta e il figlio hanno una massa $m = 42\,\mathrm{kg}$ determinarne l'accelerazione.

✍ **Es. 4** — Un oggetto di massa m_1 viene sollevato da un montacarichi con un'accelerazione costante diretta verso l'alto; ad esso è appeso un oggetto di massa m_2; determinare quali sono le forze agenti su m_1 e se la loro risultante è nulla.

✍ **Es. 5** — Un uomo tira una cassa di massa m con una forza orizzontale di modulo $F = 60\,\mathrm{N}$; sapendo che inizialmente la cassa è ferma e che dopo un tempo $t = 5.6\,\mathrm{s}$ ha una velocità di $v = 3.5\,\mathrm{m/s}$, determinare la massa della cassa.

☞ **Es. 6** — Un furgone avente massa $M = 700\,\mathrm{kg}$ contiene 10 sacchi di cemento ciascuno di massa $m = 40.0\,\mathrm{kg}$; sapendo che il motore esercita una forza di trazione di modulo $F = 1850\,\mathrm{N}$, determinare

a) il modulo F_1 della forza che il furgone esercita su ciascuno dei sacchi;

b) il modulo F_2 della forza che il furgone esercita su ciascuno dei sacchi, nel caso in cui il furgone stia decelerando con un'accelerazione avente lo stesso modulo del caso a).

Principio di azione e reazione

✍ **Es. 1** — Un magnete A di massa $m_a = 4.5\,\mathrm{kg}$ attira un punto materiale B di ferro con una forza costante di modulo $F = 3.2\,\mathrm{N}$; sapendo che il punto materiale ha massa $m_b = 2.5\,\mathrm{kg}$, determinare le accelerazioni del magnete e del punto materiale e la distanza d_a percorso dal magnete nel tempo in cui il punto materiale percorre la distanza $d_b = 2.0\,\mathrm{cm}$.

☞ **Es. 2** — Tre casse A, B e C sono poste a contatto su un piano orizzontale privo di attrito; le loro masse, da destra a sinistra, sono $m_a = 3.4\,\mathrm{kg}$, $m_b = 5.7\,\mathrm{kg}$ ed m_c; le casse sono messe in movimento da una forza $\boldsymbol{F}$ che spinge la cassa A; sapendo che $F = 9.7\,\mathrm{N}$ e che l'accelerazione delle tre masse è $a = 0.54\,\mathrm{m/s^2}$, determinare il valore della massa m_c, il modulo F_b della forza con cui A spinge B ed il modulo F_c della forza con cui B spinge C.

✍ **Es. 3** — Due atleti lottatori di masse $m_1 = 85\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 78\,\mathrm{kg}$, ad un certo istante si spingono sapendo che il primo si stacca dal secondo con un'accelerazione $a_1 = 1.7\,\mathrm{m/s^2}$ determinare

a) l'accelerazione del secondo;

b) quale dei due sta esercitando una forza di modulo maggiore.

✍ **Es. 4** — Sapendo che il modulo dell'accelerazione della Luna dovuta alla attrazione terrestre vale $a_L = 2.698 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m/s^2}$, determinare l'accelerazione della Terra dovuta all'attrazione lunare.

☞ **Es. 5** — Un furgone avente massa $m_1 = 1500\,\mathrm{kg}$ traina una roulotte di massa $m_2 = 800\,\mathrm{kg}$; sapendo che l'accelerazione del sistema dei due corpi ha modulo $a = 1.24\,\mathrm{m/s^2}$, determinare

a) la forza esercitata dal motore;

b) la forza subita dalla roulotte;

c) la forza subita dal furgone.

☞ **Es. 6** — Un uomo di massa $m_1 = 85\,\mathrm{kg}$ e un bambino di masas $m_2 = 27\,\mathrm{kg}$ sono in piedi uno di fronte all'altro su un lago ghiacciato; l'uomo esercita sul bambino una forza di modulo $F = 100\,\mathrm{N}$ per $t = 0.3\,\mathrm{s}$; determinare

a) i moduli delle accelerazioni dell'uomo e del bambino;

b) il modulo della velocità dell'uomo e quella del bambino dopo la spinta.

2.2 Applicazioni delle leggi della dinamica

La legge fondamentale della dinamica, equazione (2.1), permette, nota la risultante delle forze agenti su un punto materiale, di determinarne il moto. In questo capitolo si prendono in considerazione i casi piú semplici fra i moltissimi problemi della dinamica risolubili mediante la legge di Newton. Si tenga presente che la (2.1) vale esattamente per i punti materiali, ma è possibile applicarla anche per corpi estesi nel caso in cui le dimensioni del corpo non siano rilevanti per il problema, il che, nella pratica, significa che il corpo trasla senza ruotare. Negli esercizi che seguono, a tutti gli oggetti menzionati viene applicato il modello di punto materiale.

2.2.1 Forza peso

La forza peso è la forza con cui la Terra attira verso il centro i corpi che si trovano sulla sua superficie. È già noto che i corpi, sotto l'azione dell'attrazione terrestre si muovono tutti con la stessa accelerazione g; la forza peso $\boldsymbol{P}$ è proporzionale alla massa e vale

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g} \ . \tag{2.2}$$

Su un corpo celeste diverso dalla Terra, la forza di attrazione varia e quindi, per la stessa massa, varia il peso.
La forza di attrazione, e quindi l'accelerazione di gravità, varia anche con la distanza dal centro della Terra quindi sulla cima di un monte o su un aeroplano in volo il peso di un corpo cambia rispetto al suolo; ma varia anche con la latitudine a causa della non sfericità della Terra. In queste pagine si usa la convenzione di indicare con il simbolo $\boldsymbol{a}_G$ l'accelerazione di gravità in generale, riservando il simbolo $\boldsymbol{g}$ al valor medio sulla superficie terrestre. Salvo diverso avviso, tutti i problemi che seguono si intendono ambientati sulla superficie terrestre.

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Il modulo dell'accelerazione di gravità sulla cima del Monte Bianco è $a_G^{MB} = 9.792\,\mathrm{m/s^2}$; mentre sulla superficie lunare è $a_G^L = 1.6\,\mathrm{m/s^2}$; determinare il peso di un masso di massa $m = 32.7\,\mathrm{kg}$ sulla superficie terrestre, sulla cima del Monte Bianco e sulla superficie lunare.

Soluzione

Tenendo conto della (2.2), sulla Terra, sul Monte Bianco e sulla Luna si trova rispettivamente

$$P_T = mg = 321\,\mathrm{N} \qquad , \qquad P_{MB} = ma_G^{MB} = 320\,\mathrm{N} \qquad , \qquad P_L = ma_G^L = 52.3\,\mathrm{N} \ .$$

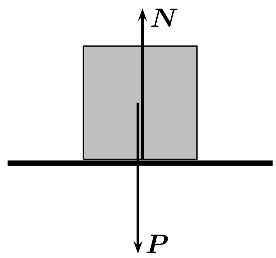
***Problema 2**

Una cassa di massa $m = 45.3\,\mathrm{kg}$ si trova, ferma su di una superficie orizzontale liscia;

① si determinino tutte le forze agenti sulla cassa;

② si risponda all'esercizio precedente nel caso in cui la cassa scivoli sulla superficie orizzontale con velocità costante.

Soluzione



① Sulla cassa agisce certamente la forza peso $\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{g}$; questa ha direzione perpendicolare alla superficie d'appoggio ed è orientata verso il basso; d'altra parte la cassa è ferma quindi la risultante delle forze agenti non può che essere nulla; quindi deve essere presente una forza uguale e contraria al peso; questa forza è fornita dalla coesione molecolare della superficie d'appoggio (nel momento in cui la forza peso fosse eccessiva, la superficie andrebbe in pezzi e non sarebbe piú in grado di equilibrare $\boldsymbol{P}$); il principio di azione e reazione garantisce che questa è sempre uguale ed opposta alla forza peso che preme sulla superficie stessa: è quindi perpendicolare alla superficie e volta verso l'alto. Questa forza è detta *reazione vincolare* ed è solitamente indicata con il simbolo $\boldsymbol{N}$, poiché è perpendicolare, nel gergo della geometria *normale*, alla superficie. Con riferimento alla figura le due forze, per renderle distinguibili, sono disegnate leggermente separate, mentre sono esattamente una sovrapposta all'altra; inoltre la forza peso viene applicata nel centro del corpo (si ricordi che si tratta di un punto materiale) mentre la reazione vincolare è applicata sulla parte del corpo a contatto con la superficie di appoggio. Le forze agenti sulla cassa sono pertanto $\boldsymbol{P}$ ed $\boldsymbol{N}$ e vale la relazione

$$\boldsymbol{P} + \boldsymbol{N} = 0 \ .$$

I moduli delle due forze sono uguali e vale

$$N = P = mg = 444\,\mathrm{N} \ .$$

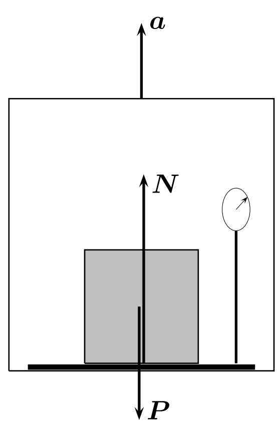
② Nel caso la cassa si muova sulla superficie liscia (cioè priva di attrito) con velocità costante significa che la risultante delle forze ad essa applicate è nulla, altrimenti vi sarebbe accelerazione, quindi vale ancora la soluzione del precedente punto ①.

***Problema 3**

Un baule avente una massa $m = 65\,\mathrm{kg}$ si trova all'interno di un ascensore che, improvvisamente comincia a salire con accelerazione di modulo $a = 0.8\,\mathrm{m/s^2}$; determinare il peso apparente del baule.

Soluzione

L'ascensore accelerato non è un sistema di riferimento inerziale, quindi non vale la legge (2.1) e nemmeno la (2.2) che di quella è conseguenza. Si definisce peso apparente il peso misurato da una bilancia a molla (come una comune bilancia pesapersone, ma non solo); questa, a sua volta, misura la forza che, premendo, deforma la molla; in definitiva la bilancia misura la forza che agisce su di essa, la quale, si noti, è uguale per il principio di azione e reazione alla forza con cui la bilancia regge la cassa; in un sistema inerziale questa forza coincide con la forza peso (con l'importante eccezione del caso in cui un corpo sia immerso in un liquido; se ne vedrà in un capitolo successivo), mentre in un sistema accelerato ciò può non essere vero, come nel caso presente. Ci si metta allora dal punto di vista di un riferimento inerziale esterno all'ascensore e si considerino, con riferimento alla figura, le forze agenti sul baule; esse sono: la forza peso $\boldsymbol{P}$ e la reazione vincolare $\boldsymbol{N}$ con cui la bilancia sostiene il baule, la quale, si ricordi, è uguale al peso apparente che si legge sulla scala graduata della bilancia stessa; la legge (2.1) diventa quindi



$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{P} = m\boldsymbol{a} \ ;$$

Considerando che $\boldsymbol{P}$ ed $\boldsymbol{N}$ hanno versi opposti, dalla precedente equazione si ottiene la relazione scalare

$$N - P = ma$$

e quindi

$$N = P + ma = m(g + a) = 690\,\mathrm{N}\ .$$

2.2.2 Piano inclinato

Se un corpo di massa m poggia su di un piano non orizzontale ma inclinato, la reazione vincolare, perpendicolare al piano inclinato, non può piú essere uguale ed opposta alla forza peso, che rimane evidentemente verticale; pertanto la risultante delle due forze non è nulla ma è parallela al piano ed è tanto piú intensa quanto piú il piano è inclinato. Con riferimento alla figura, per un piano lungo ℓ, alto h e avente base b valgono le relazioni

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{P} + \boldsymbol{N}$$

da cui

$$F = \frac{h}{\ell}P = \frac{h}{\ell}mg \qquad , \qquad N = \frac{b}{\ell}P = \frac{b}{\ell}mg\ . \tag{2.3}$$

In relazione all'angolo α di inclinazione del piano inclinato valgono le relazioni

$$F = P\operatorname{sen}\alpha = mg\operatorname{sen}\alpha \qquad , \qquad N = P\cos\alpha = mg\cos\alpha\ .$$

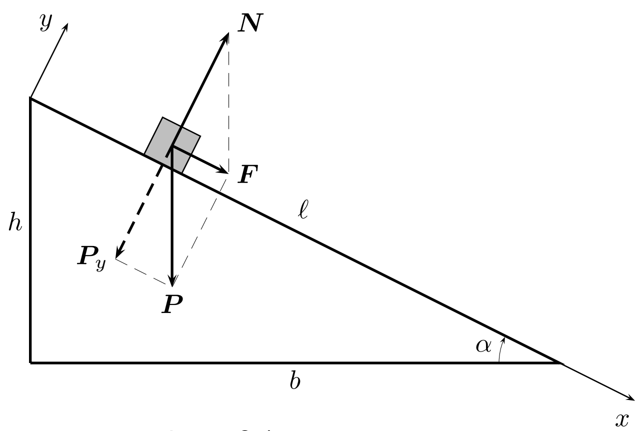


Figura 2.1: Il piano inclinato.

È utile considerare i vettori rispetto a un sistema di assi cartesiani con l'asse delle ascisse lungo il piano inclinato e quello delle ordinate perpendicolare al piano; in questo modo si può scrivere la (2.1) per componenti; si trova allora

$$\begin{cases} F_x = P_x = \dfrac{h}{\ell}mg = ma_x \\[2ex] F_y = N - P_y = ma_y \quad , \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{h}{\ell}g \\[2ex] ma_y = 0 \quad . \end{cases} \tag{2.4}$$

la reazione vincolare pertanto equilibra la componente del peso perpendicolare al piano inclinato e quindi la componente y dell'accelerazione è nulla: il moto si svolge sull'asse delle ascisse, cioè lungo il piano inclinato.
Questo moto è uniformemente accelerato con accelerazione proporzionale al rapporto $h/\ell = \operatorname{sen}\alpha$.

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Si consideri una cassa di massa $m = 4.2\,\mathrm{kg}$ che scende, partendo da ferma, dalla sommità di un piano inclinato privo di attrito lungo $\ell = 7.5\,\mathrm{m}$ e alto $h = 3.8\,\mathrm{m}$;

① determinare le forze agenti sulla cassa;

② determinare il tempo impiegato ad arrivare in fondo al piano inclinato;

③ determinare la velocità finale;

Soluzione

① Sulla cassa agiscono la forza peso e la reazione vincolare; la forza peso è diretta verso il basso e ha modulo

$$P = mg = 41\,\mathrm{N} \ .$$

La reazione vincolare è perpendicolare al piano inclinato e il suo modulo può essere calcolato utilizzando la prima delle (2.3); occorre però prima determinare b mediante il teorema di Pitagora applicato al triangolo rettangolo formato dal piano inclinato:

$$b = \sqrt{\ell^2 - h^2} = 6.5\,\mathrm{m}$$

quindi

$$N = \frac{b}{\ell}\,mg = 36\,\mathrm{N} \ .$$

② Il moto di discesa è uniformemente accelerato con accelerazione data dalla seconda delle (2.4); quindi, utilizzando la legge del moto uniformemente accelerato, la relazione fra lo spazio percorso ℓ ed il tempo impiegato t è

$$\ell = \frac{1}{2}\,at^2$$

quindi

$$t = \sqrt{\frac{2\ell}{a}} = \sqrt{2\ell\,\frac{\ell}{gh}} = \sqrt{\frac{2}{gh}}\,\ell = 1.7\,\mathrm{s} \ .$$

③ La velocità all'istante t è data da

$$v = at = \frac{h}{\ell}\,g\sqrt{\frac{2}{gh}}\,\ell = \sqrt{2gh} = 8.6\,\mathrm{m/s} \ .$$

Si osservi che la velocità non dipende dalla pendenza o dalla lunghezza del piano, ma solo dalla sua altezza; si noti inoltre che la velocità finale è la stessa che si avrebbe avuto se la cassa fosse caduta liberamente da un'uguale altezza h, si veda l'equazione (1.12); si osservi infine che né il tempo impiegato, né la velocità finale dipendono dalla massa della cassa.

Problema 2

Per sollevare una cassa di massa m lungo un piano inclinato che formi con l'orizzontale un angolo $\alpha = 35°$ un uomo deve applicare un forza di intensità $F = 600\,\mathrm{N}$;

① determinare ma massa della cassa;

② determinare quale deve essere l'angolo di inclinazione del piano inclinato perché la forza necessaria al sollevamento diventi la metà.

Soluzione

① La forza necessaria al sollevamento deve essere uguale ed opposta alla risultante fra la forza peso agente sulla cassa e la reazione vincolare del piano. Dall'esercizio precedente risulta che tale forza ha intensità $F = mg \operatorname{sen} \alpha$, da cui si trova:

$$m = \frac{F}{g \operatorname{sen} \alpha} = 107 \,\mathrm{kg} \ .$$

② Poiché la forza è proporzionale al seno dell'angolo α, la forza viene dimezzata quando venga dimezzato il seno dell'angolo di pendenza del piano inclinato; quindi il nuove angolo β è tale che valga

$$\operatorname{sen} \beta = \frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha \qquad \longrightarrow \qquad \beta = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2} \operatorname{sen} \alpha\right) = 17^\circ \ .$$

Il problema svolto mette in evidenza il ruolo del piano inclinato come macchina semplice.

Problema 3

Per studiare la legge dl moto accelerato, uno studente dispone di un piano inclinato liscio di lunghezza $\ell = 5.0 \,\mathrm{m}$; vista la scarsa sensibilità dell'orologio che ha a disposizione, decide di inclinare il piano di un angolo α tale che il tempo impiegato da un punto materiale a percorrere l'intero piano inclinato, partendo da fermo, sia di almeno $t = 4.0 \,\mathrm{s}$; determinare l'angolo massimo che il piano inclinato può formare con l'orizzontale.

Soluzione

Il moto lungo il piano inclinato è un moto uniformemente accelerato, la cui accelerazione è data dalla (2.4); la legge del moto uniformemente accelerato quindi fornisce la relazione

$$\ell = \frac{1}{2} a t^2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{h}{\ell} g t^2$$

da cui si trova

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{h}{\ell} = \frac{2\ell}{g t^2} \qquad \longrightarrow \qquad \alpha = \operatorname{arcsen} \frac{2\ell}{g t^2} = 3.6^\circ \ .$$

2.2.3 Forza d'attrito radente

In generale la superficie d'appoggio di un punto materiale è scabra e muovendosi su di essa il punto materiale sente la forza di attrito radente. Questa si dice di forza di attrito *statico*, $\boldsymbol{F}_s$ se il punto materiale è fermo e forza di attrito *dinamico* $\boldsymbol{F}_d$ se il punto materiale è in moto. Sono entrambi proporzionali alla reazione vincolare perpendicolare del piano, le direzioni e i versi sono tali da opporsi alle forze agenti e i loro moduli sono dati rispettivamente da

$$F_s \le F_s^M = \mu_s N \qquad , \qquad F_d = \mu_d N \ . \tag{2.5}$$

Le due costanti μ_s e μ_d sono dette rispettivamente coefficiente di attrito statico e coefficiente di attrito dinamico; essendo coefficienti di proporzionalità fra grandezze omogenee, i coefficienti di attrito sono numeri puri. Dipendono dalla natura delle due superfici a contatto, tuttavia per qualunque coppia di tali superfici vale la disuguaglianza

$$\mu_s \ge \mu_d$$

che descrive il ben noto fatto sperimentale per cui è necessaria una forza maggiore per mettere in moto un corpo che per mantenerlo in moto con velocità costante.

(a) L'angolo β_s. (b) Il cono di attrito statico.

Figura 2.2: La reazione vincolare nel caso di una superficie scabra.

La prima delle due (2.5) dice che $F_s^M = \mu_s N$ è il valore massimo dell'attrito statico, è cioè la forza da superare se si vuole mettere in movimento un corpo; per forze agenti al di sotto di tale valore massimo il vincolo è in grado di opporre una forza uguale e contraria alla forza agente e il corpo sta fermo. Come illustrato in figura 2.2, una superficie scabra in generale può esplicare una forza di reazione inclinata di un angolo β_s rispetto alla perpendicolare, data dalla somma dei vettori $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{F}_s$; valgono le relazioni

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_s \qquad , \qquad \mu_s = \frac{F_s^M}{N} = \operatorname{tg}\beta_s \ .$$

quando la forza di attrito statico è massima tale somma fornisce la massima reazione statica che il vincolo può opporre alla forza agente; dalla figura si può vedere quindi che la reazione vincolare è interna ad un cono con il vertice verso il punto di contatto detto *cono di attrito statico*.
La seconda delle (2.5) dice invece che quando un punto materiale è in moto la forza di attrito che si oppone al moto è costante ed, in particolare, è indipendente dal tipo di moto.

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Si consideri un punto materiale P di massa $m = 248\,\mathrm{g}$ appoggiato su di una superficie orizzontale scabra; sapendo che i coefficienti di attrito fra P e la superficie valgono $\mu_s = 0.78$ e $\mu_d = 0.42$, determinare:

① il modulo della minima forza orizzontale che è necessario applicare per mettere P in movimento;

② il modulo R^M della massima reazione vincolare statica esplicabile dal vincolo;

③ il modulo dell'accelerazione di P se la forza agente ha modulo $F = 1.50\,\mathrm{N}$.

Soluzione

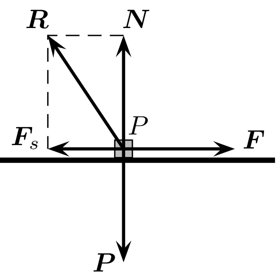
① La minima forza F_m che necessario applicare per mettere P in movimento è uguale alla massima forza di attrito statico che il vincolo può fornire, quindi, usando la prima delle (2.5) e osservando che per un piano orizzontale vale $N = mg$, si ottiene

$$F_m = F_s^M = \mu_s N = \mu_s mg = 1.90\,\mathrm{N} \ .$$

② La massima reazione vincolare è la somma della componente perpendicolare $\boldsymbol{N}$ e della massima forza di attrito statico $\boldsymbol{F}_s^M$; queste forze sono perpendicolari, quindi

$$R^M = \sqrt{N^2 + {F_s^M}^2} = N\sqrt{1+\mu_s^2} = \frac{N}{\cos\beta_s} = 3.09\,\mathrm{N} \ .$$

③ In questo caso, facendo riferimento alla figura, agiscono sul punto materiale P le due forze vincolari $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{F}_d$, la forza peso $\boldsymbol{P}$ e la forza agente $\boldsymbol{F}$; $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{P}$ sono uguali ed opposte e quindi la loro somma è il vettore nullo quindi la forza risultante è la somma dei due vettori orizzontali ma di verso opposto $\boldsymbol{F}_d$ ed $\boldsymbol{F}$; applicando la legge di Newton (2.1) si ottiene

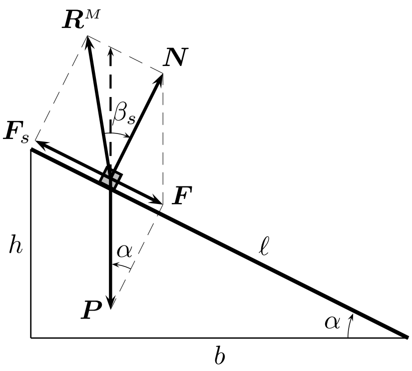


$$F - F_d = ma \qquad \longrightarrow \qquad a = \frac{F - F_d}{m} = \frac{F - \mu_d mg}{m} = 1.93\,\mathrm{m/s^2} \ .$$

***Problema 2**

Un punto materiale di massa $m = 2.66\,\mathrm{kg}$ è appoggiato sulla superficie di un piano inclinato scabro di altezza $h = 1.27\,\mathrm{m}$ e lunghezza $\ell = 2.54\,\mathrm{m}$; sapendo che il coefficiente di attrito statico fra le due superfici a contatto vale $\mu_s = 0.75$, determinare se il punto materiale scende lungo il piano inclinato e, nel caso, determinarne l'accelerazione.

Soluzione



Con riferimento alla figura, la forza agente sul punto materiale a causa dell'inclinazione del piano è la componente $\boldsymbol{F}$ della forza peso $\boldsymbol{P}$ parallela al piano, mentre la forza massima di attrito statico $\boldsymbol{F}_s^M$ è proporzionale alla componente $\boldsymbol{N}$ della forza peso perpendicolare al piano; per i rispettivi moduli valgono infatti le equazioni

$$F = \frac{h}{\ell}mg \qquad , \qquad F_s^M = \mu_s N = \mu_s \frac{b}{\ell}mg$$

quindi l'attrito statico riesce ad equilibrare la forza agente, e quindi a tenere fermo il punto materiale, se vale $F_s^M > F$, cioè se

$$\frac{h}{\ell} > \mu_s \frac{b}{\ell} \ ;$$

si noti che la condizione di equilibrio è indipendente dalla massa del punto materiale. Sostituendo i valori numerici si ottiene:

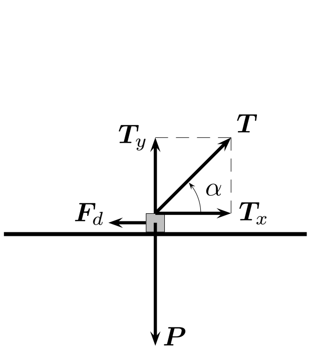
$$\frac{h}{\ell} = 0.45 \qquad , \qquad \mu_s \frac{b}{\ell} = 0.67 \ .$$

Il punto materiale quindi non scende lungo il piano inclinato. Si osservi l'angolo di apertura del cono di attrito statico, l'angolo β_s formato dalla reazione vincolare massima $\boldsymbol{R}^M$ e la perpendicolare al piano, è maggiore dell'angolo di inclinazione del piano inclinato e quindi il vincolo riesce ad opporre alla forza peso una forza, tratteggiata in figura, *interna* al cono.

Problema 3

Un corpo di massa $m = 8.74\,\mathrm{kg}$ poggia su di un piano orizzontale scabro; su di esso viene applicata una forza di trazione $\boldsymbol{T}$ avente modulo $T = 60.6\,\mathrm{N}$ avente una direzione che forma un angolo $\alpha = 45°$ con l'orizzontale; sapendo che il coefficiente di attrito dinamico fra le due superfici è $\mu_d = 0.62$, determinare il moto del corpo.

Soluzione



Sul corpo agiscono tre forze: il peso, la reazione vincolare del piano di appoggio e la forza di trazione; per determinare il moto del corpo è necessario determinare la risultante $\boldsymbol{F}$ di queste tre forze ed applicare la relazione di Newton (2.1). Conviene considerare le forze per componenti; indicate, come d'uso, con x la componente orizzontale e con y la componente verticale, si ha

$$F_x = T_x - F_d = ma_x$$
$$F_y = N + T_y - P = 0 \ .$$

Nella seconda delle precedenti equazioni N, per chiarezza non rappresentato in figura, è il modulo della componente verticale della reazione vincolare; ricordando la seconda delle (2.5), si ottiene

$$a_x = \frac{T_x - F_d}{m} = \frac{T_x - \mu_d N}{m} = \frac{T_x - \mu_d(P - T_y)}{m} = \frac{T_x - \mu_d T_y}{m} - \mu_d\, g = 1.9\,\mathrm{m/s^2} \ .$$

Si tratta quindi di un moto uniformemente accelerato.

2.2.4 Fili e carrucole

Un filo è un corpo materiale ideale, perfettamente flessibile, inestensibile, di massa nulla e di sezione trascurabile tale da poter essere considerato unidimensionale. Un filo, se opportunamente fissato ad un corpo in P, è in grado di tramettere al corpo la forza di trazione senza entrare in diretto contatto con il corpo.
Se la massa del filo è trascurabile, la forza $\boldsymbol{F}$ applicata al filo in A è uguale alla forza che il filo applica al corpo cui è fissato. A sua volta il corpo esercita sul filo una forza avente la stessa intensità; ai capi del filo risultano quindi applicate due forze uguali e contrarie di modulo F.

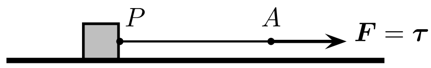


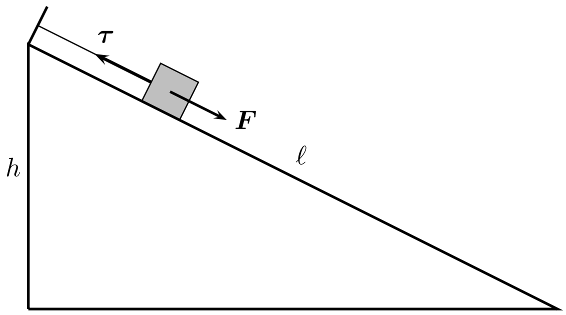
Figura 2.3: La tensione del filo.

Tale forza è detta *tensione* del filo ed indicata con il simbolo $\boldsymbol{\tau}$.
Una carrucola ideale è una macchina di massa nulla costituita da una rotella capace di ruotare senza attrito attorno al proprio asse e dotata di una scanalatura in cui passa il filo. Viene utilizzata per deviare la retta di trazione del filo. Se la sua massa è nulla, non modifica la tensione del filo.

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Si consideri un punto materiale P avente massa $m = 426\,\mathrm{g}$ appoggiato su un piano inclinato liscio di altezza $h = 24\,\mathrm{cm}$ e lunghezza $\ell = 64\,\mathrm{cm}$; il punto materiale è trattenuto da un filo fissato alla parte superiore del piano inclinato, come in figura; determinare la tensione del filo



Soluzione

Poiché il punto materiale è fermo, la risultante delle forze agenti su di lui deve essere nulla. Da un esercizio precedente è noto che l'intensità della risultante $\boldsymbol{F}$ della forza peso e della reazione vincolare $\boldsymbol{N}$ del piano inclinato è data da

$$F = \frac{h}{\ell} mg$$

quindi, perché la risultante complessiva sia nulla, deve essere, osservando che $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{\tau}$ hanno la stessa direzione e verso opposto,

$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{\tau} = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{F} \qquad \longrightarrow \qquad \tau = F = \frac{h}{\ell} mg = 1.6\,\mathrm{N}\ .$$

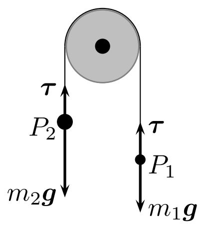
***Problema 2**

Si consideri una carrucola su cui può scorrere un filo a cui sono appesi due punti materiali P_1 e P_2 di masse $m_1 = 3.4\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 5.2\,\mathrm{kg}$; determinare le accelerazioni con cui si muovono P_1 e P_2 e la tensione del filo.

Soluzione

Rispetto ad un asse di riferimento y orientato verso il basso (non rappresentato in figura) la legge (2.1) diventa

$$\begin{cases} m_1 a_1 = m_1 g - \tau \\ m_2 a_2 = m_2 g - \tau\ . \end{cases}$$



La tensione, per quanto detto sopra, è la stessa in tutto il filo; inoltre, essendo il filo inestensibile, il sistema costituito dai due punti materiali e dal filo si muove rigidamente con la stessa velocità e la stessa accelerazione in ogni istante; i moti di P_1 e P_2 si svolgono però in direzioni opposte. Supponendo che P_1 salga e P_2 scenda, si ha quindi

$$a_2 = -a_1 = a \ .$$

Allora,

$$\begin{cases} -m_1 a = m_1 g - \tau \\ m_2 a = m_2 g - \tau \end{cases}$$

che, risolta rispetto alle incognite a e τ, dà

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g = 2.5\,\mathrm{m/s^2} \qquad , \qquad \tau = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = 42\,\mathrm{N} \ .$$

Si noti che l'espressione per a cambia segno scambiando le due masse; in particolare, a è positivo, e quindi P_1 sale e P_2 scende, se $m_2 > m_1$, mentre accade l'opposto se $m_2 < m_1$. Se le masse sono uguali l'accelerazione è nulla. L'espressione per la tensione è simmetrica rispetto allo scambio delle due masse. L'apparato descritto in questo problema, e rappresentato in figura, è detto *macchina di Atwood* consente di eseguire precise misure dell'accelerazione delle due masse e quindi di verificare la legge del moto uniformemente accelerato; nel caso della caduta libera, infatti, l'elevata accelerazione rende difficile una misura precisa.

Problema 3

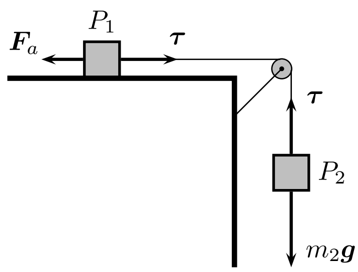
Si consideri un punto materiale P_1 di massa $m_1 = 4.5\,\mathrm{kg}$ appoggiato ad un piano orizzontale scabro con coefficiente di attrito statico $\mu_s = 0.75$ e coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.6$. A P_1, mediante un filo, che passa attraverso una carrucola, è collegato il punto materiale P_2 di massa m_2; che rimane sospeso nel vuoto; inizialmente il sistema è fermo. Determinare

① il valore minimo che deve avere m_2 perché il sistema si metta in movimento;

② l'accelerazione e la tensione del filo quando m_2 ha un valore doppio del suo valore minimo.

Soluzione

① Considerando positivo il moto di P_1 verso il bordo del piano e di P_2 verso il basso, ricordando che la forza di attrito su un piano orizzontale ha modulo μmg, la legge (2.1) diventa



$$\begin{cases} m_1 a = -\mu\, m_1 g + \tau \\ m_2 a = m_2 g - \tau \end{cases}$$

ove si è posto uguale il modulo delle due accelerazione, come fatto nell'esercizio precedente.

Per determinare il valore minimo di m_2 che mette in movimento il sistema si deve considerare la forza di attrito statico; risolvendo le equazioni precedenti si trova

$$a = \frac{m_2 - \mu_s m_1}{m_1 + m_2} g \qquad , \qquad \tau = (\mu_s + 1)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \ .$$

Il sistema si mette in movimento se l'accelerazione è maggiore o uguale a zero, cioè se

$$m_2 \geq \mu_s m_1 = 3.4\,\mathrm{kg}$$

che è quindi il valore minimo cercato.

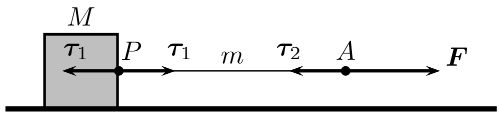
② Per trovare l'accelerazione si deve, invece, considerare la forza di attrito dinamico, si trova quindi, per $m_2 = 6.8\,\mathrm{kg}$,

$$a = \frac{m_2 - \mu_d m_1}{m_1 + m_2} g = 3.6\,\mathrm{m/s^2} \qquad , \qquad \tau = (\mu_d + 1)\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = 43\,\mathrm{N} \ .$$

***Problema 4**

Si consideri un punto materiale di massa $M = 372\,\mathrm{g}$ su un piano orizzontale liscio sul quale agisce una forza di modulo $F = 3.2\,\mathrm{N}$ per mezzo di un filo inestensibile di massa $m = 42\,\mathrm{g}$; determinare l'accelerazione del punto materiale e la tensione ai due capi del filo.

Soluzione



Sia P il capo del filo fissato al punto materiale ed A il capo del filo sui cui è applicata la forza $\boldsymbol{F}$. Sia $\boldsymbol{\tau}_1$ la tensione del filo in P, con la quale il filo tira il punto materiale e sia $\boldsymbol{\tau}_2 = -\boldsymbol{F}$ la tensione in A con cui il filo reagisce all'azione di $\boldsymbol{F}$.
Poiché la forza con cui il punto materiale reagisce alla trazione del filo è $-\boldsymbol{\tau}_1$, la legge (2.1) per il punto materiale e il filo diviene:

$$\begin{cases} Ma = \tau_1 \\ ma = F - \tau_1 \end{cases}$$

ove, come visto negli esercizi precedenti, l'accelerazione del filo e del punto materiale è la stessa. Risolvendo le due equazioni si ottiene

$$a = \frac{1}{M+m} F = 7.7\,\mathrm{m/s^2} \qquad , \qquad \tau_1 = \frac{M}{M+m} F = 2.9\,\mathrm{N} \qquad , \qquad \tau_2 = F = 3.2\,\mathrm{N} \ .$$

Si noti che se la massa del filo è nulla, cioè se $m = 0$ si ha $\tau_1 = F$ e quindi $\tau_1 = \tau_2$, risultato che conferma quanto detto precedentemente: se la massa del filo è nulla la sua tensione è uguale ai suoi capi.

2.2.5 Forza elastica

Per deformare un corpo cambiandone la forma e/o il volume è necessario applicare una forza; se questa forza è sufficientemente piccola la deformazione del corpo è anch'essa piccola e il corpo, per il terzo principio di Newton, reagisce con una forza uguale e contraria che tende a riportare il corpo nella sua conformazione iniziale; tale forza di richiamo risulta proporzionale alla deformazione prodotta e viene detta *forza elastica.* Il caso piú semplice in cui agisce una forza elastica è la molla; quando una molla, che in equilibrio ha lunghezza ℓ_0, viene accorciata o allungata fino alla lunghezza finale ℓ, mediante l'azione di una forza esterna, essa reagisce opponendo una forza il cui modulo è proporzionale alla lunghezza della deformazione ma avente verso opposto.

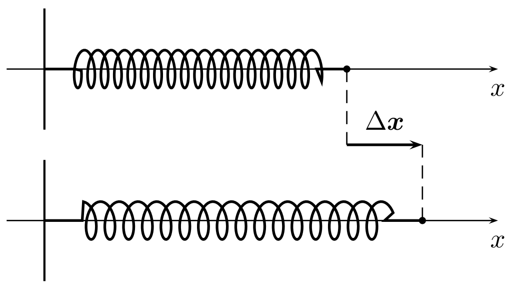


Figura 2.4: La deformazione della molla.

Se quindi $\boldsymbol{x}$ è il vettore che rappresenta la deformazione, la forza elastica è data da

$$\boldsymbol{F} = -k\Delta\boldsymbol{x} \ ,$$

ove k, detta costante elastica della molla, dipende dal tipo di molla.
Se un punto materiale di massa m è sottoposto alla forza elastica $\boldsymbol{F}$ si muove con accelerazione

$$\boldsymbol{a} = \frac{\boldsymbol{F}}{m} = -\frac{k}{m}\Delta\boldsymbol{x} \ .$$

Il moto del punto materiale è quindi armonico con pulsazione ω e periodo T dati da

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad , \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \ .$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Un punto materiale di massa m viene collegato ad una molla di costante elastica $k = 4.5\,\mathrm{N/m}$ inizialmente allungata di $8.3\,\mathrm{cm}$; una volta lasciata andare il punto materiale compie un oscillazione completa in $2.3\,\mathrm{s}$;

① determinare la massa del punto materiale;

② determinare la velocità massima v_M assunta dal punto materiale nel suo moto oscillatorio;

③ determinare il valore massimo del modulo della forza elastica.

Soluzione

① Usando la 2.2.5, si trova

$$m = \frac{T^2}{4\pi^2}\,k = 0.60\,\mathrm{kg}\ .$$

② L'allungamento iniziale fornito nel testo coincide con l'ampiezza A di oscillazione del moto armonico, quindi, ricordando che $v_M = \omega\, A$, si trova

$$v_M = \frac{2\pi}{T}\,A = 0.23\,\mathrm{s}\ .$$

③ Il valore massimo del modulo della forza elastica si ha in corrispondenza della massima deformazione della molla, cioè quando la deformazione è uguale all'ampiezza di oscillazione A, quindi

$$F_M = kA = 0.37\,\mathrm{N}\ .$$

Problema 2

Un punto materiale di forma cubica di massa $m = 3.5\,\mathrm{kg}$ è appeso ad un piano orizzontale per mezzo di due molle di costante elastica $k_1 = 250\,\mathrm{N/m}$ e $k_2 = 320\,\mathrm{N/m}$ entrambe collegate sia al piano che al cubo; sapendo che dopo l'allungamento delle due molle la faccia superiore del cubo è parallela al piano orizzontale, determinare

① l'allungamento delle due molle;

② la costante elastica della molla che è necessario porre al posto delle due date, per avere un stesso allungamento.

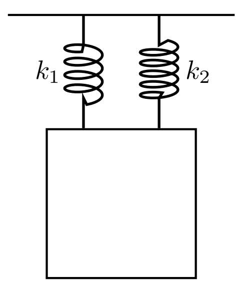
Soluzione

① La forza esercitata dalle due molle equilibra la forza peso del punto materiale cubico; tenendo conto del fatto che la superficie superiore del cubo è parallela al piano di sospensione, e quindi le due molle subiscono un uguale allungamento Δx, vale la seguente relazione fra i moduli delle forze

$$k_1\Delta x + k_2\Delta x = mg$$

quindi l'allungamento delle due molle è dato da

$$\Delta x = \frac{mg}{k_1 + k_2} = 0.060\,\mathrm{m}\ .$$

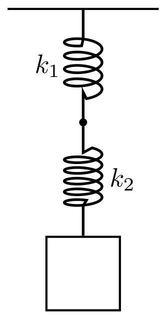


② Sostituendo alle due molle date una molla di costante elastica k tale che l'allungamento sia lo stesso deve valere

$$mg = k\Delta x \qquad \longrightarrow \qquad k = k_1 + k_2 = 570\,\mathrm{N/m}\ .$$

La costante elastica equivalente quindi è la somma delle costanti elastiche. In questa configurazione le du molle si dicono lavorare *in parallelo*.

Problema 3



Un punto materiale di forma cubica di massa $m = 6.5\,\mathrm{kg}$ è appeso ad un piano orizzontale per mezzo di due molle collegate fra loro come in figura aventi costante elastica $k_1 = 370\,\mathrm{N/m}$ e $k_2 = 520\,\mathrm{N/m}$; determinare

① l'allungamento delle due molle;

② la costante elastica della molla che è necessario porre al posto delle due date, per avere un stesso allungamento.

Soluzione

① Il peso del punto materiale cubico è equilibrato dalla forza elastica della seconda molla, la quale, a sua volta è equilibrata dalla forza elastica della prima molla; quindi le due forze elastiche sono uguali e gi allungamenti sono diversi; vale quindi la seguente relazione fra i moduli delle forze

$$k_1\Delta x_1 = k_2\Delta x_2 = mg$$

quindi l'allungamento di ciascuna delle due molle è dato da

$$\Delta x_1 = \frac{mg}{k_1} = 0.17\,\mathrm{m} \qquad \longrightarrow \qquad \Delta x_2 = \frac{mg}{k_2} = 0.12\,\mathrm{m}\ .$$

② Sostituendo alle due molle date una molla di costante elastica k tale che l'allungamento complessivo sia lo stesso, e quindi uguale alla somma degli allungamenti delle due molle, deve valere

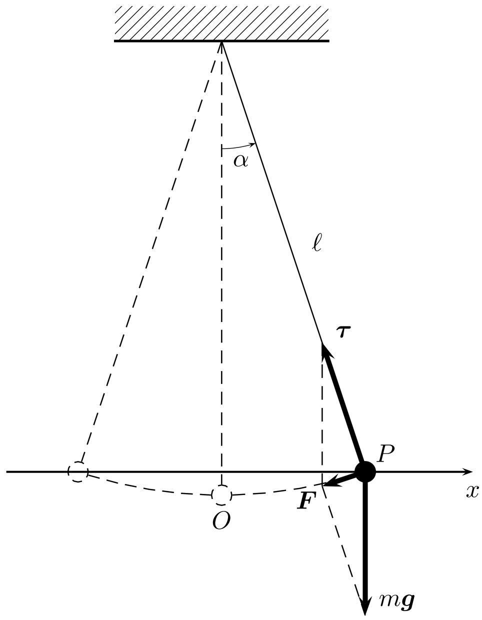
$$mg = k(\Delta x_1 + \Delta x_2) = mg\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right)k \qquad \longrightarrow \qquad \frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

e quindi

$$k = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} = 216\,\mathrm{N/m}\ .$$

Il reciproco della costante elastica equivalente quindi è la somma dei reciproci delle costanti elastiche. In questa configurazione le due molle si dicono lavorare *in serie*.

2.2.6 Pendolo semplice



Il pendolo semplice è costituito da un punto materiale P di massa m sospeso, per mezzo di un filo inestensibile di lunghezza ℓ e di massa trascurabile. Su P agisce la forza peso $m\boldsymbol{g}$ e la tensione $\boldsymbol{\tau}$ del filo; le due forze sono in equilibrio quando P si trova in quiete sulla verticale O del punto di sospensione; in posizioni diverse le due forze hanno una risultante non nulla che tende a riportare il sistema verso la posizione di equilibrio. Questa forza causa un'oscillazione di P attorno ad O. Per oscillazioni di piccola ampiezza, cioè se l'angolo α formato dal filo con la perpendicolare è sufficientemente piccolo, la traiettoria, che è un arco di circonferenza è ben approssimato dalla corda ad esso sottesa e la legge del moto è armonica [equazione (1.22)] con pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\ .$$

In tale approssimazione, le oscillazioni sono compiute tutte nello stesso tempo indipendentemente dall'ampiezza della piccola oscillazione e dalla massa m di P; tale proprietà è nota come *isocronismo delle piccole oscillazioni* del pendolo; il periodo delle piccole oscillazioni è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \ . \tag{2.6}$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Un pendolo di lunghezza $\ell = 4.520\,\mathrm{m}$ viene utilizzato per una misura di precisione dell'accelerazione di gravità all'equatore; sapendo che il periodo del pendolo misura $T_e = 4.27\,\mathrm{s}$,

① determinare l'accelerazione di gravità all'equatore;

② sapendo che l'accelerazione è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza da centro della Terra e che i raggi della Terra all'equatore e ai poli sono rispettivamente $R_e = 6378388\,\mathrm{m}$ e $R_p = 6355988\,\mathrm{m}$, determinare l'accelerazione di gravità e il periodo del pendolo al polo nord.

Soluzione

① Usando la (2.6) si trova

$$g_e = \frac{4\pi^2}{T_e^2}\,\ell = 9.79\,\mathrm{m/s^2} \ .$$

② Se l'accelerazione di gravità è proporzionale all'inverso del quadrato della distanza dal centro della Terra, vale

$$g_p = \frac{R_e^2}{R_p^2}\,g_e = 9.86\,\mathrm{m/s^2} \ ;$$

inoltre, poiché il periodo è inversamente proporzionale alla radice quadrata dell'accelerazione di gravità, vale

$$T_p = \sqrt{\frac{g_e}{g_p}}T_e = \frac{R_e}{R_p}\,T_e = 4.29\,\mathrm{s} \ .$$

2.2.7 Forza centripeta

Un punto materiale P di massa m che si muova di moto circolare uniforme di centro O, velocità scalare $\boldsymbol{v}$ e velocità angolare $\boldsymbol{\omega}$ ha un'accelerazione centripeta [equazioni (1.18) e (1.21)]; corrispondentemente, per la legge fondamentale della dinamica, vi è una forza, detta forza centripeta $\boldsymbol{F}_c$ la cui forma vettoriale è

$$\boldsymbol{F}_c = -m\frac{v^2}{r^2}\boldsymbol{OP} = -m\omega^2\boldsymbol{OP}$$

e il cui modulo è

$$F_c = m\frac{v^2}{r} = m\omega^2 r \ .$$

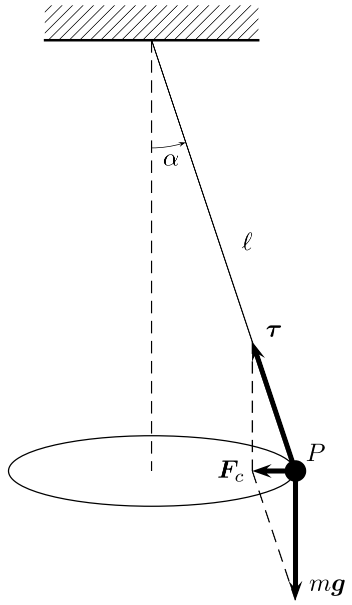
PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Il sedile di una giostra è legato al perno di rotazione tramite un filo inestensibile di massa trascurabile e lunghezza $\ell = 4.50\,\mathrm{m}$; quando è in funzione un bambino viene fatto ruotare in modo che l'angolo fra la catena e la verticale sia di $\alpha = 18.5°$; sapendo che la massa del sedile e del bambino, approssimabili insieme ad un punto materiale, è complessivamente $m = 38.5\,\mathrm{kg}$, determinare

① il modulo della tensione del filo;

② il tempo impiegato a compiere un giro.



Soluzione

① Con riferimento alla figura, vale la relazione

$$\boldsymbol{\tau} = m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{F}_c$$

quindi si hanno le relazioni

$$F_c = mg \operatorname{tg} \alpha \qquad , \qquad T = \frac{mg}{\cos \alpha} = 398\,\mathrm{N} \ .$$

② Si osservi che vale

$$F_c = m\omega^2 r = m\omega^2 \ell \operatorname{sen} \alpha$$

e quindi, confrontando con la precedente espressione per F_c, si trova

$$mg \operatorname{tg} \alpha = m\omega^2 \ell \operatorname{sen} \alpha \qquad \longrightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{\ell \cos \alpha}}$$

e quindi

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell \cos \alpha}{g}} = 9.53\,\mathrm{s} \ .$$

Problema 2

Un automobile percorre una curva di raggio $r = 24\,\mathrm{m}$; sapendo che il coefficiente di attrito statico fra il pneumatico e l'asfalto è $\mu_s = 1.2$ determinare la velocità massima con cui l'automobile può percorrere la curva senza sbandare.

Soluzione

In questo caso la forza centripeta è fornita dalla forza di attrito statico del pneumatica sull'asfalto, vale cioè

$$F_c = F_a \qquad \longrightarrow \qquad m\frac{v^2}{r} = \mu_s mg$$

quindi

$$v = \sqrt{\mu_s r g} = 17\,\mathrm{m/s} = 61\,\mathrm{km/h} \ .$$

2.2.8 Esercizi

Forza peso

✍ **Es. 1** — Su un piano orizzontale si trova il libro A di massa $m_a = 2.8\,\mathrm{kg}$, su di questo si trova un secondo libro B di massa $m_b = 1.4\,\mathrm{kg}$; determinare il modulo F della forza esercitata dal piano sui due libri e il modulo F_a della forza con cui B agisce su A.

✍ **Es. 2** — Su un piano orizzontale si trova una cassa di massa $m_1 = 5.4\,\mathrm{kg}$ sulla quale è collocato un punto materiale di massa $m_2 = 3.4\,\mathrm{kg}$; determinare

a) l'intensità della forza agente fra la cassa e il punto materiale;

b) l'intensità della reazione vincolare del piano.

Piano inclinato

✍ **Es. 1** — Un punto materiale si muove su un piano orizzontale privo di attrito con velocità costante di modulo $v_0 = 15.9\,\mathrm{m/s}$ quando comincia a salire lungo piano inclinato tale sia $h/\ell = 3/5$; determinare

a) l'altezza H dal suolo a cui il punto materiale si ferma;

b) l'istante t_1 in cui il punto materiale si ferma.

☞ **Es. 2** — Due punti materiali scendono lungo un piano inclinato liscio che forma con l'orizzontale un angolo $\theta = 20°$; all'istante iniziale si trovano ad una distanza $d = 4.3\,\mathrm{m}$ e quello che si trova piú in alto ha un velocità $v = 2.0\,\mathrm{m/s}$ mentre il piú basso è fermo; determinare:

a) l'istante in cui avviene l'urto;

b) lo spazio percorso dal piú alto fino all'istante dell'urto.

☞ **Es. 3** — Un uomo ha lasciato l'auto di massa $m = 750\,\mathrm{kg}$ ferma su una strada inclinata con una pendenza di un angolo $\alpha = 7.0°$; non appena è sceso si accorge di avere dimenticato di tirare il freno di stazionamento; tenta allora di frenare la discesa dell'auto trattenendola per il paraurti con una forza di modulo $F = 350\,\mathrm{N}$: determinare

a) il modulo dell'accelerazione dell'auto e il modulo della reazione vincolare della strada;

b) il modulo della forza che deve esercitare l'uomo per fermare l'auto.

Forza d'attrito radente

✍ **Es. 1** — Un punto materiale si trova su di un piano inclinato scabro; sapendo che il il coefficiente di attrito statico fra il piano e il punto materiale è $\mu_s = 1.2$, determinare il minimo angolo α di inclinazione del piano inclinato perché il punto materiale si metta in movimento.

☞ **Es. 2** — Un punto materiale di massa m si trova sopra una cassa in moto orizzontale con accelerazione costante di modulo $a = 2.1\,\mathrm{m/s^2}$; determinare il coefficiente di attrito statico minimo fra la cassa ed il punto materiale affinché il punto si muova insieme alla cassa.

☞ **Es. 3** — Un punto materiale di massa $m = 45.3\,\mathrm{kg}$ è sottoposto ad una forza di intensità $F = 65.8\,\mathrm{N}$ che forma con l'orizzontale un angolo $\alpha = 52°$; sapendo che il coefficiente di attrito dinamico fra il punto materiale e il suolo è $\mu_d = 0.63$ e che nella situazione descritta il punto materiale comincia a muoversi, determinare

a) il coefficiente di attrito statico;

b) il modulo dell'accelerazione con cui il punto materiale si muove.

☞ **Es. 4** — Un uomo tira una cassa di massa $m = 40\,\mathrm{kg}$ con una forza orizzontale di modulo $F = 60\,\mathrm{N}$; sapendo che inizialmente la cassa è ferma e che all'istante $t = 6.2\,\mathrm{s}$ ha una velocità di modulo $v = 3.4\,\mathrm{m/s}$, determinare il modulo della forza di attrito dinamico.

☞ **Es. 5** — Una cassa di massa $m = 12\,\mathrm{kg}$ è spinta orizzontalmente con una forza di modulo $F = 48\,\mathrm{N}$; su di essa agisce una forza di attrito dinamico di modulo $F_d = 30\,\mathrm{N}$; sapendo che all'istante $t = 4.7\,\mathrm{s}$ il modulo della velocità è $v = 7.8\,\mathrm{m/s}$, determinare

a) il modulo della velocità iniziale;

b) il modulo della velocità all'istante $t_1 = 6.5\,\mathrm{s}$ supponendo che la cassa parta da ferma.

☞ **Es. 6** — Un carrello per la spesa ha massa $m = 12\,\mathrm{kg}$; su di esso agisce una forza di attrito dinamico di modulo $F_d = 50\,\mathrm{N}$; determinare

a) il modulo della forza necessaria a spingerlo con velocità costante;

b) il modulo della forza necessaria a portarlo da fermo ad una velocità di modulo $v = 3.5\,\mathrm{m/s}$ nel tempo $t = 2.4\,\mathrm{s}$, se vengono aggiunti al carrello $m_1 = 2\,\mathrm{kg}$ di spesa.

☞ **Es. 7** — Un'automobilina giocattolo di massa $m = 300\,\mathrm{g}$ scende lungo un piano inclinato lungo $\ell = 1.2\,\mathrm{m}$ e avente base $b = 0.9\,\mathrm{m}$; sapendo che l'accelerazione dell'automobilina ha modulo $a = 3.1\,\mathrm{m/s^2}$, determinare il modulo della forza di attrito radente.

☞ **Es. 8** — Un bambino traina una slitta di massa $m_s = 8.3\,\mathrm{kg}$ applicando una forza orizzontale di intensità $F = 19.6\,\mathrm{N}$ in modo che la slitta si muova a velocità costante; un secondo bambino di massa $m = 30\,\mathrm{kg}$ sale sulla slitta; determinare il modulo F_1 della forza che deve esercitare il primo bambino affinché la velocità della slitta resti costante.

☞ **Es. 9** — L'autista di un automobile che viaggia ad una velocità di modulo $v = 25\,\mathrm{m/s}$ vede un ostacolo e frena bruscamente; l'automobile inizia a slittare con un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.35$; sapendo che la forza di attrito ha modulo $F_d = 2744\,\mathrm{N}$, determinare

a) la massa dell'automobile;

b) il tempo impiegato a fermarsi.

✍ **Es. 10** — Un disco da hockey di massa $m = 150\,\mathrm{g}$ scivola sul ghiaccio; inizialmente ha una velocità di modulo $v_0 = 6.5\,\mathrm{m/s}$; sapendo che si ferma in $t = 12\,\mathrm{s}$, calcolare il coefficiente di attrito dinamico fra il disco e il ghiaccio.

☞ **Es. 11** — Un pilota di bob di massa $m_1 = 70\,\mathrm{kg}$ spinge il suo bob che ha massa $m_2 12\,\mathrm{kg}$ su una superficie orizzontale che ha che ha con il bob un attrito dinamico di coefficiente $\mu_d = 0.28$ esercitando una forza di modulo $F = 150\,\mathrm{N}$; determinare

a) il modulo a_1 dell'accelerazione del bob finché il pilota lo spinge;

b) il modulo a_2 dell'accelerazione del bob quando il pilota ci salta sopra.

☞ **Es. 12** — Uno sciatore scende lungo un piano inclinato partendo da fermo impiegherebbe $t = 10.0\,\mathrm{s}$ a raggiungere una velocità di modulo $v = 135\,\mathrm{km/h}$ senza attrito; sapendo che la sua massa è $m = 80.0\,\mathrm{kg}$ determinare

a) la risultante delle forze agenti sullo sciatore;

b) il tempo t_1 impiegato a raggiungere la stessa velocità in presenza di una forza di attrito dinamico di modulo $F_d = 100\,\mathrm{N}$.

☞ **Es. 13** — Uno sciatore di fondo percorre si muove a velocità costante di modulo $v = 5.0\,\mathrm{m/s}$; sapendo che il coefficiente di attrito dinamico fra lo sciatore e la neve è $\mu_d = 0.12$, che egli esercita una spinta di modulo $F = 87\,\mathrm{N}$ e che alla partenza lo sciatore ha raggiunto la velocità sopra detta nel tempo $t = 12\,\mathrm{s}$, determinare

a) la massa dello sciatore;

a) il modulo F_1 della forza con la quale si è inizialmente spinto.

✍ **Es. 14** — Un uomo spinge orizzontalmente una cassa di massa $m = 120\,\mathrm{kg}$ con una forza di modulo $F = 320\,\mathrm{N}$; fra la cassa e la superficie d'appoggio orizzontale vi è attrito con coefficiente di dinamico $\mu_d = 0.250$; determinare

a) l'accelerazione della cassa;

b) il modulo della forza che è necessario esercitare affinché la cassa abbia velocità costante.

✍ **Es. 15** — Un uomo spinge orizzontalmente una cassa di massa $m = 60.0\,\text{kg}$; tra la cassa e la superficie orizzontale di appoggio vi è attrito con coefficienti $\mu_s = 0.360$ e $\mu_d = 0.280$;

a) determinare il modulo F_M della forza massima possibile esercitata dall'uomo con cui la cassa rimane ferma;

b) sapendo che l'uomo esercita sulla cassa ferma una forza di modulo $F = 250\,\text{N}$, determinare la velocità della cassa dopo uno spostamento $s = 5\,\text{m}$.

☞ **Es. 16** — Un uomo tira una cassa di massa $m = 50\,\text{kg}$ su un piano orizzontale applicando un forza la cui direzione forma con l'orizzontale un angolo $\alpha = 20°$; sapendo che i coefficienti di attrito sono $\mu_s = 0.4$ e $\mu_d = 0.3$,

a) stabilire se la cassa si muove quando il modulo della forza esercitata dall'uomo è $F = 175\,\text{N}$;

b) noto che sulla cassa ferma viene applicata una forza di modulo $F_1 = 200\,\text{N}$, determinare il modulo v della velocità della cassa dopo uno spostamento $s = 6\,\text{m}$;

c) raggiunta la velocità di modulo $v_2 = 3\,\text{m/s}$, l'uomo smette di tirare; determinare quale distanza d percorre la cassa prima di fermarsi.

✐ **Es. 17** — Una cassa di massa $m_1 = 24\,\text{kg}$ si muove lungo una superficie orizzontale liscia sotto l'azione di una forza di trazione $\boldsymbol{F}$; un punto materiale di massa $m_2 = 2.6\,\text{kg}$ è appoggiato sulla superficie anteriore (nel senso del moto) della cassa; sapendo che il coefficiente di attrito statico fra la cassa e il punto materiale è $\mu_s = 0.78$, determinare il valore minimo del modulo di $\boldsymbol{F}$ affinché il punto materiale rimanga in equilibrio.

✍ **Es. 18** — Un punto materiale, su cui agiscono solo l'attrito dinamico e la forza peso, scende a velocità costante lungo un piano inclinato di un angolo $\alpha = 14°$ rispetto all'orizzontale; determinare il coefficiente di attrito dinamico.

☞ **Es. 19** — Un fanciullo spinge una slitta in salita lungo un pendio innevato inclinato di un angolo $\alpha = 35°$ con velocità costante; sapendo che la massa della slitta è $m = 5.8\,\text{kg}$ e che il coefficiente d'attrito dinamico fra la slitta e la neve è $\mu_d = 0.2$, determinare

a) il modulo della forza esercitata dal ragazzo;

b) il modulo della forza che il fanciullo deve esercitare perché la slitta salga con un accelerazione di modulo $a = 1.1\,\text{m/s}^2$;

c) l'accelerazione con cui la slitta scivola lungo la discesa se il fanciullo la lascia andare partendo da ferma.

☞ **Es. 20** — Un punto materiale scende lungo un piano inclinato di lunghezza $\ell = 1.2\,\text{m}$ e di base $b = 0.9\,\text{m}$; sapendo che l'accelerazione con cui il punto materiale scende ha modulo $a = 3.1\,\text{m/s}^2$, determinare il coefficiente di attrito dinamico presente fra il punto materiale e il piano inclinato.

Fili e carrucole

✍ **Es. 1** — Una carrucola è fissata al soffitto, mentre una seconda carrucola è tenuta sospesa dal filo che passa nella prima e va quindi a fissarsi, a sua volta, al soffitto; a questa seconda carrucola mobile è fissato un carico di massa $m = 75.0\,\text{kg}$ determinare il modulo della forza che è necessario applicare al filo per sollevare il carico.

☞ **Es. 2** — Due punti materiali di masse $m_1 = 12.3\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 15.4\,\mathrm{kg}$ si trovano su due piani inclinati diversi ma aventi il lato dell'altezza in comune; i due punti materiali sono collegati da un filo inestensibile tramite una carrucola; sapendo che gli angoli di inclinazione dei due piani inclinati sono rispettivamente $\alpha_1 = 36.0°$ e $\alpha_2 = 25.0°$ determinare

a) il verso e il modulo dell'accelerazione;

b) la tensione del filo.

✐ **Es. 3** — Un punto materiale di massa $m = 6.8\,\mathrm{kg}$ si trova appeso ad un soffitto mediate due fili che formano con il piano del soffitto due angoli $\alpha_1 = 52°$ e $\alpha_2 = 35°$; determinare le tensioni dei due fili.

✐ **Es. 4** — Un lampadario di massa m è appeso a due fili, ciascuno dei quali sopporta al massimo una tensione di modulo $\tau = 300\,\mathrm{N}$; sapendo fili sono inclinati rispettivamente di due angoli $\alpha = 30°$ e $\beta = 42°$ rispetto al soffitto, determinare la massima massa che può avere il lampadario perché nessuno dei due fili si spezzi.

☞ **Es. 5** — Un punto materiale di massa $m = 14\,\mathrm{kg}$ è sospeso mediante da un filo orizzontale avente tensione di modulo τ_1 e un filo obliquo inclinato di un angolo $\alpha = 40°$ rispetto all'orizzontale avente tensione di modulo τ_2; determinare τ_1 e τ_2.

☞ **Es. 6** — Un atleta di sci nautico avente massa $m = 75.0\,\mathrm{kg}$ procede a velocità costante tirato da due motoscafi con due fili orizzontali inclinati dell'angolo $\alpha = 32.0°$ rispetto alla direzione del moto; sapendo che la forza di attrito ha modulo $F_a = 300\,\mathrm{N}$, determinare

a) il modulo della forza esercitata da ciascuno dei due motoscafi;

b) il modulo della forza che dovrebbero esercitare i motoscafi perché lo sciatore abbia un'accelerazione di modulo $a = 2.0\,\mathrm{m/s^2}$.

✐ **Es. 7** — Tarzan è appeso contemporaneamente a due liane inclinate rispetto all'orizzontale di angoli $\alpha_1 = 35°$ e $\alpha_2 = 52°$; sapendo che ciascuna liana può sopportare al massimo una tensione di modulo $\tau = 550\,\mathrm{N}$ e che la massa di Tarzan è $m = 87\,\mathrm{kg}$, stabilire se le liane reggono il peso di Tarzan.

☞ **Es. 8** — Un muratore fissa alla corda di una carrucola da una parte un secchio di massa $m_1 = 6.5\,\mathrm{kg}$ e dall'altra uno di massa $m_2 = 5.5\,\mathrm{kg}$, quindi lascia la carrucola libera di muoversi; determinare

a) i moduli della tensione della corda e dell'accelerazione dei secchi;

b) il modulo della forza verso il basso che il muratore deve esercitare sulla massa m_2 affinché le accelerazioni abbiano lo stesso modulo ma il verso invertito rispetto al caso a).

Forza elastica

✍ **Es. 1** — Una molla di costante elastica $k = 52\,\mathrm{N/m}$ è collegata ad un soffitto tramite un filo; è quindi collegata ad punto materiale di massa $m = 4.7\,\mathrm{kg}$ tramite un secondo filo; determinare l'allungamento della molla e la tensione dei due fili.

☞ **Es. 2** — Un punto materiale di massa $m = 350\,\mathrm{g}$ è sospeso al soffitto per mezzo di due molle uguali di costante elastica $k = 56.7\,\mathrm{N/m}$; sapendo che nella posizione di equilibrio le due molle formano i lati di un triangolo equilatero, determinare l'allungamento delle due molle.

☞ **Es. 3** — Una molla appesa verticalmente ha lunghezza $\ell = 48\,\mathrm{cm}$ mentre sostiene una massa $m_1 = 4.2\,\mathrm{kg}$; aggiungendo la massa $m_2 = 1.8\,\mathrm{kg}$ la molla si allunga di $\Delta\ell = 4.0\,\mathrm{cm}$; determinare

a) la costante elastica k della molla;

b) la lunghezza ℓ_0 della molla a riposo.

Es. 4 — Un punto materiale di massa $m = 1.3\,\mathrm{kg}$ è attaccato a una molla di costante elastica $k = 22\,\mathrm{N/m}$ e lunghezza a riposo $\ell_0 = 50\,\mathrm{cm}$; la molla viene posta in rotazione (su un piano orizzontale) e risulta allungata di $\Delta\ell = 10\,\mathrm{cm}$; determinare la velocità di rotazione del punto materiale.

Es. 5 — Un punto materiale è posto tra due pareti affacciate, fissato a due molle di costanti elastiche k_1 e k_2; entrambe le molle sono allungate rispetto alla lunghezza di equilibrio; determinare il rapporto fra i loro allungamenti.

Es. 6 — Un punto materiale di massa $m = 6.4\,\mathrm{kg}$ è appesa ad una molla fissata ad un sostegno che rispetto alla lunghezza di riposo risulta allungata di $\Delta\ell_1 = 12\,\mathrm{cm}$;

a) determinare la costante elastica della molla;
b) se il sostegno viene sollevato con un'accelerazione $a = 2.0\,\mathrm{m/s^2}$, determinare l'allungamento $\Delta\ell_2$ della molla.

Pendolo semplice

Es. 1 — Un pendolo semplice compie 5 piccole oscillazioni complete in 16 secondi; determinare la lunghezza del filo.

Es. 2 — Il pendolo, supposto semplice, di un orologio compie mezza piccola oscillazione completa ogni secondo; determinare la lunghezza del filo.

Es. 3 — Un pendolo semplice compie 12 piccole oscillazioni ogni 5 secondi sulla superficie terrestre; determinare il periodo delle piccole oscillazioni dello stesso pendolo sulla superficie lunare.

Es. 4 — Un pendolo viene portato dal livello del mare ad un'altezza $h = 2500\,\mathrm{m}$ s.l.m., sapendo che l'accelerazione di gravità dipende dall'inverso del quadrato della distanza dal centro della Terra, determinare la variazione percentuale del periodo del pendolo.

Forza centripeta

Es. 1 — Un lanciatore di peso fa muovere l'attrezzo lungo una traiettoria circolare inclinata di $45°$ rispetto al piano orizzontale; sapendo che la massa del martello è $m = 7.273\,\mathrm{kg}$ e che la lunghezza del cavo d'acciaio è $\ell = 119.5\,\mathrm{cm}$, determinare la frequenza del moto di rotazione e la forza applicata dall'atleta necessarie a battere il record del mondo della specialità che è $d = 86.74\,\mathrm{m}$ (si supponga, per semplicità, che il lancio avvenga dall'altezza del suolo).

Es. 2 — Una bambina si trova su una giostra a una distanza $d = 2.8\,\mathrm{m}$ dal centro di rotazione; sapendo che il coefficiente di attrito statico fra la bambina e il pavimento della giostra è $\mu_s = 0.45$, determinare la massima frequenza di rotazione della giostra affinché la bambina riesca a mantenere l'equilibrio.

Es. 3 — Un punto materiale di massa $m = 15.4\,\mathrm{kg}$ è fissato ad un filo di lunghezza $\ell = 1.25\,\mathrm{m}$; il punto materiale viene fatto ruotare lungo una traiettoria circolare verticale con velocità di modulo costante in modo da compiere cinquanta giri al minuto; determinare la tensione del filo nel punto A piú alto, nel punto B piú basso della traiettoria.

Es. 4 — Un motociclista effettua un 'giro della morte' all'interno di una pista circolare di raggio $r = 3.5\,\mathrm{m}$ mantenendo una velocità costante di modulo $v = 30\,\mathrm{km/h}$; sapendo che la massa complessiva della moto e del motociclista è $m = 450\,\mathrm{kg}$, determinare

a) il modulo della reazione vincolare della pista sul motociclista nel punto piú alto della traiettoria;
b) il modulo della velocità minima che consente al motociclista di completare il giro.

Capitolo 3

Lavoro ed energia

3.1 Lavoro e teorema dell'energia cinetica

Lo studio del moto di un punto materiale dal punto di vista energetico fornisce un importante strumento di comprensione del fenomeno fisico e, molto spesso, un piú rapido ed efficace metodo risolutivo dei problemi.

3.1.1 Lavoro

Si definisce *lavoro* di una forza costante $\boldsymbol{F}$ che agisce su un corpo in movimento il prodotto scalare fra la forza e lo spostamento $\boldsymbol{s}$ del corpo

$$\mathcal{L} = \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{s} \ . \tag{3.1}$$

Se la forza non è costante è necessario suddividere la traiettoria in tanti spostamenti $\delta\boldsymbol{s}_1, \ldots, \delta\boldsymbol{s}_n$ sufficientemente piccoli da far sí che in ciascuno di essi la forza assuma i valori costanti $\boldsymbol{F}_1, \ldots, \boldsymbol{F}_n$; in tale cosa il lavoro per ciascuno dei piccoli spostamenti diviene $\delta\mathcal{L} = \boldsymbol{F} \cdot \delta\boldsymbol{s}$ e quindi complessivamente si ha

$$\mathcal{L} = \boldsymbol{F}_1 \cdot \delta\boldsymbol{s}_1 + \cdots + \boldsymbol{F}_n \cdot \delta\boldsymbol{s}_n \ .$$

In generale, scelto come asse x quello in cui avviene il moto, il lavoro di una forza variabile su di un punto materiale che si muove da x_A a $x_B$può essere calcolato, facendo attenzione al segno, come area della regione di piano delimitata fra il grafico della componente forza nella direzione x in funzione della posizione e l'asse delle ascisse, come rappresentato in figura. L'unità di misura del lavoro è il joule che ha le dimensioni di una forza per una lunghezza.

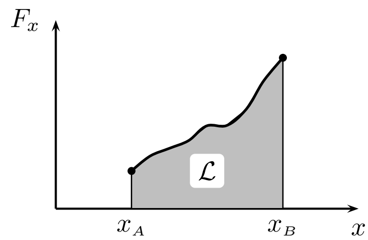


Figura 3.1: Lavoro come area.

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Il motore di un ascensore solleva con velocità costante la cabina contenente quattro persone per un dislivello $h = 45\,\mathrm{m}$; sapendo che la cui massa complessiva della cabine e delle persone contenute è $m = 450\,\mathrm{kg}$,

① determinare il lavoro compiuto dal motore;

② determinare il lavoro della forza peso.

Soluzione

① Poiché il moto avviene con velocità costante, la somma delle forze agenti deve essere nulla; pertanto la forza con cui il motore solleva la cabina e le persone in essa contenute è uguale in modulo e direzione ma opposta in verso alla forza peso. Tale forza è quindi $\boldsymbol{F} = -m\boldsymbol{g}$. Lo spostamento ha modulo h ed è parallelo ed equiverso alla forza $\boldsymbol{F}$ e quindi il lavoro è dato da

$$\mathcal{L} = Fh = mgh = 2.0 \cdot 10^5 \text{ J} .$$

② La forza peso, che si oppone al sollevamento della cabina da parte del motore dell'ascensore, forma con il vettore spostamento un angolo $\alpha = 180°$; il suo lavoro è quindi negativo e vale

$$\mathcal{L}_p = -mgh = -2.0 \cdot 10^5 \text{ J} .$$

Poiché la forza totale agente sulla cabina è nulla, deve essere nullo anche il lavoro totale di tale forza, come infatti accade.

Problema 2

Una cassa di massa $m = 75\,\text{kg}$ viene spostata di $s = 4.0\,\text{m}$ su un pavimento orizzontale per mezzo di un filo applicato sulla sua sommità e che forma con l'orizzontale un angolo $\alpha = 35°$; sapendo che la tensione del filo è ha modulo $\tau = 520\,\text{N}$ e che il coefficiente di attrito dinamico fra la cassa ed il pavimento è $\mu_d = 0.72$, determinare

① il lavoro del filo e il lavoro della forza di attrito;

② quanto deve valere τ perché la cassa si muova di moto uniforme.

Soluzione

① La cassa è sottoposta alla forza peso $m\boldsymbol{g}$, alla tensione del filo $\boldsymbol{\tau}$ e alla reazione vincolare del piano; quest'ultima ha una componente perpendicolare $\boldsymbol{N}$ e una componente orizzontale, che è la forza di attrito dinamico $\boldsymbol{F}_d$. La tensione del filo forma un angolo α con il vettore spostamento e quindi il suo lavoro è dato da

$$\mathcal{L} = \tau s \cos\alpha = 1.7 \cdot 10^3 \text{ J} .$$

Non essendoci moto verticale la componente perpendicolare al piano della risultante delle agenti deve essere nulla; quindi deve valere

$$N + \tau \operatorname{sen}\alpha = mg \qquad \longrightarrow \qquad N = mg - \tau \operatorname{sen}\alpha .$$

D'altra parte, il modulo della forza di attrito dinamico è proporzionale ad N e vale

$$F_d = \mu_d N = \mu_d (mg - \tau \operatorname{sen}\alpha) .$$

Questa forza ha la stessa direzione ma verso opposto del vettore spostamento, il suo lavoro è quindi

$$\mathcal{L}_d = -F_d s = \mu_d (mg - \tau \operatorname{sen}\alpha) s = -1.3 \cdot 10^3 \text{ J} .$$

② La cassa si muove di moto uniforme quando la risultante delle forza agente su di essa è nulla; visto che il forza peso ed $\boldsymbol{N}$ sono perpendicolari alla spostamento e quindi compiono lavoro nullo, tale condizione è verificata quando la somma dei lavori della tensione e dell'attrito è nulla; cioè quando

$$\mathcal{L} + \mathcal{L}_d = 0 \qquad \longrightarrow \qquad \mu_d (mg - \tau \operatorname{sen}\alpha) s = \tau s \cos\alpha$$

e quindi

$$\tau = \frac{\mu_d\, mg}{\mu_d \operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha} = 4.3 \cdot 10^2 \text{ J} .$$

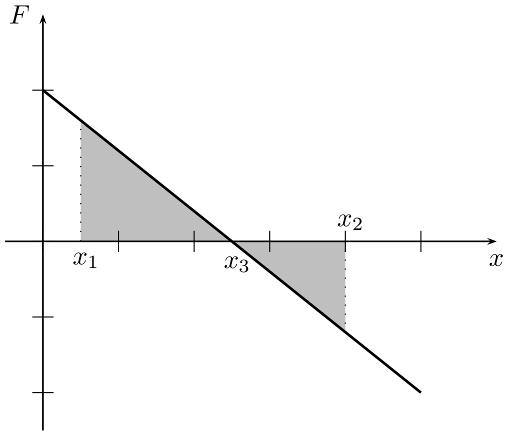
Problema 3

Il punto materiale P si muove di moto rettilineo lungo una retta, che viene scelta come asse delle ascisse orientato nel verso del moto, sottoposto ad una forza anch'essa diretta come l'asse delle ascisse mentre la sua componente F lungo tale asse dipende dalla coordinata x secondo la legge

$$F(x) = ax + b \ .$$

Sapendo che $a = -0.80\,\mathrm{N/m}$ e $b = 2.0\,\mathrm{N}$ determinare il lavoro compiuto dalla forza sul punto materiale mentre questo si sposta dal punto di ascissa $x_1 = 1.2\,\mathrm{m}$ al punto di ascissa $x_2 = 4.0\,\mathrm{m}$.

Soluzione



Con riferimento alla figura, nell'intervallo fra la posizione x_1 e la posizione x_2, la componente F della forza cambia segno. Quindi nell'intervallo in cui è positiva la forza è parallela ed equiversa all'asse delle ascisse, e quindi allo spostamento di P: qui il suo lavoro è dunque positivo; mentre nell'intervallo in cui è negativa è parallela all'asse delle ascisse ma ha verso opposto, ha pertanto verso opposto anche rispetto allo spostamento di P: qui il suo lavoro è pertanto negativo.
La forza, poi, non ha modulo costante, quindi il suo lavoro va calcolato come area e precisamente si tratta di calcolare l'area ombreggiata in figura; visto quanto detto sopra, la porzione di area che sta sopra l'asse delle ascisse corrisponde ad un lavoro positivo, mentre quella che sta sotto l'asse delle ascisse corrisponde ad un lavoro negativo. Per determinare tali aree è necessario determinare il punto x_3 in cui la forza si annulla. Questo è dato dalla soluzione dell'equazione $F = 0$, e quindi

$$ax + b = 0 \qquad \longrightarrow \qquad x_3 = -\frac{b}{a} = 2.5\,\mathrm{m} \ .$$

Tenendo conto di quanto detto, si può facilmente calcolare il lavoro richiesto:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\big[(x_1)(x_3 - x - 2) + f(x_2)(x_2 - x_3)\big] = 0.70\,\mathrm{J} \ .$$

3.1.2 Teorema dell'energia cinetica

In generale, il lavoro totale di tutte le forze che agiscono sul punto materiale P di massa m è legato alla variazione di velocità di P nel suo spostamento dal punto A al punto B dalla seguente relazione, detta *teorema dell'energia cinetica*

$$\mathcal{L}_{A\to B} = \Delta\mathcal{E} = \mathcal{E}_c(B) - \mathcal{E}_c(A)$$

ove $\mathcal{E}_c$ è l'*energia cinetica* del punto materiale P definita da

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 \ .$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Un'automobilista che viaggia ad una velocità costante di modulo $v_0 = 50\,\mathrm{km/h}$ vede un ostacolo e frena bruscamente; sapendo che la massa dell'automobile è $m = 850\,\mathrm{kg}$ e che spazio di frenata è $s = 30\,\mathrm{m}$, ① determinare il modulo della forza frenante $\boldsymbol{F}_f$;

② determinare, con la stessa forza di attrito, quale diventa lo spazio di frenata per una velocità iniziale di modulo $v_1 = 100\,\mathrm{km/h}$.

Soluzione

① Da quando l'automobilista inizia a frenare l'unica forza che compie lavoro è quella frenante; tale lavoro è quindi responsabile della variazione di energia cinetica da valore iniziale a zero; ricordando che la forza frenante si oppone al moto e quindi ha un valore negativo, si ha

$$\mathcal{L}_f = -F_f s = -\frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \longrightarrow \qquad F_f = \frac{mv_0^2}{2s} = 2.7 \cdot 10^3\,\mathrm{N}\ .$$

② Usando la medesima relazione si trova

$$s_1 = \frac{mv_1^2}{2F_f} = \frac{v_1^2}{v^2}s = 120\,\mathrm{m}\ .$$

si noti che la distanza di frenata è proporzionale al quadrato della velocità e quindi raddoppiando la velocità lo spazio di frenata diventa il quadruplo.

Problema 2

Un punto materiale di massa $m = 18\,\mathrm{kg}$ scende lungo un piano inclinato di altezza $h = 2.5\,\mathrm{m}$; sapendo che parte da fermo e che non sono presenti forze di attrito, determinare

① il lavoro compiuto dalla forza peso quando il punto materiale è giunto in fondo al piano inclinato;

② il modulo della velocità finale.

Soluzione

① Lo spostamento ha modulo uguale alla lunghezza ℓ del piano inclinato; indicando con α l'angolo di inclinazione si ha

$$\mathcal{L} = m\boldsymbol{g}\ell \operatorname{sen}\alpha = mgh = 440\,\mathrm{J}\ ,$$

ove si è usata la relazione $h = \ell \operatorname{sen}\alpha$.

② Usando il teorema dell'energia cinetica, poiché l'energia cinetica iniziale è nulla si ha che l'energia cinetica finale è uguale al lavoro delle forze agenti. L'unica altra forza agente oltre al peso è la reazione vincolare del piano inclinato che, in assenza di attrito, è perpendicolare allo spostamento e quindi compie lavoro nullo; pertanto l'energia cinetica finale è uguale al lavoro compiuto della forza peso, vale cioè

$$mgh = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \longrightarrow \qquad v = \sqrt{2gh} = 7.0\,\mathrm{m/s}\ ,$$

risultato che concorda con quanto già trovato, con un calcolo piú elaborato, studiando il piano inclinato.

Problema 3

Un punto materiale di massa $m = 18\,\mathrm{kg}$ scende lungo un piano inclinato di altezza $h = 2.5\,\mathrm{m}$ e lunghezza $\ell = 7.5\,\mathrm{m}$; sapendo che parte da fermo che la velocità in fondo al piano inclinato ha modulo $v = 5.0\,\mathrm{m/s}$, determinare il modulo della forza di attrito radente dinamico presente fra il punto materiale e la superficie del piano inclinato.

Soluzione

Osservando che le forze che compiono un lavoro diverso da zero sono la forza peso e la forza di attrito dinamico, per il teorema dell'energia cinetica deve valere la seguente relazione

$$\mathcal{L}_p + \mathcal{L}_d = \frac{1}{2}mv^2\ .$$

Il lavoro della forza peso è stato determinato nell'esercizio precedente e vale $\mathcal{L}_p = mgh$; per determinare il lavoro della forza di attrito dinamico basta osservare che si tratta di una forza costante che ha la stessa direzione ma verso opposto dello spostamento; vale quindi $\mathcal{L}_d = -F_d\ell$. Si ha pertanto

$$mgh - F_d\ell = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \longrightarrow \qquad F_d = \frac{m}{2\ell}\left(2gh - v^2\right) = 29\,\mathrm{N} \ .$$

3.1.3 Potenza

Si definisce *potenza* di una forza $\boldsymbol{F}$ il lavoro da essa compiuto nell'unità di tempo; se la forza è costante nell'intervallo di tempo Δt la potenza è data da

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{L}}{\Delta t} \ . \tag{3.2}$$

Se la forza è variabile si considera un intervallo di tempo δt sufficiente piccolo da poter considerare in esso la forza costante, si ha allora,

$$\mathcal{P} = \frac{\boldsymbol{F}\cdot\delta\boldsymbol{s}}{\delta t}$$

che, al tendere a zero dell'intervallo δt fornisce la potenza istantanea

$$\mathcal{P}(t) = \boldsymbol{F}(t)\cdot\boldsymbol{v}(t) \ .$$

L'unità di misura della potenza è il watt che ha le dimensioni di un lavoro diviso per un tempo.

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Un bambino traina una slitta che applica su un piano orizzontale applicando una forza di modulo $F = 50\,\mathrm{N}$ e che forma un angolo $\alpha = 35°$ rispetto all'orizzontale; sapendo che la slitta si muove con velocità costante di modulo $v = 0.75\,\mathrm{m/s}$ determinare

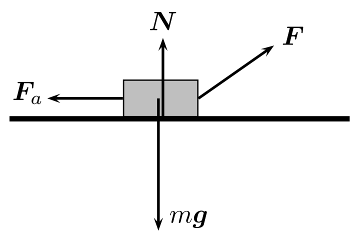
① il lavoro fatto dalle forze agenti sulla slitta nel tempo $t = 12\,\mathrm{s}$;

② la potenza della forza $\boldsymbol{F}$.

Soluzione

① Sulla slitta agiscono quattro forze: la forza peso $m\boldsymbol{g}$, la forza $\boldsymbol{N}$ di reazione perpendicolare della superficie di appoggio, la forza $\boldsymbol{F}$ esercitata dal bambino e la forza di attrito radente dinamico $\boldsymbol{F}_d$.
La forza peso e la reazione $\boldsymbol{N}$ sono perpendicolari allo spostamento e quindi il loro lavoro è nullo.
Poiché la forza $\boldsymbol{F}$ rimane costante durante il moto il lavoro è data dalla (3.1); il modulo dello spostamento è $s = vt$; quindi ricordando la definizione di prodotto scalare (1.15), si ha quindi

$$\mathcal{L} = Fs\cos\alpha = Fvt\cos\alpha = 370\,\mathrm{J} \ .$$



Poiché la velocità è costante la somma delle forze agenti sulla slitta deve essere nulla, quindi la forza di attrito deve essere opposta alla componente orizzontale della forza $\boldsymbol{F}$; in particolare quindi i due moduli sono uguali, vale cioè $F_a = F\cos\alpha$; osservando ora che la forza di attrito e lo spostamento hanno la stessa direziona ma verso opposto, e quindi l'angolo fra i due vettori è di 180°, sia ha

$$\mathcal{L}_a = F_a s\cos 180° = -F_a s = -\mathcal{L} = -370\,\mathrm{J} \ .$$

Si sarebbe potuto arrivare a questo risultato piú semplicemente osservando che se la velocità della slitta è costante la sua energia cinetica non varia e quindi, per il teorema dell'energia cinetica, il lavoro totale

delle forze agenti sulla slitta deve essere di attrito deve essere uguale ed opposto al lavoro della forza $\boldsymbol{F}$.
② La potenza di $\boldsymbol{F}$ è data dalla (3.2):

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{L}}{t} = 31\,\mathrm{W}\ .$$

Problema 2

Una lampadina a incandescenza consuma una potenza $\mathcal{P} = 100\,\mathrm{W}$; determinare l'energia che è necessario fornirle per mantenerla accesa per quattro ore.

Soluzione

Dalla definizione di potenza, equazione (3.2), si trova immediatamente che l'energia necessaria richiesta è il prodotto della potenza per il tempo in secondi, e quindi

$$\mathcal{E} = \mathcal{P}t = 1.44 \cdot 10^5\,\mathrm{J}\ .$$

Problema 3

Un'automobile di massa $m = 720\,\mathrm{kg}$ è sottoposta ad una forza di modulo costante ed accelera da una velocità di modulo $v_1 = 3.5\,\mathrm{m/s}$ a una velocità di modulo $v_2 = 12\,\mathrm{m/s}$ in nello spazio $s = 30\,\mathrm{m}$; determinare

① il modulo della forza esercitata dal motore ed il lavoro da esso svolto;
② la potenza erogata dal motore.

Soluzione

① Il lavoro esercitato dalla forza può esse ottenuto dal teorema dell'energia cinetica:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\, m\,(v_2^2 - v_1^2) = 4.7 \cdot 10^4\,\mathrm{J}\ ;$$

e, visto che la forza è costante, tale lavoro è uguale al modulo della forza per il modulo dello spostamento, e quindi

$$F = \frac{\mathcal{L}}{s} = \frac{1}{2s}\, m\,(v_2^2 - v_1^2) = 1.6\,\mathrm{N}\ .$$

② Visto che la forza è costante, il modo è uniformemente accelerato; lo spazio percorso nel moto uniformemente accelerato è dato, equazione (1.10), da

$$s = \frac{v_1 + v_2}{2}\, t \qquad \longleftrightarrow \qquad t = \frac{2s}{v_1 + v_2}$$

e quindi la potenza sviluppata è

$$\mathcal{P} = \frac{\mathcal{L}}{t} = \frac{m}{4s}\,(v_2^2 - v_1^2)(v_1 + v_2) = 1.2 \cdot 10^4\,\mathrm{W}\ .$$

3.1.4 Esercizi

LAVORO

✍ **Es. 1** — Uno sciatore d'acqua si sta muovendo con velocità costante di modulo $v = 15\,\mathrm{m/s}$ e direzione parallela a quella del motoscafo che lo traina per mezzo di un filo che forma con la direzione del moto un angolo $\alpha = 20°$; sapendo che la tensione del filo ha modulo $\tau = 70\,\mathrm{N}$ determinare il lavoro fatto dalla tensione del filo me tempo $t = 25\,\mathrm{s}$.

☞ **Es. 2** — Due carichi di masse $m_1 = 14\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 13\,\mathrm{kg}$ sono appesi ai due estremi di un filo passante per una carrucola (come nella macchina di Atwood); determinare il lavoro della tensione del filo e della forza peso agenti sulle due masse se il carico di massa maggiore scende di $h = 2.4\,\mathrm{m}$.

☞ **Es. 3** — Due persone spostano una cassa di massa $m = 120\,\mathrm{kg}$ su di un pavimento orizzontale; la prima spinge la cassa con una forza orizzontale di modulo $F_1 = 650\,\mathrm{N}$, la seconda tira la cassa tramite una corda di massa trascurabile esercitando un forza di modulo $F_2 = 350\,\mathrm{N}$ lungo una direzione inclinata verso l'alto di un angolo $\alpha = 24°$; sapendo che fra cassa e pavimento vi è un attrito dinamico di coefficiente $\mu_d = 0.700$ e che la cassa viene spostata di $s = 350\,\mathrm{cm}$, determinare il lavoro compiuto da ciascuna forza.

✐ **Es. 4** — Una molla di costante elastica $k = 4.7\,\mathrm{N/m}$ a riposo per $x = 0$ esercita una forza su un punto materiale spostandolo dalla posizione $x_1 = 20\,\mathrm{cm}$ alla posizione $x_2 = 15\,\mathrm{cm}$; determinare il lavoro fatto dalla forza elastica.

Teorema dell'energia cinetica

☞ **Es. 1** — Un pattinatore di massa $m = 65\,\mathrm{kg}$ nel tempo di $t = 4.5\,\mathrm{s}$ aumenta il modulo dalla propria velocità dal valore $v_0 = 4.0\,\mathrm{m/s}$ al valore $v = 9.0\,\mathrm{m/s}$; supponendo che non vi sia attrito, determinare

a) il modulo F della forza costante con cui si è spinto e lo spazio percorso;

b) quanti metri percorre ancora prima di fermarsi dal momento in cui raggiunge la velocità di modulo v se comincia immediatamente a frenare con una forza di modulo $F_1 = 74\,\mathrm{N}$.

c) il modulo F_2 della forza frenante se si ferma dopo aver percorso $s_2 = 24\,\mathrm{m}$.

☞ **Es. 2** — Un'automobile di massa $m = 1.2 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$ subisce da parte del motore una spinta con una forza costante di modulo $F = 2\,\mathrm{kN}$, e una forza frenante di modulo $F_f = 0.30\,\mathrm{kN}$; sapendo che la velocità iniziale ha modulo $v_0 = 2.4\,\mathrm{m/s}$ e la finale $v = 16\,\mathrm{m/s}$,

a) determinare lo spazio percorso ed il tempo impiegato a percorrerlo;

b) raggiunta la velocità finale, l'automobile viene lasciata muoversi sotto l'azione della sola forza frenante; determinare la distanza percorsa prima di fermarsi.

✍ **Es. 3** — Un proiettile di massa $m_1 = 3.0\,\mathrm{g}$ si muove con velocità di modulo $v = 100\,\mathrm{km/h}$ quando colpisce un bersaglio di legno e vi penetra per $d_1 = 12\,\mathrm{cm}$; supponendo che la forza che ha frenato il proiettile all'interno del bersaglio sia costante, determinare

a) l'intensità della forza frenante;

b) la massa m_2 di un secondo proiettile che si muove alla stessa velocità e subisce la stessa forza frenante e penetra di per $d_2 = 9.0\,\mathrm{cm}$.

✍ **Es. 4** — Un proiettile di massa $m = 1.2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$ si muove, senza essere soggetto ad alcuna forza con energia cinetica $\mathcal{E}_c = 1.2\,\mathrm{J}$; determinare

a) lo spazio s percorso dal proiettile nel tempo $t = 2.6\,\mathrm{s}$;

b) quanto spazio serve per fermarlo utilizzando un forza frenante di modulo $F = 12\,\mathrm{N}$.

✍ **Es. 5** — Un'automobile di massa $m = 850\,\mathrm{kg}$ aumenta il modulo della sua velocità da $v_0 = 15\,\mathrm{m/s}$ a $v_2 = 25\,\mathrm{m/s}$ nel tempo $t = 6.0\,\mathrm{s}$; supponendo che la forza agente sia costante, determinare

a) il lavoro necessario per aumentare il modulo della velocità da v_0 a $v_1 = 20\,\mathrm{m/s}$ e da v_1 a v_2;

b) lo spazio totale s percorso.

✍ **Es. 6** — Un fanciullo tira orizzontalmente una slitta di massa $m = 95\,\mathrm{kg}$ con velocità costante per $s = 9.0\,\mathrm{m}$; sapendo che sulla slitta agisce una forza di attrito di modulo $F_a = 210\,\mathrm{N}$, determinare

a) il lavoro totale delle forze agenti sulla slitta;

b) il lavoro compiuto dal fanciullo;

c) il modulo F della forza costante che deve esercitare il fanciullo per far passare, durante lo stesso spostamento s e con la forza di attrito data, la velocità della slitta dalla velocità di modulo $v_1 = 1.5\,\mathrm{m/s}$ alla velocità di modulo $v_2 = 5.5\,\mathrm{m/s}$.

✍ **Es. 7** — Un automobile accelera da $v_1 = 3.5\,\mathrm{m/s}$ a $v_2 = 54\,\mathrm{km/h}$ in uno spazio $s = 22\,\mathrm{m}$; sull'automobile agiscono la spinta costante del motore di modulo $F = 4.75\,\mathrm{kN}$ e una forza di attrito costante di modulo $F_a = 8.5 \cdot 10^2\,\mathrm{N}$; determinare

a) la massa m dell'automobile;

b) la velocità finale dell'automobile nel caso la sua massa fosse $m_1 = 950\,\mathrm{kg}$

☞ **Es. 8** — Due motoscafi trainano uno sciatore acquatico di massa $m = 75\,\mathrm{kg}$ tramite due fili di massa trascurabile, esercitando due forze entrambe di modulo $F = 6 \cdot 10^2\,\mathrm{N}$ che formano fra loro un angolo $\alpha = 90°$; sapendo che la velocità dello sciatore è costante di modulo $v_0 = 6.0\,\mathrm{m/s}$,

a) determinare il modulo della forza di attrito;

b) successivamente i due motoscafi aumentano la forza di trazione a $F_1 = 7 \cdot 10^2\,\mathrm{N}$; se la forza di attrito rimane invariata, determinare la velocità dopo uno spostamento $s = 10\,\mathrm{m}$.

☞ **Es. 9** — Una slitta giocattolo di massa $m = 1.5\,\mathrm{kg}$ scende, partendo da ferma, lungo un piano inclinato di un angolo $\alpha = 30°$ e di lunghezza $\ell = 2.0\,\mathrm{m}$; sapendo che il coefficiente di attrito dinamico fra la slitta e il piano è $\mu_d = 0.12$, determinare

a) l'energia $\mathcal{E}_d$ dissipata dall'attrito;

b) la velocità della slitta in fondo alla discesa.

☞ **Es. 10** — Un pattinatore di massa $m = 68\,\mathrm{kg}$ si muove su una pista il cui coefficiente di attrito dinamico è $\mu_d = 0.10$; determinare

a) il modulo della forza con la quale deve spingersi il pattinatore per avanzare a velocità costante;

b) il modulo della forza necessaria per accelerare dalla velocità di modulo $v_1 = 2.3\,\mathrm{m/s}$ alla velocità di modulo $v_2 = 5.5\,\mathrm{m/s}$ spostandosi di $s = 12\,\mathrm{m}$.

✐ **Es. 11** — L'autista di un automobile di massa $m = 725\,\mathrm{kg}$ in moto ad una velocità di modulo $v = 32\,\mathrm{m/s}$ frena improvvisamente facendo slittare le ruote; sapendo che l'automobile si ferma dopo aver percorso lo spazio $s_1 = 80\,\mathrm{m}$

a) determinare il coefficiente di attrito dinamico μ_d presente fra pneumatico e asfalto;

b) determinare lo spazio s_2 di frenata nel caso la strada sia in discesa con una pendenza del 18%.

Potenza

✍ **Es. 1** — Una forza orizzontale costante di modulo $F = 30\,\mathrm{N}$ è applicata ad una scatola che si muove con velocità costante su una superficie con attrito; sapendo che la forza sviluppa una potenza $\mathcal{P} = 50\,\mathrm{W}$, determinare

a) la velocità della scatola;

b) la potenza $\mathcal{P}_a$ sviluppata dalla forza di attrito;

c) il lavoro compiuto dalla forza $\boldsymbol{F}$ nell'intervallo di tempo $\Delta t = 2.5\,\mathrm{s}$.

☞ **Es. 2** — Calcolare la potenza delle cascate del Niagara sapendo che l'acqua cade dall'altezza $h = 52\,\mathrm{m}$ e che ogni minuto vine riversata una massa $m = 1.1 \cdot 10^8\,\mathrm{kg}$ di acqua.

☞ **Es. 3** — Un ragazzo impiega $t = 11\,\mathrm{s}$ a salire di $h = 7.5\,\mathrm{m}$ lungo una corda verticale a velocità costante; sapendo che salendo sviluppa la potenza $\mathcal{P} = 367\,\mathrm{W}$,

a) determinare la massa del ragazzo, il modulo della sua velocità, e la forza, supposta costante, che esercita nella salita;

b) raddoppiando il tempo di salita, lasciando invariata l'altezza, stabilire come cambiano la forza esercitata, il lavoro svolto, la potenza sviluppata.

✐ **Es. 4** — Una locomotiva che sviluppa la potenza $\mathcal{P} = 2\,\mathrm{MW}$ è la motrice di un treno merci che aumenta il modulo della propria velocità da $v_1 = 12\,\mathrm{m/s}$ a $v_2 = 27\,\mathrm{m/s}$ nel tempo $t = 2\,\mathrm{min}$, determinare

a) la massa del treno;

b) il modulo della forza, supposta costante, che la locomotiva esercita sul treno.

c) la distanza d percorsa dal treno.

☞ **Es. 5** — I freni di un autocarro di massa $m = 2.5 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$ sviluppano una potenza $\mathcal{P} = 20\,\mathrm{kW}$; sapendo che la velocità iniziale dell'autocarro ha modulo $v = 23\,\mathrm{m/s}$, determinare

a) il tempo di frenata;

b) il modulo della forza, supposta costante, esercitata dai freni.

☞ **Es. 6** — Una automobile da corsa di massa $m = 850\,\mathrm{kg}$ aumenta il modulo della propria velocità da $v_0 = 0\,\mathrm{m/s}$ a $v = 330\,\mathrm{km/h}$ nel tempo $t = 19\,\mathrm{s}$; determinare

a) la potenza del motore;

b) in modulo della forza, supposta costante, esercitata dal motore sulla vettura;

c) la distanza percorsa.

☞ **Es. 7** — L'autista di un'automobile di massa $m = 750\,\mathrm{kg}$ che si muove con una velocità di modulo $v = 31\,\mathrm{m/s}$ frena improvvisamente; l'automobile si ferma dopo il tempo $t = 6.5\,\mathrm{s}$; determinare

a) la distanza d percorsa durante la frenata;

b) la potenza dei freni dell'automobile.

✍ **Es. 8** — Un montacarichi di potenza $\mathcal{P} = 2.0\,\mathrm{kW}$ solleva un carico di massa $m = 150\,\mathrm{kg}$ a velocità costante per un dislivello $h = 12\,\mathrm{m}$; determinare

a) il modulo della velocità;

b) il tempo necessario per sollevare il carico.

✍ **Es. 9** — Un ascensore solleva in un minuto $n = 20$ persone per 10 piani corrispondenti a un dislivello $h = 30\,\mathrm{m}$; supponendo che la massa di ciascuna persona sia $m = 720\,\mathrm{kg}$, determinare la potenza dell'ascensore.

✍ **Es. 10** — Il fabbisogno energetico umano giornaliero di un uomo per le funzioni vitali essenziali è $\mathcal{E} = 10^7\,\mathrm{J}$; determinare la potenza sviluppata dall'uomo.

3.2 Energia potenziale e conservazione dell'energia

Una forza è detta *conservativa* se il lavoro compiuto da essa su di un punto materiale dipende solo dalle posizioni iniziale e finale di questo e non dalla traiettoria seguita, né dal tipo di moto con cui essa viene percorsa.

Se una forza è conservativa il suo lavoro si può scrivere come variazione di una grandezza $\mathcal{U}$, detta *energia potenziale* che dipende solo dalla posizione. Vale cioè

$$\mathcal{L}_{A\to B} = -\Delta\mathcal{U} = \mathcal{U}(A) - \mathcal{U}(B) \ .$$

L'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva arbitraria dalla cui scelta dipende a quale punto assegnare energia potenziale nulla; tale scelta è solitamente motivata da criteri di comodità e di semplicità di calcolo. Fra le conservative si menzionano le forze costanti, come la forza peso, e le forze centrali che dipendono dalla distanza da un centro e la cui direzione è data dalla retta che passa per il centro e il punto materiale.

Se su un punto materiale agiscono solo forze conservative, la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale del punto materiale rimane costante durante il moto, vale cioè

$$\mathcal{E}_c(A) + U(A) = \mathcal{E}_c(B) + U(B) \tag{3.3}$$

ove A e B sono due punti qualunque appartenenti alla traiettoria dal punto materiale. La relazione precedente è nota con il nome di principio di conservazione dell'energia meccanica; la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale totale è infatti detta *energia meccanica*:

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_c + U$$

e quindi la (3.3) diventa

$$\mathcal{E}(A) = \mathcal{E}(B) \ .$$

3.2.1 Forza peso

La forza peso è costante e quindi è conservativa; la sua energia potenziale è proporzionale alla quota y a cui si trova il punto materiale a partire da uno zero scelto secondo convenienza; vale

$$\mathcal{U}_p(y) = mgy \ .$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Un sasso viene lanciato verso l'alto a partire dall'altezza $h_1 = 150\,\text{cm}$ rispetto al suolo con una velocità iniziale di modulo $v_1 = 8.5\,\text{m/s}$;

① determinare l'altezza massima H raggiunta;

② determinare il modulo v_2 della velocità del sasso quando esso si trova a $h_2 = 3.2\,\text{m}$ di altezza da suolo;

③ determinare a quale altezza h_3 il modulo della velocità è $v_3 = 4.0\,\text{m/s}$;

④ determinare il modulo v della velocità con cui il sasso cade a terra.

Soluzione

① Sul sasso agisce la sola forza peso, che è conservativa; quindi l'energia meccanica si conserva. Poiché quando il sasso raggiunge il punto piú alto della sua traiettoria si ferma (prima di ricadere), in quel punto l'energia cinetica è nulla e quindi tutta l'energia meccanica è trasformata in energia potenziale, vale cioè

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = mgH \qquad \longrightarrow \qquad H = h_1 + \frac{v_1^2}{2g} = 5.2\,\text{m} \ .$$

② In questo caso la conservazione dell'energia meccanica si scrive

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2 \qquad \longrightarrow \qquad v_2 = \sqrt{v_1^2 - 2g(h_2 - h_1)} = 6.2\,\text{m/s} \ .$$

Si osservi che quello trovato è il modulo della velocità del sasso quando si trova all'altezza h_2 sia nel suo moto di salita che nel suo moto di ricaduta; il modulo della velocità, quindi, dipende solo dall'altezza.
③ Si procede come nel caso precedente e si trova

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv_3^2 + mgh_3 \qquad \longrightarrow \qquad h_3 = h_1 + \frac{v_1^2 - v_3^2}{2g} = 4.4\,\mathrm{m}\ .$$

④ In questo caso, quando il sasso arriva a terra, l'energia meccanica è tutta cinetica, quindi si ha

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 = \frac{1}{2}mv^2 \qquad \longrightarrow \qquad v = \sqrt{v_1^2 + 2gh_1} = 10\,\mathrm{m/s}\ .$$

Problema 2

Un sasso di massa $m = 2.4\,\mathrm{kg}$ viene lanciato verso l'alto a partire da l'altezza $h = 1.2\,\mathrm{m}$ rispetto al suolo; dopo aver raggiunto la quota massima $H = 5.6\,\mathrm{m}$ ricade al suolo dove comprime una molla di costante elastica $k = 750\,\mathrm{N/m}$; determinare

① il modulo v_0 della velocità con cui il sasso è stato lanciato;

② la deformazione della molla (si trascuri l'altezza dal suolo quando la molla è compressa).

Soluzione

① Per il principio di conservazione dell'energia meccanica, la somma di energia cinetica e potenziale del sasso deve essere uguale in ogni istante del moto; in particolare, quindi, deve assumere lo stesso valore nella posizione iniziale, nel punto di massa altezza (in cui la velocità è nulla); vale quindi

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + mgh = mgH \qquad \longrightarrow \qquad v_0 = \sqrt{2g(H-h)} = 9.3\,\mathrm{m/s}\ .$$

② Similmente si ha fra il punto di massima altezza e il punto in cui la molla è compressa, quindi

$$mgH = \frac{1}{2}kx^2 \qquad \longrightarrow \qquad x = \sqrt{\frac{2mgH}{k}} = 35\,\mathrm{cm}\ .$$

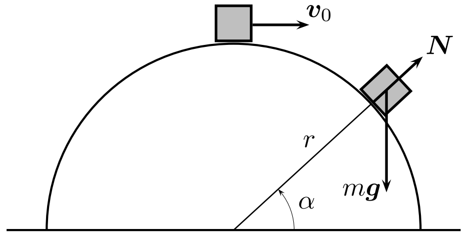
Problema 3

Un punto materiale che si trova sulla sommità di una semisfera di raggio $r = 2.0\,\mathrm{m}$ viene messo in movimento con un velocità iniziale di modulo v_0 tangente alla superficie sferica e scivola, senza attrito, sulla superficie esterna di questa; determinare

① come il punto di distacco dipende da v_0;

② il valore massimo di v_0 affinché il punto materiale non si stacchi subito dalla sfera.

Soluzione



① Sul punto materiale agiscono la forza peso $m\boldsymbol{g}$ e la reazione vincolare della superficie semisferica; la legge fondamentale della dinamica quindi si scrive

$$m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} = m\boldsymbol{a}\ .$$

In ogni punto il vettore accelerazione ha una componente tangente, responsabile dell'aumento del modulo della velocità nel tempo, e una componente centripeta, responsabile della variazione della direzione del vettore accelerazione lungo la traiettoria circolare. Quindi, fino a che il punto materiale si trova sulla semisfera, la componente perpendicolare alla superficie sferica della precedente equazione è

$$mg\,\mathrm{sen}\,\alpha - N = m\frac{v^2}{r}\ ;$$

vi è contatto fra il punto materiale e la semisfera fino a che N è diverso da zero; la condizione di distacco quindi si trova per $N = 0$; si ha pertanto

$$g \operatorname{sen}\alpha = \frac{v^2}{r} \ .$$

Il valore di v^2 può essere ricavato dalla conservazione dell'energia; vale infatti

$$\frac{1}{2}\, m v_0^2 + mgr = \frac{1}{2}\, m v^2 + mgr \operatorname{sen}\alpha \qquad \longrightarrow \qquad v^2 = v_0^2 + 2gr(1 - \operatorname{sen}\alpha) \ ;$$

inserendo questo risultato nella precedente equazione si trova

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gr} \ ,$$

che è la relazione richiesta.
② La condizione di distacco nel punto di partenza del moto si ottiene dalla relazione precedente ponendo $\alpha = 90°$; si ottiene allora

$$1 = \frac{2}{3} + \frac{v_0^2}{3gr} \qquad \longrightarrow \qquad v_0 = \sqrt{gr} = 4.4\,\mathrm{m/s} \ .$$

3.2.2 Forza elastica

La forza elastica è una forza centrale e quindi è conservativa; la sua energia potenziale è proporzionale al quadrato della deformazione x del mezzo elastico (per esempio, della molla); vale

$$\mathcal{U}_{el}(x) = \frac{1}{2}\, k x^2 \ ;$$

ove si è scelto, come d'uso, di porre uguale a zero l'energia potenziale nella posizione di riposo.

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Un punto materiale di massa $m = 4.5\,\mathrm{kg}$ che si trova inizialmente sul punto piú alto di un piano inclinato di altezza $h = 4.2\,\mathrm{m}$ e lunghezza $\ell = 10\,\mathrm{m}$ viene spinto verso il basso con una velocità iniziale di modulo $v_0 = 12\,\mathrm{m/s}$; al punto materiale è fissata una molla, avente lunghezza di equilibrio nulla, che ha l'altro capo fissato nel vertice retto del piano inclinato; sapendo che quando il punto materiale arriva nel punto piú basso del piano inclinato la sua velocità ha modulo $v = 2.0\,\mathrm{m/s}$, determinare

① la costante elastica della molla;

② il lavoro compiuto dalla forza elastica.

Soluzione

① Per il principio di conservazione dell'energia, l'energia meccanica iniziale e finale devono essere uguali. Nel punto piú alto del piano inclinato l'altezza è h e la molla è allungata di h; mentre nel punto piú basso l'altezza è nulla e la molla è allungata di $b = \sqrt{\ell^2 - h^2}$; quindi si ha

$$\frac{1}{2}\, m v_0^2 + mgh + \frac{1}{2}\, k h^2 = \frac{1}{2}\, m v^2 + \frac{1}{2}\, k(\ell^2 - h^2) \qquad \longrightarrow \qquad k = \frac{m}{\ell^2 - 2h^2}\,(2gh + v_0^2 - v^2) = 15\,\mathrm{N/m} \ .$$

② Il lavoro compiuto dalla molla è uguale all'energia potenziale iniziale meno quella finale; vale quindi

$$\mathcal{L}_{el} = \frac{1}{2}\, k h^2 - \frac{1}{2}\, k b^2 = -\frac{1}{2}\, m(2gh + v_0^2 - v^2) = -500\,\mathrm{J} \ .$$

Problema 2

Un corpo di massa $m = 8.52\,\mathrm{kg}$ si trova alla base di un piano inclinato privo di attrito appoggiato ad una molla di costante elastica $k = 21.5\,\mathrm{N/cm}$; la molla è compressa di $x = 24.2\,\mathrm{cm}$

① determinare il modulo v della velocità dal corpo appena si stacca dalla molla;

② determinare l'altezza massima a cui arriva il corpo.

Soluzione

① Per il principio di conservazione dell'energia, non appena il corpo lascia la molla tutta l'energia potenziale elastica è trasformata in energia cinetica del corpo, vale quindi

$$\frac{1}{2}\,kx^2 = \frac{1}{2}\,mv^2 \qquad \longrightarrow \qquad v = \sqrt{\frac{k}{m}}\,x = 3.84\,\mathrm{m/s}\ .$$

② Dopo aver lasciato la molla il corpo sale lungo il piano inclinato aumentando l'energia potenziale della forza peso a spese dell'energia cinetica, fino a fermarsi quando tutta l'energia è diventata potenziale; in questo caso vale

$$\frac{1}{2}\,kx^2 = mgh \qquad \longrightarrow \qquad h = \frac{kx^2}{2mg} = 75.3\,\mathrm{cm}\ .$$

3.2.3 Forza d'attrito

Le forze di attrito non sono conservative poiché il loro lavoro dipende dal percorso.

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Una palla di massa $m = 625\,\mathrm{g}$ è lanciata verso il basso con una velocità di modulo $v_0 = 2.5\,\mathrm{m/s}$; durante la discesa subisce una forza di attrito costante di modulo $F_a = 2.00\,\mathrm{N}$; quando arriva a terra la sua velocità ha modulo $v_1 = 12.0\,\mathrm{m/s}$;

① determinare da che altezza è stata lanciata la palla;

② nelle stesse condizioni, quale deve esse il modulo v della velocità di lancio perché arrivi a terra con la velocità di modulo $v_2 = 14.0\,\mathrm{m/s}$.

Soluzione

① In presenza di attrito l'energia non conserva, ma occorre tenere conto dell'energia perduta come lavoro della forza di attrito; quindi l'energia meccanica finale è uguale all'energia meccanica iniziale meno il lavoro della forza di attrito; quindi

$$\frac{1}{2}\,mv_1^2 = \frac{1}{2}\,mv_0^2 + mgh - F_a h \qquad \longrightarrow \qquad h = \frac{m(v_1^2 - v_0^2)}{2(mg - F_a)} = 10\,\mathrm{m}\ .$$

② Utilizzando la stessa relazione si trova

$$v = \sqrt{v_2^2 - 2gh + \frac{2}{m}\,F_a h} = \sqrt{v_2^2 + v_0^2 - v_1^2} = 7.6\,\mathrm{m/s}\ .$$

Problema 2

Una persona guarda dalla finestra e vede cadere verticalmente un vaso da fiori di massa $m = 1.9\,\mathrm{kg}$; quando il vaso entra nella visuale all'estremità superiore della finestra ha ha un velocità di modulo $v_1 = 2.4\,\mathrm{m/s}$, quando arriva in basso ha una velocità di modulo $v_2 = 5.2\,\mathrm{m/s}$; sapendo che la finestra è alta $h = 1.3\,\mathrm{m}$; determinare il modulo della forza di attrito, supposta costante.

Soluzione

L'energia meccanica nel punto in cui il vaso esce dalla visuale della finestra è uguale a quella che aveva quando vi è entrato, meno l'energia persa per attrito; si ha quindi

$$\frac{1}{2}mv_1^2 + mgh_1 - F_a h = \frac{1}{2}mv_2^2 + mgh_2$$

osservando $h = h_1 - h_2$ si trova

$$F_a = mg - \frac{m}{2h}(v_2^2 - v_1^2) = 3.1\,\mathrm{N}\ .$$

3.2.4 Esercizi

FORZA PESO

☞ **Es. 1** — Un uomo lancia una palla in verticale verso l'alto da un'altezza di $h_1 = 1.5\,\mathrm{m}$ dal suolo con una velocità di modulo $v_1 = 12\,\mathrm{m/s}$; determinare

a) il modulo della velocità della palla quando si trova ad $h_2 = 5.0\,\mathrm{m}$ dal suolo;

b) il modulo della velocità della palla quando arriva al suolo;

c) l'altezza massima raggiunta.

☞ **Es. 2** — Un tuffatore si spinge verticalmente verso l'alto da una piattaforma di altezza $H = 10\,\mathrm{m}$ con una velocità di modulo $v_0 = 3.8\,\mathrm{m/s}$; determinare

a) il modulo della velocità quando raggiunge un'altezza $h_1 = 50\,\mathrm{cm}$ sopra il livello di partenza;

b) a quale altezza la sua velocità ha modulo $v_2 = 11\,\mathrm{m/s}$;

c) il modulo v della velocità quando entra in acqua.

☞ **Es. 3** — Il vagone di una funicolare di massa $m = 4.5 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$ sale per un dislivello di altezza $h = 700\,\mathrm{m}$ percorrendo una distanza $d = 2.5\,\mathrm{km}$; sapendo che la velocità del vagone ha modulo costante $v = 21\,\mathrm{m/min}$, determinare

a) la variazione di energia potenziale del vagone;

b) la potenza erogata dal motore.

✐ **Es. 4** — Un'automobilina giocattolo deve affrontare un 'giro della morte' percorrendo una pista circolare verticale di raggio $r = 50\,\mathrm{cm}$;

a) determinare da che altezza occorre lasciarla, con velocità iniziale nulla, perché, trascurando ogni attrito, riesca a completare il giro;

b) determinare il modulo v_0 della velocità che è necessario imprimere all'automobilina perché partendo dall'altezza $H = 2r$ riesca a completare il giro.

FORZA ELASTICA

☞ **Es. 1** — Una palladi massa $m = 1.2\,\mathrm{kg}$ percorre un piano orizzontale alla quota $h_1 = 3.0\,\mathrm{m}$, con una velocità iniziale di modulo $v_1 = 10\,\mathrm{m/s}$; scende quindi lungo una discesa, raggiunge il fondo di una buca alla quota $h_2 = 0.0\,\mathrm{m}$, poi risale su un piano a quota $h_3 = 1.5\,\mathrm{m}$; infine, muovendosi su tale piano, va a comprimere una molla di costante elastica $k = 320\,\mathrm{N/m}$; sapendo che l'intero percorso è privo di attrito,

a) la velocità della palla sul fondo della buca;

b) la compressione della molla.

☞ **Es. 2** — Una molla di costante elastica $k = 200\,\mathrm{N/m}$ è disposta verticalmente, su di essa è posata una sfera di massa $m = 2.5\,\mathrm{kg}$;

a) determinare di quanto viene compressa la molla;

b) la molla viene compressa di $x = 50\,\mathrm{cm}$ e poi lasciata, determinare la quota massima raggiunta dalla sfera, rispetto al punto di equilibrio della molla.

☞ **Es. 3** — Una palla di massa $m = 1.3\,\mathrm{kg}$ sta cadendo verticalmente su una molla disposta pure verticalmente; ad un certo istante si trova ad un'altezza $h_1 = 2.4\,\mathrm{m}$ dalla molla con una velocità di modulo $v_1 = 5.0\,\mathrm{m/s}$; la palla cadendo sulla molla la comprime di $x = 20\,\mathrm{cm}$; determinare

a) la costante elastica della molla;

b) l'altezza massima h_2 raggiunta, rispetto alla posizione di quiete della molla, raggiunta dalla palla dopo che la molla si è nuovamente estesa e la spinta verso l'alto.

✐ **Es. 4** — Un uomo di massa $m = 80\,\mathrm{kg}$ butta da un ponte di altezza $h_1 = 80\,\mathrm{m}$, con velocità iniziale nulla, attaccato a una corda elastica avente lunghezza a riposo $\ell = 40\,\mathrm{m}$; sapendo che la costante elastica della corda è $k = 150\,\mathrm{N/m}$, determinare

a) l'altezza h_2 dal suolo a cui la corda elastica ferma la caduta dell'uomo;

b) il minimo valore della costante elastica per cui l'uomo non tocca terra;

c) l'altezza h_3 dal suolo a cui si ferma l'uomo dopo che si sono smorzate le oscillazioni.

☞ **Es. 5** — Un sasso di massa $m = 2.3\,\mathrm{kg}$ è lasciato cadere da un tetto di altezza $h = 6.5\,\mathrm{m}$ fissato a un cavo elastico di lunghezza a riposo $\ell_0 = 2.5\,\mathrm{m}$ e di costante elastica $k = 20\,\mathrm{N/m}$; determinare

a) l'allungamento x del cavo quando il sasso raggiunge il punto piú basso;

b) il modulo della velocità iniziale necessaria perché il sasso tocchi terra.

☞ **Es. 6** — Una palla di massa $m = 150\,\mathrm{g}$ viene lanciata orizzontalmente da una molla di costante elastica $k = 14\,\mathrm{N/m}$, che era stata compressa di $x = 10\,\mathrm{cm}$; la palla sale poi lungo un piano inclinato di un angolo $\alpha = 15°$; determinare la quota massima raggiunta e la distanza d percorsa sul piano inclinato.

☞ **Es. 7** — Una molla compressa di $x = 12\,\mathrm{cm}$ lancia un corpo di massa $m = 1.4\,\mathrm{kg}$ in discesa lungo un piano inclinato di un angolo $\alpha = 40°$; sapendo che il corpo percorre la distanza $d = 3.0\,\mathrm{m}$ e che la sua velocità finale è $v = 7.0\,\mathrm{m/s}$, determinare la costante elastica della molla.

Forza d'attrito

☞ **Es. 1** — Un'automobilina giocattolo di massa $m = 0.25\,\mathrm{kg}$ scende lungo una guida inclinata in un primo tratto in cui non è presente alcun attrito, poi orizzontale ove vi è una forza d'attrito;

a) sapendo che la posizione di partenza si trova ad un'altezza $h = 35\,\mathrm{cm}$ e che la velocità iniziale ha modulo $v_0 = 25\,\mathrm{cm/s}$, determinare il modulo v della velocità con cui l'automobilina comincia il tratto orizzontale;

b) sapendo che nel tratto orizzontale l'automobilina si ferma in $t = 4.5\,\mathrm{s}$ dopo aver percorso la distanza $d = 2.2\,\mathrm{m}$, determinare il modulo della forza di attrito e la potenza da essa sviluppata.

☞ **Es. 2** — Uno sciatore scende, partendo da fermo, lungo un pendio inclinato di un angolo $\alpha = 40°$ lungo $\ell = 100\,\mathrm{m}$; sapendo che fra lo sciatore e il pendio vi è un attrito dinamico di coefficiente $\mu_d = 0.15$, determinare la velocità dello sciatore al termine della discesa.

✐ **Es. 3** — Uno sciatore di massa $m = 75\,\mathrm{kg}$ parte da una quota $h = 75\,\mathrm{m}$ rispetto al punto di arrivo, e percorre un pendio lungo $\ell = 150\,\mathrm{m}$ partendo con una velocità iniziale di modulo $v_0 = 1.5\,\mathrm{m/s}$; sapendo che lo sciatore perde il 35% dell'energia iniziale a causa dell'attrito, determinare

a) il modulo della velocità finale e il tempo impiegato a percorrere la discesa;

b) il modulo della forza di attrito dinamico.

✐ **Es. 4** — Una slitta scende lungo un pendio innevato inclinato di un angolo $\alpha = 25°$ dall'altezza $h = 27\,\mathrm{m}$ con velocità iniziale di modulo $v_0 = 2.5\,\mathrm{m/s}$; giunta al termine della discesa la sua velocità ha modulo $v = 15\,\mathrm{m/s}$ ed il suo moto prosegue su un tratto orizzontale; sapendo che fra la slitta e la neve agisce una forza di attrito dinamico di coefficiente $\mu_d = 0.17$, determinare

a) la lunghezza della discesa;

b) lo spazio percorso nel tratto orizzontale prima di fermarsi.

☞ **Es. 5** — Un paracadutista di massa $m = 95\,\mathrm{kg}$ nel tratto precedente l'apertura del paracadute all'istante t_1 scende con velocità di modulo $v_1 = 11\,\mathrm{m/s}$ e all'istante t_2 scende con velocità di modulo $v_2 = 27\,\mathrm{m/s}$;

a) trascurando la forza d'attrito, determinare l'altezza h di caduta nell'intervallo di tempo fra i due istanti;

b) sapendo che la forza d'attrito è costante e non trascurabile e che nell'intervallo di tempo dato, con le stesse velocità iniziale e finale, il paracadutista percorre $s = 42\,\mathrm{m}$, determinare il modulo della forza di attrito.

☞ **Es. 6** — Un sasso di massa $m = 10\,\mathrm{kg}$ viene lasciato cadere da un'altezza $h = 105\,\mathrm{m}$; sapendo che quando arriva al suolo la sua velocità ha modulo $v = 42\,\mathrm{m/s}$, determinare

a) il modulo della forza di attrito che ha agito sul sasso;

b) il modulo v_1 della velocità con cui colpisce il suolo se il sasso viene lanciato verso il basso con una velocità iniziale di modulo $v_0 = 8.0\,\mathrm{m/s}$.

☞ **Es. 7** — La pallina di un flipper, di massa $m = 50\,\mathrm{g}$, viene lanciata verso l'alto su un piano inclinato con una velocità iniziale di modulo $v_0 = 2.8\,\mathrm{m/s}$; la pallina si ferma, dopo avere percorso la distanza $d = 80\,\mathrm{cm}$, a un'altezza $h = 12\,\mathrm{cm}$ rispetto alla quota iniziale; determinare

a) il modulo della forza di attrito che agisce sulla pallina;

b) l'altezza raggiunta e lo spazio che percorrerebbe la pallina in assenza di attrito.

✐ **Es. 8** — Un oggetto di massa $m = 12\,\mathrm{kg}$ su un piano orizzontale scabro; dopo aver percorso la distanza $d = 2.5\,\mathrm{m}$ va a comprimere di $x = 12\,\mathrm{cm}$ una molla; sapendo che il modulo della velocità iniziale è $v = 10\,\mathrm{m/s}$ e che il coefficiente di attrito dinamico fra l'oggetto e il piano orizzontale è $\mu_d = 0.65$, determinare la costante elastica della molla.

Capitolo 4

Sistemi materiali e quantità di moto

4.1 Impulso e quantità di moto

4.1.1 Forze impulsive

Data la forza costante $\boldsymbol{F}$ agente su un punto materiale per un intervallo di tempo Δt, si dice *impulso* della forza costante $\boldsymbol{F}$ il prodotto

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F}\Delta t \ .$$

Se la forza non è costante è necessario utilizzare la forza media $\boldsymbol{F}_m$ nell'intervallo Δt; la forza media va calcolata usata il calcolo integrale o il teorema enunciato piú avanti.
Si dicono *impulsive* le forze che abbiano un modulo molto grande ma che agiscono per intervalli di tempi molto piccoli; sono importanti perché, nel breve intervallo di tempo in cui agiscono, rendono trascurabili tutte le altre forze eventualmente agenti, quindi la dinamica del sistema materiale può essere descritta tenendo in considerazione le sole forze impulsive. Per questo paragrafo non ci sono esercizi

4.1.2 Quantità di moto e teorema dell'impulso

Dato un punto materiale di massa m avente all'istante t velocità $\boldsymbol{v}(t)$, si dice *quantità di moto* di P il prodotto

$$\boldsymbol{p}(t) = m\boldsymbol{v}(t) \ .$$

La legge fondamentale della dinamica si può scrivere, in termini della quantità di moto, nella forma seguente

$$\boldsymbol{F} = \frac{\Delta \boldsymbol{p}}{\Delta t} \ .$$

Si può dimostrare il seguente teorema dell'impulso:

> *L'impulso di una forza agente su un punto materiale P in un dato intervallo di tempo Δt è uguale alla variazione della quantità di moto di P in tale intervallo di tempo.*

Quindi se $\Delta t = t_2 - t_1$ si ha

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{p}(t_2) - \boldsymbol{p}(t_1) = \Delta \boldsymbol{p} \ .$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Una pallina da tennis di massa $m = 100\,\mathrm{g}$ si muove orizzontalmente con velocità di modulo $v_1 = 25\,\mathrm{m/s}$ quando viene colpita da una racchetta che la rimanda indietro sempre orizzontalmente; sapendo che la racchetta ha esercitato una forza media di modulo $F = 90\,\mathrm{N}$ per $t = 0.05\,\mathrm{s}$, determinare

① il modulo v_2 della velocità della pallina dopo l'urto con la racchetta;

② la forza media che occorre esercitare nello stesso tempo per rimandare la pallina con la velocità di modulo $v = 30\,\mathrm{m/s}$.

Soluzione

① La forza agente sulla pallina è impulsiva, quindi è possibile trascurare ogni altra forza agente sulla pallina ed utilizzare il teorema dell'impulso:

$$\Delta \boldsymbol{p} = \boldsymbol{F} t \qquad \longrightarrow \qquad m\boldsymbol{v}_2 - m\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{F} t \qquad \longrightarrow \qquad \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{v}_1 + \frac{\boldsymbol{F}}{m} t \ .$$

Osservando che la forza impulsiva $\boldsymbol{F}$ ha la stessa direzione di $\boldsymbol{v}_1$ ma verso opposto, prendendo come positivo il verso della forza, la precedente equazione scritta in forma scalare diventa

$$v_2 = \frac{F}{m} t - v_1 = 20\,\mathrm{m/s} \ .$$

② Usando le precedenti equazioni si trova

$$F = \frac{m}{t}(v + v_1) = 110\,\mathrm{N} \ .$$

*Problema 2

Una palla di massa $m = 0.75\,\mathrm{kg}$ viene lasciata cadere dall'altezza $h = 1.5\,\mathrm{m}$; durante l'impatto con il suolo si deforma schiacciandosi di $\delta = 0.5\,\mathrm{cm}$; supponendo che durante tutto l'urto il suolo agisca sulla palla con una forza costante, determinare

① il modulo della forza con cui il pavimento agisce sulla palla;

② l'altezza raggiunta dalla palla dopo il rimbalzo;

Soluzione

① La palla raggiunge il pavimento con velocità di modulo $v = \sqrt{2gh}$ quindi comincia a deformarsi sotto l'azione della forza $\boldsymbol{F}$ dovuta al pavimento e scende ancora di un'altezza δ fino a fermarsi; in questa fase è possibile trascurare l'azione della forza peso poiché trascurabile rispetto alla forza impulsiva $\boldsymbol{F}$; d'altra parte questa è costante e quindi il moto è uniformemente decelerato e quindi lo spazio δ viene percorso con velocità media pari alla media della velocità iniziale v e finale (nulla) nel tempo t dato da

$$\delta = \frac{v}{2} t \qquad \longrightarrow \qquad t = \frac{2\delta}{v} = \delta\sqrt{\frac{2}{gh}} \ .$$

A questo punto, per il teorema dell'impulso, l'impulso di $\boldsymbol{F}$ deve essere uguale alla variazione di quantità di moto, cioè

$$\boldsymbol{I} = \boldsymbol{F} t = \Delta \boldsymbol{p} = -m\boldsymbol{v}$$

in forma scalare quindi si ottiene

$$F = \frac{mv}{t} = \frac{m\sqrt{2gh}}{\delta\sqrt{\dfrac{2}{gh}}} = \frac{h}{\delta} mg = 2.2 \cdot 10^3\,\mathrm{N} \ .$$

si noti, in particolare, che F sta al peso della palla come l'altezza della caduta sta alla deformazione della palla; quindi la forza è tanto piú impulsiva quanto maggiore è la rigidità del materiale di cui è costituita la palla.

② Dopo che la palla ha raggiunto il suo punto più basso la forza $\boldsymbol{F}$ la spinge nuovamente verso l'alto; supponiamo che sia t_1 il tempo di spinta; allora per il teorema dell'impulso deve valere

$$F(t + t_1) = m(v_1 + v)$$

ove v_1 è la velocità della palla all'istante in cui smette di agire la forza impulsiva $\boldsymbol{F}$. Si ottiene quindi

$$v_1 = \frac{F}{m}(t + t_1) - v = g\,\frac{h}{\delta}\left(\delta\sqrt{\frac{2}{gh}} + t_1\right) - v = \sqrt{2gh} + \frac{h}{\delta}\,gt_1 - v = \frac{h}{\delta}\,gt_1 \ ;$$

Questa velocità, per la conservazione dell'energia non può essere maggiore di v; se durante il rimbalzo non si è avuta perdita di energia deve valere $v_1 = v$ altrimenti deve valere $v_1 < v$, in generale quindi si ha

$$v_1 \le v \qquad \longrightarrow \qquad \frac{h}{\delta}\,gt_1 \le \sqrt{2gh} \qquad \longrightarrow \qquad t_1 \le \delta\sqrt{\frac{2}{gh}} = t$$

quindi se $t_1 = t$, cioè se la dinamica del rimbalzo è stata simmetrica, non si è avuta perdita di energia e la palla torna all'altezza di partenza, se invece $t_1 < t$ e quindi le due parti del rimbalzo non hanno caratteristiche uguali, significa che vi è stata perdita di energia e la palla, dopo il rimbalzo, raggiunge un'altezza minore di quella di partenza. Abbandonando l'ipotesi non molto realistica della costanza della forza impulsiva, il risultato dell'esercizio suggerisce che non vi sia perdita di energia nel rimbalzo solo se la metà frenante dell'impulso sia uguale alla metà motrice dell'impulso.

4.1.3 Conservazione della quantità di moto; urti ed esplosioni

Se su un sistema non agiscono forze esterne, cioè se sugli elementi del sistema agiscono solo forze dovute ad altri elementi del sistema, la quantità di moto totale, data dalla somma di tutte le quantità di moto rimane costante. Nel caso di un sistema costituito da due corpi interagenti, per esempio, si ha quindi

$$\Delta\boldsymbol{p}_1 + \Delta\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{0} \ .$$

Un caso tipico in cui si ha conservazione della quantità di moto è quella degli urti. Un urto è detto *elastico* se l'energia cinetica totale prima e dopo l'urto è la stessa. In questo caso si può dimostrare che le velocità relative dei due corpi prima e dopo l'urto sono uguali ed opposte; questo fatto, insieme alla conservazione della quantità di moto totale consente di determinare le velocità dopo l'urto (indicate con lettere maiuscole) se sono note le velocità iniziali indicate con lettere minuscole; valgono infatti le equazioni

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \\ v_1 - v_2 = V_2 - V_1 \end{cases}$$

risolvendo questo sistema si trova

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2} \\ V_2 = \dfrac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1 v_1}{m_1 + m_2} \end{cases} . \tag{4.1}$$

Se l'energia cinetica totale diminuisce nell'urto questo è detto *anelastico*; se, in particolare, dopo l'urto i due corpi rimangono attaccati l'urto è detto *completamente anelastico*. In questo caso, oltre alla conservazione della quantità di moto si ha l'uguaglianza delle velocità dopo l'urto, valgono quindi le seguenti equazioni

$$\begin{cases} m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 V_1 + m_2 V_2 \\ V_1 = V_2 \ , \end{cases}$$

la cui soluzione è

$$V_1 = V_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} \ . \tag{4.2}$$

Con il nome convenzionale di *esplosioni* si indica ogni processo in cui un sistema materiale, a causa di qualche forza interna, si divide il due o piú indipendenti e non necessariamente interagenti. Poiché al momento del distacco delle parti non vi è stata azione di una forza esterna la quantità di moto totale del sistema rimane costante.

Se i corpi che si urtano sono estesi, per esempio due sfere di raggi r_1 ed r_2, per essi non vale il modello di punto materiale, è allora possibile che le due velocità si trovino su rette parallele ma non coincidenti; la distanza b fra le due rette è detta *parametro d'urto*. Se $b = 0$ l'urto è detto *centrale* se $b > 0$ l'urto è detto *obliquo*. L'urto centrale si tratta come nel caso di punto materiali. Nel caso dell'urto obliquo occorre tenere conto del fatto che il processo si svolge sul piano e non piú su una retta e quindi si devono considerare la conservazione della quantità di moto come grandezza vettoriale che quindi si conserva componente per componente. Nel caso di urto obliquo elastico si hanno quindi le tre equazioni

$$\begin{cases} m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} = m_1 V_{1x} + m_2 V_{2x} \\ m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = m_1 V_{1y} + m_2 V_{2y} \\ \dfrac{1}{2} m_1 (v_{1x}^2 + v_{1y}^2) + \dfrac{1}{2} m_1 (v_{2x}^2 + v_{2y}^2) = \dfrac{1}{2} m_1 (V_{1x}^2 + V_{1y}^2) + \dfrac{1}{2} m_1 (V_{2x}^2 + V_{2y}^2)\ . \end{cases}$$

Si tratta di tre equazioni in quattro incognite; che sono risolubili solo a patto di conoscere almeno qualche altro dato. Frequentemente tale dato è un angolo.
Si consideri il caso in cui una delle due sfere sia ferma; indicando con θ e φ gli angoli formati dalle due velocità dopo l'urto con la direzione della $\boldsymbol{v}_1$, come rappresentato in figura, si ha

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 V_1 \cos\theta + m_2 V_2 \cos\varphi \\ 0 = m_1 V_1 \operatorname{sen}\theta + m_2 V_2 \operatorname{sen}\varphi \\ \dfrac{1}{2} m_1 v_1^2 = \dfrac{1}{2} m_1 V_1^2 + \dfrac{1}{2} m_2 V_2^2\ . \end{cases} \tag{4.3}$$

In particolare, se le due masse sono uguali, si può dimostrare che le due velocità dopo l'urto sono perpendicolari.

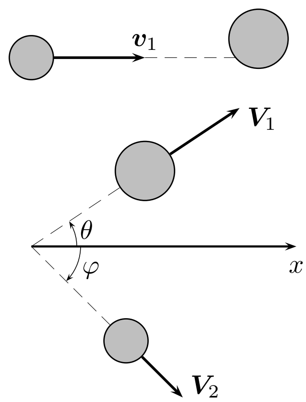


Figura 4.1: L'urto obliquo

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Un carro di massa $m_1 = 350\,\mathrm{kg}$ si muove con velocità $v_1 = 7.2\,\mathrm{m/s}$ quando un fanciullo, di massa $m_2 = 43\,\mathrm{kg}$, corre incontro al carro e vi salta su con una velocità avente verso opposto alla velocità del carro e modulo $v_2 = 3.7\,\mathrm{m/s}$; determinare il modulo v della velocità finale del carro con sopra il fanciullo.

Soluzione

Quando il fanciullo salta sul carro, non vi sono altre forze esterne agenti; quindi la quantità di moto totale si conserva; poiché dopo il salto carro e fanciullo hanno la stessa velocità, deve valere, tenendo conto dei versi delle velocità;

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v \qquad \longrightarrow \qquad v = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 6.0\,\mathrm{m/s}\ .$$

***Problema 2**

Due corpi di massa uguale $m_1 = m_2$ rispettivamente con velocità di moduli $v_1 = 4.5\,\mathrm{m/s}$ e $v_2 = 3.8\,\mathrm{m/s}$ si urtano in modo elastico; determinare i moduli delle due velocità dopo l'urto.

Soluzione

Utilizzando le equazioni (4.1), con la condizione $m_1 = m_2$ si trova

$$V_1 = v_2 = 3.8\,\mathrm{m/s} \qquad , \qquad V_2 = v_1 = 4.5\,\mathrm{m/s}\ ;$$

i due corpi, quindi, si scambiano le velocità.

*Problema 3

Un punto materiale di massa $m_1 = 4.2\,\mathrm{kg}$ e velocità di modulo $v_1 = 5.2\,\mathrm{m/s}$ urta elasticamente contro un secondo punto materiale fermo di massa m_2; discutere le velocità dei due punti materiali dopo l'urto al variare di m_2.

Soluzione

Utilizzando le (4.1) con $v_2 = 0$ si trova

$$\begin{cases} V_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\, v_1 \\ V_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\, v_1 \end{cases}$$

quindi, per ogni valore di m_2, il punto materiale inizialmente fermo si muove nello stesso verso di $\boldsymbol{v}_1$; il punto materiale inizialmente in moto, invece, continua nello stesso verso se $m_2 < m_1$, si ferma se $m_1 = m_2$ e rimbalza indietro se $m_2 > m_1$. Nel caso particolare in cui sia $m_2 \gg m_1$, cioè se il punto materiale in moto urta un corpo molto piú grande come potrebbe essere una parete, sia ha $V_2 = v_2 = 0$ e $V_1 = -v_1$, quindi il punto di massa molto grande resta fermo, mentre quello in moto rimbalza indietro con la stessa velocità che aveva prima dell'urto.

Problema 4

Due punti materiali di massa $m_1 = 3.5\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 4.2\,\mathrm{kg}$ aventi velocità di moduli $v_1 = 5.4\,\mathrm{m/s}$ e $v_2 = 3.4\,\mathrm{m/s}$ si muovono sulla stessa retta e nello stesso verso; ad un certo istante il primo urta il secondo e i due punti materiali rimangono attaccati; determinare

① la velocità finale dei due punti materiali;

② l'energia dissipata nell'urto.

Soluzione

① Utilizzando la (4.2) si trova

$$V_1 = V_2 = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 4.3\,\mathrm{m/s}\ .$$

② Sottraendo l'energia cinetica totale prima e dopo l'urto si ottiene l'energia dissipata:

$$\mathcal{E}_d = \frac{1}{2}\, m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\, m_2 v_2^2 - \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2) V_1^2 = 3.8\,\mathrm{J}\ .$$

Problema 5

Un uomo getta orizzontalmente fuori dal bordo di una barca un oggetto di massa $m = 25\,\mathrm{kg}$ con una velocità di modulo $v = 12\,\mathrm{m/s}$ sapendo che la barca è inizialmente ferma, che la massa della barca è $m_1 = 50\,\mathrm{kg}$ e che la massa dell'uomo è $m_2 = 70\,\mathrm{kg}$ determinare la velocità della barca, con a bordo l'uomo, dopo il lancio.

Soluzione

Si tratta di un caso di esplosione del sistema materiale; considerando la barca, l'uomo e l'oggetto come un unico sistema materiale, non vi sono forze esterne agenti sul sistema; quindi la quantità di moto totale deve rimanere costante. Prima del lancio dell'oggetto fuori bordo i tre corpi erano fermi e quindi la quantità di moto totale iniziale era nulla; pertanto deve essere nulla anche la quantità di moto totale dopo il lancio. Vale quindi

$$(m_1 + m_2)\boldsymbol{V} + m\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0} \qquad \longrightarrow \qquad \boldsymbol{V} = -\frac{m}{m_1 + m_2}\, \boldsymbol{v}$$

la velocità della barca ha verso opposto a quello della velocità con cui viene lanciato l'oggetto e ha modulo

$$V = \frac{m}{m_1 + m_2}\, v = 2.5\,\text{m/s} \;.$$

Problema 6

Un disco di massa $m_1 = 250\,\text{g}$ e velocità di modulo $v_1 = 4.5\,\text{m/s}$ va ad urtare un secondo disco, inizialmente fermo, di massa $m_2 = 2m_1$; l'urto è obliquo e dopo l'urto i due dischi si allontanano con velocità formanti rispettivamente angoli $\theta_1 = 60°$ e $\theta_2 = 45°$ con la direzione iniziale del primo disco; determinare

① i moduli delle velocità dopo l'urto;

② l'energia dissipata nell'urto.

Soluzione

① Utilizzando le (4.3), tolta l'ultima, si trova

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 V_1 \cos\theta_1 + 2m_1 V_2 \cos\theta_2 \\ m_1 V_1 \operatorname{sen}\theta_1 + 2m_1 V_2 \operatorname{sen}\theta_2 = 0 \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{cases} v_1 = \dfrac{1}{2}\, V_1 + \sqrt{2} V_2 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2} V_1 + \sqrt{2} V_2 = 0 \end{cases}$$

da cui si ottiene

$$\begin{cases} V_1 = (\sqrt{3} - 1)\, v_1 = 3.3\,\text{m/s} \\ V_2 = \dfrac{3 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\, v_1 = 1.4\,\text{m/s} \;. \end{cases}$$

② L'energia dissipata nell'urto è data da

$$\mathcal{E}_d = \frac{1}{2}\, m_1 v_1^2 - \frac{1}{2}\, m_1 V_1^2 - \frac{1}{2}\, m_2 V_2^2 = 0.67\,\text{J} \;.$$

4.1.4 Centro di massa

Dato un sistema materiale costituito da N punti materiali $P_1, \ldots, P_N$ di masse $m_1, , \ldots, m_N$ e velocità $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_N$ si definisce *centro di massa* (o *baricentro*) del sistema il punto G individuato dal vettore

$$\boldsymbol{OG} = \frac{1}{m}\,(m_1 \boldsymbol{OP}_1 + \cdots + m_N \boldsymbol{OP}_N) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{OP}_i \tag{4.4}$$

ove $m = m_1 + \cdots + m_N$ è la massa totale del sistema. Se il sistema materiale ha un centro di simmetria il centro di massa coincide con esso; se il sistema materiale ha due assi di simmetria intersecantesi, il centro di massa coincide con il loro punto di intersezione. Il centro di massa di due diversi sistemi materiali rispettivamente di masse m_1 ed m_2 e centri di massa G_1 e G_2 è individuato dal vettore

$$\boldsymbol{OG} = \frac{1}{m}(m_1 \boldsymbol{OG}_1 + \boldsymbol{OG}_2) \;.$$

Il centro di massa è anche il punto di applicazione della risultante di tutte le forze peso del sistema materiale.
La velocità del centro di massa è data dall'espressione

$$\boldsymbol{v}_G = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} m_i \boldsymbol{v}_i \;;$$

la quantità di moto totale $\boldsymbol{P}$ del sistema materiale ammette una semplice espressione in termini della velocità del centro di massa, vale infatti

$$\boldsymbol{P} = m\boldsymbol{v}_G$$

quindi in assenza di forze esterne la quantità di moto totale è conservata e il centro di massa si muove di moto rettilineo ed uniforme.
Inoltre vale la seguente relazione fra la risultante $\boldsymbol{F}$ delle forze esterne al sistema materiale e l'accelerazione del centro di massa:

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_G \ ,$$

esprimente il *teorema del centro di massa*, da cui risulta che il centro di massa di un sistema materiale si muove come un punto materiale di massa uguale alla massa dell'intero sistema materiale sottoposto a una forza uguale alla risultante delle forze esterne.

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Sono dati tre punti materiali di masse $m_1 = 3.2\,\mathrm{kg}$, $m_2 = 4.7\,\mathrm{kg}$ e $m_3 = 5.3\,\mathrm{kg}$ aventi, rispetto ad un sistema di assi cartesiani, rispettivamente coordinate $P_1(-1,0)$, $P_2(0,2)$ e $P_3(1,-1)$.

Soluzione

Utilizzando la definizione (4.4) di centro di massa si trova

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0.16 \\[2ex] y_G = \dfrac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3} = 0.31 \ ; \end{cases}$$

il centro di massa quindi si trova nel punto $G(0.16, 0.31)$.

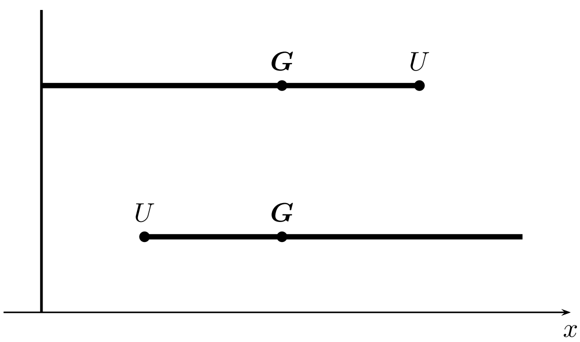
Problema 2

Un uomo di massa $m_1 = 75\,\mathrm{kg}$ si trova a poppa di una zattera di massa $m_2 = 200\,\mathrm{kg}$ e lunghezza $\ell = 10\,\mathrm{m}$ la cui prua si trova a contatto con un molo; l'uomo cammina sulla zattera per scendere sul molo; determinare la distanza fra la prua e il molo quando l'uomo ha raggiunto la prua.

Soluzione

Sul sistema materiale costituito dalla zattera e dall'uomo non agiscono forze esterne quindi il centro di massa del sistema, inizialmente fermo, resta fermo durante tutto il tempo in cui l'uomo U attraversa la zattera. Scelto come asse di riferimento una retta orientata avente origine sul molo (si veda la figura), si ha la situazione seguente. Inizialmente le ascisse dei centri di massa dell'uomo e della zattera sono

$$x_1 = \ell \qquad , \qquad x_2 = \frac{\ell}{2}$$



e quindi il centro di massa del sistema inizialmente si trova in un punto di ascissa

$$x_G = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\,\frac{\ell}{2} \ .$$

Quando l'uomo si è spostato a prua la zattera si è allontanata dal molo di una distanza d; in questa situazione il centro di massa dell'uomo e quello della zattera si trovano nei punti di ascissa

$$x_1 = d \qquad , \qquad x_2 = d + \frac{\ell}{2}$$

quindi il centro di massa del sistema materiale è ora dato da

$$x_G = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 + m_2)d + \frac{m_2 \ell}{2}}{m_1 + m_2} \; .$$

Uguagliando questa espressione con quella trovata precedentemente si ottiene

$$\frac{2m_1 + m_2}{m_1 + m_2}\,\frac{\ell}{2} = \frac{(m_1 + m_2)d + \frac{m_2 \ell}{2}}{m_1 + m_2} \qquad \longrightarrow \qquad d = \frac{m_1 \ell}{m_1 + m_2} = 2.7\,\mathrm{m} \; .$$

Problema 3

Un corpo di massa $m = 12\,\mathrm{kg}$ si trova appoggiato ad un sostegno ad un'altezza h dal suolo; ad un certo istante il corpo esplode in due pezzi; un pezzo, di massa $m_1 = 9.2\,\mathrm{kg}$ viene trovato a una distanza $d_1 = 4.7\,\mathrm{m}$in direzione nord dal punto dell'esplosione; determinare il punto dove si trova il secondo pezzo.

Soluzione Sul corpo, inizialmente fermo, al momento dell'esplosione agisce la sola forza peso; quindi il suo centro di massa, per il teorema omonimo, deve essersi mosso sotto l'azione della forza peso e quindi trovarsi al suolo nel punto sulla verticale del punto dell'esplosione. Scelto tale punto come origine di un asse cartesiano orientato verso nord, il primo pezzo si trova nella posizione di ascissa $x_1 = d_1$; poiché il centro di massa ha ascissa nulla, la coordinata x_2 del secondo pezzo deve essere tale che sia

$$m_1 x_1 + m_2 x_2 = 0 \qquad \longrightarrow \qquad x_2 = -\frac{m_1}{m_2}\, d_1 = -15\,\mathrm{m} \; ;$$

il secondo pezzo, quindi, si trova a una distanza di 15 metri dal punto dell'esplosione, verso sud.

4.1.5 Esercizi

Quantita di moto e teorema dell'impulso

✍ **Es. 1** — Un battitore di baseball riceve una palla di massa $m = 250\,\mathrm{g}$ che viaggia orizzontalmente a una velocità di modulo $v_1 = 20\,\mathrm{m/s}$, la colpisce rimandandola, sempre orizzontalmente; sapendo che ha esercitato una forza media di modulo $F = 100\,\mathrm{N}$ per il tempo $t = 0.2\,\mathrm{s}$, determinare

a) il modulo v_2 della velocità della palla dopo l'urto;

b) il modulo F_1 della forza necessaria ad ottenere una velocità finale di modulo $v = 35\,\mathrm{m/s}$.

☞ **Es. 2** — Un pallone di massa $m = 425\,\mathrm{g}$ si muove orizzontalmente con una velocità di modulo $v_1 = 11.5\,\mathrm{m/s}$; un calciatore lo colpisce invertendo il senso del suo moto e imprimendogli una velocità di modulo $v_2 = 14.5\,\mathrm{m/s}$; sapendo che l'urto fra il piede del calciatore e il pallone dura $t = 0.5\,\mathrm{s}$ e che, dopo essere stato calciato, il pallone percorre la distanza $d = 60\,\mathrm{m}$ prima di fermarsi, determinare

a) la forza esercitata dal calciatore;

b) il modulo della forza di attrito e il lavoro da essa compiuto.

☞ **Es. 3** — Una palla di massa $m = 1.05\,\mathrm{kg}$ cade verticalmente dall'altezza $h_1 = 5.50\,\mathrm{m}$ sul pavimento di una palestra, e rimbalza fino a un'altezza $h_2 = 3.65\,\mathrm{m}$; sapendo che la palla rimane a contatto con il pavimento per $t = 85\,\mathrm{ms}$, determinare

a) la forza impressa dal pavimento alla palla;

b) l'energia dissipata nell'urto

✐ **Es. 4** — Una palla di massa $m = 600\,\mathrm{g}$ si trova all'altezza $h_1 = 1.1\,\mathrm{m}$ dal suolo e sta salendo in verticale con velocità di modulo $v_1 = 6.5\,\mathrm{m/s}$; all'altezza $h_2 = 2.5\,\mathrm{m}$ sbatte contro una trave orizzontale che le imprime una forza di modulo $F = 85\,\mathrm{N}$ per $t = 0.09\,\mathrm{s}$; determinare

a) il modulo v della velocità della palla immediatamente dopo l'urto

b) come la risposta alla domanda precedente dipende dalla durata dell'urto fra la palla e la trave a parità di ogni altro dato.

✐ **Es. 5** — Un sasso di massa $m = 2.4\,\mathrm{kg}$ precipita, partendo da fermo, da una montagna sulla superficie di un lago dall'altezza $h = 50\,\mathrm{m}$; il sasso entra in acqua in $t = 0.15\,\mathrm{s}$ e, una volta entrato, la sua velocità si riduce a 1/5 di quella che aveva immediatamente prima di entrare in acqua; sapendo che durante la caduta il sasso è soggetto a una forza di attrito costante da parte dell'aria, di modulo $F_a = 12\,\mathrm{N}$, determinare

a) il modulo velocità con cui il sasso raggiunge la superficie dell'acqua;

b) il modulo della forza subita dal sasso nell'impatto

☞ **Es. 6** — Uno stunt-man di massa $m = 75\,\mathrm{kg}$ bene allenato si rompe una gamba cadendo a terra se subisce una forza di modulo superiore a $F = 4.0 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$; sapendo che l'impatto con il suolo dura $t = 0.2\,\mathrm{s}$, determinare da quale altezza massima può cadere senza rompersi una gamba.

☞ **Es. 7** — In un luna-park un misuratore di forza è costituito da un supporto orizzontale che deve essere colpito con un martello. Un uomo colpisce il supporto con una forza di modulo $F = 450\,\mathrm{N}$ per $t = 0.18\,\mathrm{s}$; sapendo che il 40% dell'impulso esercitato va disperso negli attriti e che la parte rimanente è trasferita a una corpo di massa $m = 7.5\,\mathrm{kg}$ che sale verticalmente, senza attrito, lungo una colonna, determinare l'altezza raggiunta dal corpo.

☞ **Es. 8** — In un crash-test un'automobile di massa $m = 700\,\mathrm{kg}$ parte da ferma e percorre $s = 30\,\mathrm{m}$ sottoposta, da parte del motore, a una forza di modulo $F = 3.0\,\mathrm{kN}$, quindi sbatte contro un muro; l'urto dura $t = 1.2\,\mathrm{s}$; determinare

a) la potenza sviluppata dal motore;

b) il modulo F_1 della forza che il muro esercita sull'automobile.

☞ **Es. 9** — Inseguendo Bip-Bip, Willy il coyote che ha massa $m = 20\,\mathrm{kg}$ cade verticalmente in un burrone. Nell'urto col suolo, che dura $t = 0.2\,\mathrm{s}$, subisce una forza di modulo $F = 3.0\,\mathrm{kN}$; supponendo che la caduta inizi con velocità iniziale nulla e che dopo l'urto non vi sia un rimbalzo, determinare l'altezza del burrone.

☞ **Es. 10** — Un paracadutista di massa $m = 68\,\mathrm{kg}$ si lancia dall'altezza $h = 200\,\mathrm{m}$ con velocità iniziale nulla; sapendo che giunge a terra con velocità di modulo $v = 10\,\mathrm{m/s}$ e che il suolo esercita sul paracadutista una forza di modulo $F = 10^3\,\mathrm{N}$, determinare

a) il lavoro della forza di attrito;

b) la durata dell'urto.

☞ **Es. 11** — Un cuneo di massa $m = 500\,\mathrm{g}$ cade dall'altezza $h = 5.0\,\mathrm{m}$ e si conficca nel terreno per $d = 5.0\,\mathrm{cm}$; supponendo che la forza bmF con cui il terreno agisce sul cuneo sia costante, determinare

a) il modulo di $\boldsymbol{F}$;

b) il tempo in cui avviene il processo.

Conservazione della quantita di moto; urti ed esplosioni

✍ **Es. 1** — Due vagoni uguali viaggiano agganciati in linea retta a una velocità di modulo $v_1 = 15\,\mathrm{m/s}$; i due vagoni vanno a urtare un convoglio di altri tre vagoni di uguale massa, anch'essi agganciati fra loro; sapendo che dopo l'urto i cinque vagoni rimangono uniti, determinare

a) il modulo V della velocità finale del convogli;

b) che velocità $\boldsymbol{v}_2$ avrebbero dovuto avere i tre vagoni affinché, dopo l'urto, il convoglio fosse rimasto fermo.

☞ **Es. 2** — Un carrello di massa $m_1 = 300\,\mathrm{kg}$ si muove senza attrito con velocità costante di modulo $v_1 = 2.4\,\mathrm{m/s}$; un operaio lancia in orizzontale sul carrello un sacco di massa $m_2 = 50\,\mathrm{kg}$ con una velocità di modulo $v_2 = 6.2\,\mathrm{m/s}$ avente verso opposto a quello del carrello; determinare

a) il modulo V_1 della velocità del sistema dopo che il sacco è stato gettato sul carrello;

b) il modulo V_2 della velocità del sistema dopo che l'operaio ha gettato un secondo sacco, con una velocità avente lo stesso modulo del primo sacco ma stavolta nello stesso verso del carrello.

☞ **Es. 3** — Un carretto di massa $m_1 = 40\,\mathrm{kg}$ si muove con velocità costante di modulo $v = 4.0\,\mathrm{m/s}$; un bambino lancia contro il carretto delle grosse arance ciascuna di massa $m_2 = 500\,\mathrm{g}$, con velocità di modulo $v_2 = 10\,\mathrm{m/s}$; sapendo che ogni arancia, dopo avere urtato il carretto, vi rimane attaccata, determinare

a) il numero n di arance che deve lanciare il bambino perché il carretto si fermi;

b) il modulo V della velocità del carretto dopo il lancio di 10 arance.

☞ **Es. 4** — Un vagone di massa $m = 6.0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$ si muove con velocità di modulo $v_1 = 3.5\,\mathrm{m/s}$ su un piano orizzontale; percorre quindi un dislivello di $h = 12\,\mathrm{m}$ e raggiunge un secondo vagone che stava viaggiando con velocità di modulo $v_2 = 6.7\,\mathrm{m/s}$ nella stessa direzione; dopo l'urto i due vagoni restano agganciati e continuano a muoversi con velocità iniziale di modulo $V = 9.5\,\mathrm{m/s}$ e finiscono per fermarsi dopo $t = 60\,\mathrm{s}$ a causa di una forza di attrito costante; determinare

a) la massa del secondo vagone;

b) la potenza sviluppata dalla F di attrito.

☞ **Es. 5** — Un blocco di legno di massa $m_1 = 2.3\,\mathrm{kg}$è appeso ad un filo inestensibile; un proiettile di massa $m_2 = 3.5\,\mathrm{g}$ colpisce orizzontalmente il blocco e rimane conficcato in esso, come risultato il blocco di legno si solleva di $h = 7.4\,\mathrm{cm}$ determinare il modulo della velocità del proiettile.

☞ **Es. 6** — Un blocco di legno è fermo su una superficie priva di attrito; un proiettile di massa $m_1 = 3.0\,\mathrm{g}$ muovendosi con velocità di modulo $v_1 = 450\,\mathrm{m/s}$ colpisce il blocco e rimane al suo interno; dopo l'urto il modulo della velocità del blocco è $V = 9.3\,\mathrm{m/s}$; determinare

a) la massa m_2 del blocco;

b) quale dovrebbe essere la velocità bmv_2 iniziale del blocco per fare sì che la velocità finale del sistema sia nulla.

☞ **Es. 7** — Una motovedetta di massa $m_1 = 200\,\mathrm{t}$, inizialmente ferma, spara contemporaneamente una palla di cannone di massa $m_2 = 70\,\mathrm{kg}$ e un siluro di massa $m_3 = 400\,\mathrm{kg}$ verso una barca di contrabbandieri di massa $m_4 = 8\,\mathrm{t}$ e velocità, diretta verso la motovedetta, di modulo $v_4 = 4.5\,\mathrm{m/s}$; la palla di cannone parte orizzontalmente con velocità di modulo $v_2 = 50\,\mathrm{m/s}$, il siluro con una velocità di modulo $v_3 = 10\,\mathrm{m/s}$; determinare

a) il modulo V_1 della velocità di rinculo della motovedetta;

b) il modulo V_4 della velocità della barca dei contrabbandieri dopo che è stata colpita dai due proiettili, che rimangono conficcati in essa.

☞ **Es. 8** — Due vagoni di masse $m_1 = 3.0 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 2.5 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$ si muovono nello stesso verso lungo un binario; il secondo ha una velocità di modulo $v_2 = 6.0\,\mathrm{m/s}$ raggiunge e si aggancia al primo che si muove con velocità di modulo v_1 ignota; dopo l'urto proseguono il loro moto con velocità di modulo di $V = 7.5\,\mathrm{m/s}$; determinare il modulo della velocità iniziale del primo vagone;

☞ **Es. 9** — Due persone si tuffano contemporaneamente da una barca ferma di massa $m = 120\,\mathrm{kg}$; il primo di massa $m_1 = 80\,\mathrm{kg}$ si tuffa verso destra con una velocità orizzontale di modulo $v_1 = 3.0\,\mathrm{m/s}$, l'altro di massa $m_2 = 60\,\mathrm{kg}$ si tuffa verso sinistra con velocità orizzontale di modulo $v_2 = 5.0\,\mathrm{m/s}$; dopo i tuffi la barca si ferma nel tempo $t = 2.0\,\mathrm{s}$ a causa dell'attrito dell'acqua; determinare

a) il modulo della velocità della barca dopo i tuffi;

b) il modulo della forza di attrito media.

☞ **Es. 10** — Un pallone di massa $m_1 = 650\,\mathrm{g}$ si muove orizzontalmente con velocità di modulo $v = 10.0\,\mathrm{m/s}$ e va ad urtare elasticamente un automobile ferma di massa $m_2 = 1200\,\mathrm{kg}$; trascurando ogni attrito, determinare le velocità del pallone e dell'automobile dopo l'urto.

✐ **Es. 11** — Tre punti materiali di masse $m_1 = 3.0\,\mathrm{kg}$,, $m_2 = 4.0\,\mathrm{kg}$ e $m_3 = 5.0\,\mathrm{kg}$, si muovono su un piano orizzontale privo di attrito con velocità uguali modulo $v = 2.0\,\mathrm{m/s}$ ma di direzioni tali da formare, a due a due, angoli di $120°$; i tre punti materiali si urtano contemporaneamente e restano attaccati; scelto l'asse delle ascisse nella direzione del moto del primo punto materiale determinare le componenti della velocità $\boldsymbol{V}$ del sistema dopo l'urto.

☞ **Es. 12** — Un carrello di massa $m_1 = 54\,\mathrm{kg}$ viene lanciato con velocità di modulo $v = 4.2\,\mathrm{m/s}$ lungo una rotaia priva di attrito contro un secondo carrello inizialmente fermo che, dopo l'urto, si muove con velocità di modulo $v/2$ mentre il primo viene rallentato ad una velocità di modulo $v/3$; sapendo che l'urto dura $t = 0.1\,\mathrm{s}$ determinare

a) la massa del secondo carrello;

b) il modulo della forza media che si sviluppa nell'urto;

c) l'energia dissipata nell'urto.

✐ **Es. 13** — Due biglie di massa $m_1 = 2.5\,\mathrm{g}$ e $m_2 = 2m_1$ si muovono alla stessa velocità di modulo $v = 3.2\,\mathrm{m/s}$ ma con direzioni perpendicolari; ad un certo istante si urtano e la prima prosegue con velocità invariata in modulo ma con direzione variata di $90°$ rispetto alla direzione precedente l'urto; determinare

a) il modulo della velocità della seconda biglia dopo l'urto;

b) l'energia dissipata nell'urto.

✐ **Es. 14** — Due punti materiali, di masse m_1 ed $m_2 = 2m_1$, si muovono con la stessa velocità di modulo $v = 4.5\,\mathrm{m/s}$ lungo una guida circolare di raggio $r = 5.0\,\mathrm{m}$; ad un certo istante si urtano elasticamente continuando poi a muoversi lungo la guida; determinare dopo quanto tempo dal primo urto i due punti materiali si urtano nuovamente.

☞ **Es. 15** — Una palla da biliardo di massa m_1 si muove con velocità di modulo $v_1 = 2.3\,\mathrm{m/s}$ e urta elasticamente contro una seconda palla, inizialmente ferma, di uguale massa; sapendo che la prima palla viene deviata dalla sua direzione originale di un angolo $\theta_1 = 30°$ determinare

a) l'angolo θ_2 formato dalla velocità della seconda palla dopo l'urto con la direzione di $\boldsymbol{v}_1$;

b) i moduli delle velocità delle due palle dopo l'urto.

✐ **Es. 16** — Un vagone di massa $m_1 = 24\,\mathrm{t}$ urta contro un secondo vagone fermo e si aggancia ad esso; sapendo che nell'urto viene dissipato il 25% dell'energia, determinare la massa del secondo vagone.

Centro di massa

✍ **Es. 1** — Determinare a che distanza dal centro della Terra si trova il centro di massa del sistema Terra-Luna.

☞ **Es. 2** — Nella molecola di ammoniaca, NH_3, i quattro atomi sono disposti ai vertici di un tetraedro regolare di spigolo ℓ; sapendo che la massa dell'atomo di azoto è 14 volte la massa dell'atomo di idrogeno, determinare a quale distanza d dal piano che contiene i tre atomi di idrogeno si trova il centro di massa della molecola.

☞ **Es. 3** — Un solido è costituito dalle cinque facce di un cubo di spigolo $\ell = 25\,\mathrm{cm}$ a cui è stata sottratta una faccia; determinare a quale distanza d dalla faccia mancante si trova il centro di massa del solido.

☞ **Es. 4** — Una barca di massa $m = 80\,\mathrm{kg}$ e lunghezza $\ell = 4.5\,\mathrm{m}$ si trova con la prua contro il molo; due ragazzi di masse $m_1 = 50\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 60\,\mathrm{kg}$ si trovano alle estremità della barca; i due ragazzi si scambiano di posto e la barca si stacca dal molo di una distanza d; determinare d.

☞ **Es. 5** — Due pattinatori su ghiaccio di masse $m_1 = 65\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 55\,\mathrm{kg}$ distano $d = 12\,\mathrm{m}$ quando si tirano vicendevolmente tramite una fune di massa trascurabile fino ad arrivare a contatto; determinare lo spazio percorso dal secondo pattinatore.

☞ **Es. 6** — Un'automobile della polizia di massa $m_1 = 1200\,\mathrm{kg}$ sta inseguendo una vettura sospetta a velocità di modulo $v_1 = 120\,\mathrm{km/h}$; la vettura, di massa $m_2 = 1000\,\mathrm{kg}$ fugge ad una velocità di modulo $v_2 = 100\,\mathrm{km/h}$; determinare la velocità del centro di massa del sistema.

✐ **Es. 7** — Un cannone spara un proiettile con velocità iniziale di modulo $v_0 = 30\,\mathrm{m/s}$ con un alzo di 45°; quando il proiettile raggiunge la sua quota massima esplode e si frantuma in due pezzi di uguale massa, uno dei quali cade verticalmente rispetto al punto dell'esplosione; determinare a che distanza dal punto di sparo cade l'altro pezzo.

☞ **Es. 8** — Una macchina di Atwood è costituita da due punti materiali di masse $m_1 = 3.6\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 4.8\,\mathrm{kg}$ collegati tramite un filo inestensibile di massa trascurabile che passa per una carrucola, anch'essa di massa trascurabile; inizialmente i due punti materiali si trovano entrambi a $h = 1.2\,\mathrm{m}$ dal suolo; scelto come asse delle ascisse di riferimento un asse verticale volto verso l'alto con l'origine al suolo, determinare la legge del moto del centro di gravità del sistema.

☞ **Es. 9** — Due punti materiali di masse $m_1 = 5.8\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 7.4\,\mathrm{kg}$ si urtano in modo completamente anelastico; sapendo che il modulo della velocità del primo punto prima dell'urto è $v_1 = 3.5\,\mathrm{m/s}$ e che il centro di massa del sistema resta fermo, determinare

a) il modulo della velocità del secondo punto prima dell'urto;

b) il modulo della velocità del sistema dopo l'urto;

c) l'energia dissipata.

✐ **Es. 10** — Due punti materiali di masse $m_1 = 250\,\mathrm{g}$ e $m_2 = 350\,\mathrm{g}$ si muovono in versi opposti e si urtano elasticamente; rispetto al proprio centro di massa le componenti delle loro velocità sono $u_1 = 4.2\,\mathrm{m/s}$ e $u_2 = -2.4\,\mathrm{m/s}$; sapendo che rispetto ad un dato osservatore il centro di massa si muove con velocità $v_G = 5.3\,\mathrm{m/s}$, determinare i moduli delle loro velocità dopo l'urto per tale osservatore.

Capitolo 5

Statica e dinamica dei sistemi materiali

5.1 Momento di un vettore

Dato un vettore $\boldsymbol{AB}$ ed un punto O, si dice *momento del vettore* $\boldsymbol{AB}$ rispetto al *polo* O il prodotto scalare

$$\boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{AB} \ .$$

Il modulo del momento è uguale al prodotto del modulo del vettore per la distanza della retta di applicazione del vettore dal polo; tale retta è detta *braccio*; vale quindi, anche con riferimento alla figura:

$$\|\boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{AB}\| = b \, \|\boldsymbol{AB}\| \ .$$

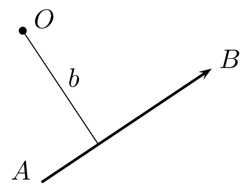


Figura 5.1: Il braccio b.

Nella precedente definizione, al posto del punto A si può scegliere B o qualsiasi altro punto P appartenente alla retta passante per A e B; vale infatti

$$\boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{AB} = (\boldsymbol{OA} + \boldsymbol{AP}) \times \boldsymbol{AB} = \boldsymbol{OA} \times \boldsymbol{AB}$$

visto che $\boldsymbol{AP}$ e $\boldsymbol{AB}$ sono paralleli e il loro prodotto vettoriale è nullo.

5.1.1 Momento di una forza

Dato un punto materiale P di massa m e velocità $\boldsymbol{v}$ sul quale agisce la forza $\boldsymbol{F}$; si definisce *momento della forza* $\boldsymbol{F}$ rispetto al polo O la quantità vettoriale

$$\boldsymbol{M}_O = \boldsymbol{OP} \times \boldsymbol{F} \ .$$

Due forze $\boldsymbol{F}_1$ e $\boldsymbol{F}_2$ parallele aventi lo stesso modulo ma verso opposto e tali che sia b la distanza fra le loro rette di applicazione si dicono una *coppia di forze* di *braccio* b. La risultante di una coppia di forze è nulla mentre il momento di una coppia rispetto a qualunque polo O è un vettore perpendicolare al piano della coppia avente il verso che vede la rotazione della coppia svolgersi in senso antiorario e ha come modulo il prodotto fra il modulo dei vettori della coppia $F_1 = F_2$ e il braccio b. Per avere *equilibrio* di un sistema materiale è necessario che siano nulli la risultante delle forze esterne agenti sul sistema e il loro momento rispetto ad un qualunque polo O. La presenza di una forza esterna produce la traslazione del sistema; mentre la presenza di un momento produce la rotazione del sistema.

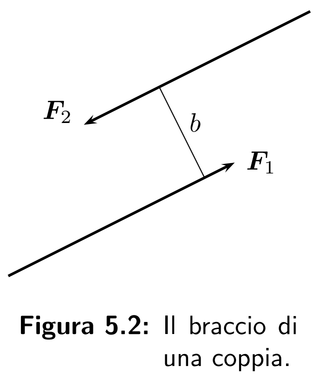


Figura 5.2: Il braccio di una coppia.

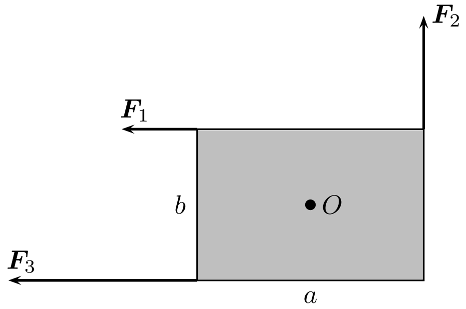
PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Si consideri un rettangolo di lati $a = 30\,\mathrm{cm}$ e $b = 20\,\mathrm{cm}$ sul quale siano applicate, come in figura, le forze $\boldsymbol{F}_1$ ed $\boldsymbol{F}_2$ di moduli $F_1 = 4.0\,\mathrm{N}$ e $F_2 = 6.0\,\mathrm{N}$; determinare

① il momento delle forze $\boldsymbol{F}_1$ ed $\boldsymbol{F}_2$ rispetto al centro O del rettangolo;

② modulo della forza $\boldsymbol{F}_3$ che rende nullo il momento totale delle forza applicate al rettangolo.



Soluzione

① Applicando la regola della mano destra momenti delle forze $\boldsymbol{F}_1$ ed $\boldsymbol{F}_2$ sono due vettori entrambi uscenti dal foglio; i loro moduli si calcolano osservando che i loro bracci sono rispettivamente $b_1 = b/2$ e $b_2 = a/2$; si ha quindi

$$M_1 = \frac{1}{2}\, bF_1 = 0.40\,\mathrm{N\,m} \qquad , \qquad M_2 = \frac{1}{2}\, aF_2 = 0.90\,\mathrm{N\,m}\ .$$

② Il momento della forza $\boldsymbol{F}_3$ rispetto al polo O è un vettore entrante nel foglio; per avere momento risultante nullo basta quindi che il suo modulo sia uguale alla somma dei moduli di $\boldsymbol{M}_1$ ed $\boldsymbol{M}_2$; il braccio di $\boldsymbol{F}_3$ rispetto ad O vale $b/2$, quindi deve essere

$$\frac{1}{2}\, bF_3 = \frac{1}{2} bF_1 + \frac{1}{2} aF_2 \qquad \longrightarrow \qquad F_3 = F_1 + \frac{a}{b}\, F_2 = 13\,\mathrm{N}\ .$$

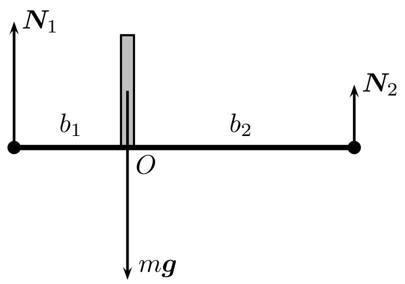
Si noti che, in questo caso, il momento totale calcolato rispetto ad un polo diverso non è nullo. Si consideri, ad esempio, come polo il punto di applicazione della forza $\boldsymbol{F}_2$; rispetto a questo $\boldsymbol{F}_1$ ed $\boldsymbol{F}_2$ hanno braccio nullo e quindi momento nullo, quindi il momento totale coincide con il momento di $\boldsymbol{F}_3$ che non è zero. Questo è dovuto al fatto che la risultante delle tre forze non è nulla. La condizione di annullamento del momento totale è indipendente dal polo solamente in condizioni di equilibrio.

Problema 2

Una mensola di massa trascurabile è imbullonata alle estremità in modo da essere in posizione orizzontale; un libro di massa $m = 2.40\,\mathrm{kg}$ è poto sulla mensola in modo che la sua distanza dal bullone destro sia il doppio della distanza da bullone sinistro; determinare la reazione vincolare di ciascun bullone.

Soluzione

Il sistema è in equilibrio; quindi la risultante delle forze agenti e il momento totale delle forze agenti devono essere entrambi nulli. Le forze agenti sono, la forza peso $m\boldsymbol{g}$ del libro e le reazioni vincolari $\boldsymbol{N}_1$ ed $\boldsymbol{N}_1$ dei bulloni. Scelto come polo O il punto in cui la forza peso del libro interseca la mensola, la forza peso ha braccio nullo, mentre i bracci delle reazioni vincolari sono uno il doppio dell'altro: $b_2 = 2b_1$. Allora le due condizioni di equilibrio sono



$$\begin{cases} N_1 + N_2 = mg \\ N_1 b_1 = N_2 b_2 \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{cases} N_1 = \dfrac{b_2}{b_1 + b_2}\, mg = \dfrac{2}{3}\, mg = 1.60\,\mathrm{N\,m} \\ N_2 = \dfrac{b_1}{b_1 + b_2}\, mg = \dfrac{1}{3}\, mg = 0.80\,\mathrm{N\,m}\ . \end{cases}$$

Si noti che si ottiene lo stesso risultato scegliendo come polo qualsiasi altro punto; per esempio scegliendo il bullone di destra, punto di applicazione della reazione $\boldsymbol{N}_1$, le condizioni di equilibrio diventano

$$\begin{cases} N_1 + N_2 = mg \\ mgb_1 = N_2(b_1 + b_2) \end{cases}$$

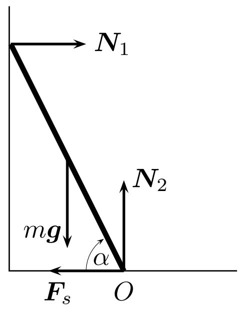
che hanno le stesse soluzioni trovate sopra.

Problema 3

Una scala di massa $m = 3.5\,\mathrm{kg}$ e lunghezza ℓ è appoggiata ad una parte verticale formando con il pavimento un angolo $\alpha = 65°$; sapendo che il coefficiente di attrito statico fra la scala e la superficie del pavimento è $\mu_s = 0.36$ e che l'attrito con la parete verticale è trascurabile, determinare

① le reazioni vincolari nei punti di appoggio;

② l'angolo minimo α_m che consente alla scala di stare in equilibrio.



Soluzione

① Al punto di appoggio sulla parete vi è solo una reazione vincolare perpendicolare $\boldsymbol{N}_1$, mentre al punto di appoggio sul pavimento, oltre alla relazione vincolare perpendicolare $\boldsymbol{N}_2$ vi è anche una forza di attrito statico $\boldsymbol{F}_s$; inoltre sulla scala agisce la forza peso applicata nel suo punto medio, come rappresentato in figura. Per avere equilibrio si devono annullare la risultante delle forze agenti e i momento totale delle forze agenti. È conveniente scegliere come polo il punto O di appoggio della scala sul pavimento poiché, rispetto ad esso due forza hanno braccio nullo; il bracci di $\boldsymbol{N}_1$ e di $m\boldsymbol{g}$ valgono rispettivamente

$$b_1 = \ell \operatorname{sen} \alpha \qquad , \qquad b_2 = \frac{1}{2}\,\ell \cos \alpha \ ,$$

quindi le condizioni per l'equilibrio diventano

$$\begin{cases} N_1 = F_s \\ N_2 = mg \\ N_1 \ell \operatorname{sen} \alpha = \dfrac{1}{2}\, mg\ell \cos \alpha \end{cases} \qquad \longrightarrow \qquad \begin{cases} N_1 = F_s = \dfrac{mg}{2 \operatorname{tg} \alpha} = 8.0\,\mathrm{N} \\ N_2 = mg = 34\,\mathrm{N}\ . \end{cases}$$

Come già osservato nell'esercizio precedente, la scelta del polo è stata dettata da sole considerazioni di comodità e di semplicità di calcolo; scegliendo un polo diverso, per esempio il vertice dell'angolo formato dal pavimento e dalla parete, si sarebbe ottenuto il medesimo risultato, dovendo però considerare il momento di tre forze invece che di due come fatto qui.

② Il vincolo può sviluppare una forza di attrito statico il cui massimo modulo è

$$F_s^{M} = \mu_s N_2 = \mu_s mg\ ;$$

tenendo conto dei risultati del primo punto, deve quindi valere

$$F_s \le F_s^{M} \qquad \longrightarrow \qquad \frac{mg}{2 \operatorname{tg} \alpha} \le \mu_s mg \qquad \longrightarrow \qquad \operatorname{tg} \alpha \ge \frac{1}{2\mu_s}\ ;$$

pertanto l'angolo minimo è

$$\alpha_m = \operatorname{arctg} \frac{1}{2\mu_d} = 54°\ .$$

5.1.2 Momento angolare

Il *momento angolare* o *momento della quantità di moto* di P rispetto al polo O è la quantità vettoriale

$$\boldsymbol{L}_O = \boldsymbol{OP} \times m\boldsymbol{v} \ . \tag{5.1}$$

Le equazioni precedenti diventano particolarmente semplici nel caso in cui il moto di P sia circolare uniforme di centro O e raggio r; in tal caso, infatti la forza agente è centripeta e quindi ha la stessa direzione del vettore $\boldsymbol{OP}$, mentre la velocità è tangente e quindi perpendicolare la vettore $\boldsymbol{OP}$; si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{M}_O &= 0 \\ \boldsymbol{L}_O &= mr^2\boldsymbol{\omega} \end{aligned}\right\} \qquad \text{moto circolare.}$$

L'ultima equazione scritta in forma scalare diventa

$$L_O = mr^2\omega = mrv \ . \tag{5.2}$$

Il momento di una forza ed il momento angolare sono legati dalla relazione

$$\boldsymbol{M}_O = \frac{\Delta \boldsymbol{L}_O}{\Delta t}$$

dalla quale segue la legge della conservazione del momento angolare.

> *Se un punto materiale è sottoposto all'azione di una forza di momento nullo il suo momento angolare è una costante del moto.*

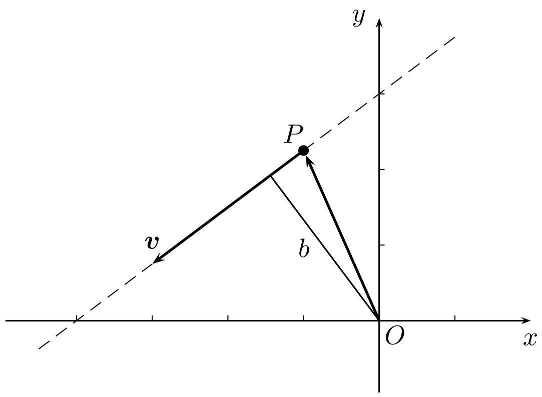
Un caso importante in cui il momento angolare si conserva è quello in cui il punto materiale è sottoposto ad una *forza centrale*: in tale caso infatti $\boldsymbol{F}$ e $\boldsymbol{OP}$ sono vettori paralleli ed il loro prodotto vettoriale è nullo.

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Rispetto ad un sistema di riferimento cartesiano di origine O, un punto materiale P di massa $m = 3.20\,\text{kg}$ si muove di moto rettilineo ed uniforme lungo la retta r di equazione cartesiana $3x - 4y + 12 = 0$ con velocità di modulo $v = 2.25\,\text{m/s}$ e avente verso diretto in modo tale che le componenti di $\boldsymbol{v}$ siano entrambe negative; determinare modulo, direzione e verso del momento angolare di P rispetto al polo O.

Soluzione



Utilizzando la (5.1), e ricordando la definizione di prodotto vettoriale, per la regola della mano destra la direzione del vettore momento angolare è perpendicolare al piano xy e di verso uscente dal foglio; per quanto riguarda il modulo, questo è dato dal prodotto del modulo di $\boldsymbol{v}$ per la componente di $\boldsymbol{OP}$ perpendicolare a $\boldsymbol{v}$, in figura il segmento b; quindi

$$L_O = \|\boldsymbol{OP} \times m\boldsymbol{v}\| = mvb \ .$$

La lunghezza di b è pari alla distanza della retta dall'origine; ricordando la formula della distanza punto retta, si trova

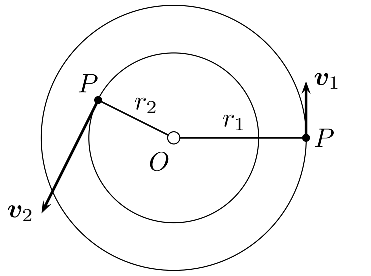
$$b = \frac{|ax_o + by_o + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2.4\,\text{m} \ ;$$

quindi

$$L_O = 17.3\,\mathrm{N\,m}\ .$$

Problema 2

Un punto materiale P di massa m è legato mediante una corda inestensibile ad una sottile asta verticale e ruota, in un piano supposto orizzontale, attorno al punto O dell'asta; inizialmente il raggio della traiettoria di P misura $r_1 = 24\,\mathrm{cm}$ e ha velocità $v_1 = 2.4\,\mathrm{m/s}$, dopo un certo tempo la corda si è avvolta attorno all'asta e il raggio della traiettoria si è ridotto alla misura $r_2 = 15\,\mathrm{cm}$; determinare la velocità finale di P.



Soluzione

Sul punto materiale P agisce solo la tensione $\boldsymbol{\tau}$ della corda; poiché la forza ha la direzione di $\boldsymbol{OP}$, il momento della forza $\boldsymbol{\tau}$ rispetto al centro O della traiettoria è nullo; quindi il momento angolare durante il moto rimane costante. Poiché l'asta è sottile, è ragionevole supporre che ogni giro di P attorno ad O sia percorso di moto circolare uniforme; è cosí possibile utilizzare la (5.2) e scrivere:

$$mr_1v_1 = mr_2v_2$$

da cui

$$v_2 = \frac{r_1}{r_2}\,v_1 = 3.8\,\mathrm{m/s}\ .$$

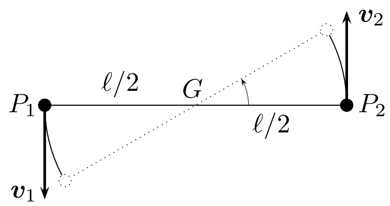
Problema 3

Due punti materiali P_1 e P_2 aventi la stessa massa $m = 50\,\mathrm{g}$ sono uniti da una corda inestensibile di lunghezza $\ell = 60\,\mathrm{cm}$ e massa trascurabile e ruotano attorno al loro centro di massa G con velocità $v = 4.3\,\mathrm{m/s}$;

① determinare il momento angolare del sistema rispetto al polo G;

② mostrare che il momento angolare rispetto a P_1 è il doppio del momento angolare rispetto a G.

Soluzione



① Il momento angolare del sistema è la somma dei momenti angolari dei due punti che si muovono di moto circolare uniforme di centro G, vale dunque

$$\boldsymbol{L}_G = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 = \boldsymbol{GP}_1 \times m\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{GP}_2 \times m\boldsymbol{v}_2\ .$$

I due momenti hanno la stessa direzione, lo stesso verso (in figura uscente dal foglio) e lo stesso modulo ottenibile usando la (5.2):

$$L_1 = L_2 = m\,\frac{\ell}{2}\,v$$

quindi

$$L_G = m\ell v = 0.13\,\mathrm{N\,m}\ .$$

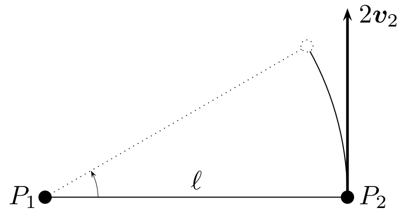
② Rispetto al polo P_1 il momento angolare del sistema è quello del punto solo P_2 si muove di moto circolare uniforme di centro P_1, raggio ℓ e velocità $2v$. Il momento angolare è quindi

$$\boldsymbol{L}_{P_1} = \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2 \times m(2\boldsymbol{v})\ ,$$

la cui direzione e verso sono gli stessi del caso con polo in G mentre il modulo è

$$L_{P_1} = 2m\ell v = 0.26\,\mathrm{Nm} \ .$$

Per convincersi che la velocità di P_2 rispetto a P_1 e $2v$, basta osservare che la velocità angolare del sistema rispetto a G e rispetto a P_1 è la stessa mentre il raggio di rotazione raddoppia.



5.2 Corpo rigido

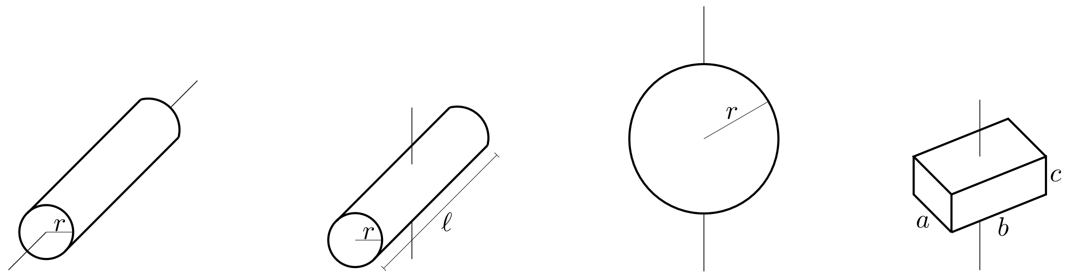
Se il sistema materiale è un corpo rigido, il suo moto si studia come la composizione del moto del baricentro del corpo e del moto del corpo rispetto al baricentro.

5.2.1 Dinamica del corpo rigido

Il moto del baricentro di un sistema materiale dipende solo dalla risultante $\boldsymbol{F}$ delle forze esterne agenti su di esso; vale infatti la seguente equazione nota con il nome di *prima equazione cardinale*;

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}_G$$

ove m è la massa totale del sistema.
Il moto rispetto al centro di massa è di tipo rotatorio e le equazioni cardinali si scrivono in termini del momento di inerzia I del corpo rispetto all'asse di rotazione. In figura sono riportati i momenti d'inerzia di alcuni corpi rigidi di massa m, rispetto agli assi di rotazione indicati passanti per il baricentro G del corpo.



(a) Cilindro pieno: $I_G = \frac{1}{2}mr^2$

(b) Cilindro pieno: $I_G = m\left(\frac{r^2}{4} + \frac{\ell^2}{12}\right)$

(c) Sfera: $I_G = \frac{2}{5}mr^2$

(d) Parallelepipedo: $I_G = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$

La relazione fra i momenti d'inerzia di un sistema materiale rispetto a due assi paralleli distanti d dei quali uno passa per il baricentro G è data dal *teorema di Huygens-Steiner*:

$$I_r = I_G + md^2 \ .$$

La componente L_{Or} del momento angolare parallela all'asse di rotazione, ove O è un polo che appartiene all'asse di rotazione, è dato da

$$L_{Or} = I\omega \ .$$

In generale il momento angolare non è parallelo all'asse di rotazione, tuttavia per ogni corpo rigido esistono tre assi di rotazione, detti *assi principali d'inerzia*, per i quali ciò accade; in tali casi la precedente relazione diventa

$$\boldsymbol{L}_O = I\boldsymbol{\omega} \ .$$

In generale è asse principale d'inerzia ogni asse di simmetria del corpo rigido.
Se sul corpo rigido agisce un momento di forze diverso da zero vale la *seconda equazione cardinale*

$$\boldsymbol{M}_O = \frac{\Delta \boldsymbol{L}_O}{\Delta t} \tag{5.3}$$

se l'asse di rotazione è un asse principale d'inerzia, la precedente equazione diventa

$$\boldsymbol{M}_O = I\,\frac{\Delta \boldsymbol{\omega}}{\Delta t} = I\boldsymbol{\alpha}\ .$$

ove $\boldsymbol{\alpha}$ è il vettore accelerazione angolare del corpo rigido.
Il lavoro compiuto dalle forze di momento $\boldsymbol{M}_O$ per una rotazione del sistema di un angolo $\delta\theta$ attorno all'asse di rotazione r è dato da

$$\mathcal{L} = M_r \delta\theta$$

ove M_r è la componente di $\boldsymbol{M}_O$ rispetto all'asse di rotazione.
L'energia cinetica, a sua volta, si scrive come somma di due parti una relativa al moto di traslazione di G e una relativa al moto rispetto a G, vale quindi il *teorema di König*:

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}\,mv_G^2 + \frac{1}{2}\,I\omega^2$$

ove, ω è il modulo della velocità angolare del corpo.

PROBLEMI RISOLTI

***Problema 1**

Una pattinatrice artistica ruota attorno ad un asse passante per il proprio baricentro con velocità angolare di modulo $\omega_1 = 2.4\,\mathrm{rad/s}$ quando, portando le braccia lungo il corpo, aumenta il modulo della propria velocità angolare di rotazione fino a $\omega_2 = 3.5\,\mathrm{rad/s}$; sapendo che il suo momento d'inerzia iniziale era $I_1 = 5.2\,\mathrm{kgm^2}$ determinare il suo momento d'inerzia finale.

Soluzione

L'unica forza esterna agente sulla pattinatrice è la forza peso; scegliendo come polo il centro di massa, il momento delle forze esterne risulta quindi nullo. Pertanto il momento angolare rimane costante; vale quindi

$$L_1 = L_2 \qquad \longrightarrow \qquad I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \qquad \longrightarrow \qquad I_2 = \frac{\omega_1}{\omega_2}\,I_1 = 3.6\,\mathrm{kgm^2}\ .$$

Problema 2

Un satellite cilindrico di raggio $r = 4.5\,\mathrm{m}$ e massa $m = 5.4 \cdot 10^3\,\mathrm{kg}$ inizialmente fermo, viene messo in rotazione per mezzo di due propulsori montati tangenti al cilindro; determinare

① il modulo F della forza che deve essere applicata da ciascun razzo affinché il satellite raggiunga la velocità angolare di modulo $\omega = 3.5\,\mathrm{rad/s}$ nel tempo $\Delta t = 360\,\mathrm{s}$;

② l'energia cinetica finale del satellite.

Soluzione

① Scegliendo come polo un punto O sull'asse di simmetria del cilindro l'equazione (5.3) in forma scalare si scrive

$$M_O = I\frac{\omega}{\Delta t}\ .$$

Il momento delle forze esterne è uguale al prodotto delle due forze, aventi lo stesso modulo F, per il braccio r; inoltre il momento d'inerzia del cilindro rispetto al suo asse è $I = mr^2/2$; si trova quindi

$$2Fr = \frac{1}{2}\,mr^2\,\frac{\omega}{\Delta t} \qquad \longrightarrow \qquad F = \frac{mr\omega}{4\Delta t} = 59\,\mathrm{N}\ .$$

② L'energia cinetica finale è dovuta alla pura rotazione ed è quindi data da

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}\, I\omega^2 = \frac{1}{4}\, mr^2\omega^2 = 3.4 \cdot 10^5 \text{ J} .$$

Lo stesso calcolo si sarebbe potuto fare, con piú calcoli, utilizzando il teorema dell'energia cinetica; il lavoro del momento delle forze dei propulsori infatti è dato da

$$\mathcal{L} = M_O \Delta\theta$$

ove $\Delta\theta$ è l'angolo della rotazione totale compiuta dal satellite; poiché tale rotazione è uniformemente accelerata da un'accelerazione angolare $\alpha = M_O/I$ si ha

$$\Delta\theta = \frac{1}{2}\, \alpha\Delta t^2 = \frac{1}{2I}\, M_O \Delta t^2$$

e quindi

$$\mathcal{E}_c = \mathcal{L} = \frac{1}{2I}\, M_O^2 \Delta t^2 = \frac{4F^2 r^2 \Delta t^2}{mr^2} = \frac{4F^2 \Delta t^2}{m} = \frac{1}{4}\, mr^2\omega^2$$

che è lo stesso risultato trovato sopra.

Problema 3

Determinare l'energia cinetica della Terra nel suo moto di rotazione attorno al proprio asse e di rivoluzione attorno al Sole.

Soluzione

L'energia cinetica di rotazione attorno al proprio asse è data da

$$\mathcal{E}_{c1} = \frac{1}{2}\, I\omega^2$$

ove $I = 2mr^2/5$ e $\omega = 2\pi/T$ ove T è il tempo impiegato a compiere una rotazione competa, e quindi un giorno. Utilizzando i valori riportati in appendice si trova

$$\mathcal{E}_{c1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}\, mr^2\omega^2 = \frac{4\pi^2}{5} \cdot \frac{mr^2}{T^2} = 2.56 \cdot 10^{29} \text{ J} .$$

Per l'energia cinetica di rivoluzione attorno al Sole, la Terra può essere approssimata ad un punto materiale; indicando con d la distanza Terra-Sole e con T_1 il periodo di rivoluzione, si ha quindi

$$\mathcal{E}_{c2} = \frac{1}{2}\, mv^2 = \frac{1}{2}\, m \left(\frac{2\pi d}{T_1}\right)^2 = \frac{2\pi m d^2}{T_1^2} = 8.45 \cdot 10^{26} \text{ J} .$$

5.2.2 Moto di rotolamento

Nel moto di puro rotolamento dei corpi rotondi il punto di contatto P con la superficie di appoggio ha velocità nulla, è quindi conveniente considerare tale moto come una rotazione attorno a P; alternativamente si può considerare il moto di rotolamento come un moto traslatorio del baricentro G composto con una rotazione attorno a G, in questo caso valgono le relazioni

$$v_G = \omega r \qquad , \qquad a_G = \alpha r \ , \tag{5.4}$$

ove r è il raggio del corpo rotondo.
Il seguente problema illustra la situazione.

PROBLEMI RISOLTI

*Problema 1

Si consideri un cilindro omogeneo di massa $m = 6.3\,\mathrm{kg}$ e raggio $r = 64\,\mathrm{cm}$ che rotola su di un piano orizzontale scabro sotto l'azione di una forza $\boldsymbol{F}$ orizzontale applicata al baricentro G del disco di modulo $F = 12\,\mathrm{N}$; sapendo che il cilindro parte da fermo e che il coefficiente di attrito statico fra il cilindro e il piano orizzontale è $\mu_s = 0.55$, determinare

① il modulo della sua velocità lineare dopo $t = 4.2\,\mathrm{s}$;

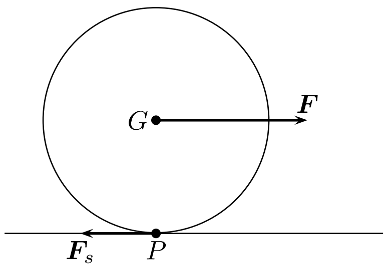
② l'energia cinetica all'istante t;

③ il lavoro fatto dalla forze agenti sul cilindro;

④ il modulo massimo che può avere la forza perché il rotolamento avvenga senza strisciare.

Soluzione

① Le forze agenti sul cilindro sono la forza esterna $\boldsymbol{F}$ e la forza d'attrito statico $\boldsymbol{F}_s$, rappresentate in figura, piú la forza peso e la forza perpendicolare di reazione del piano di appoggio che annullandosi a vicenda non giocano qui alcun ruolo. La prima e la seconda equazione cardinale in questa situazione diventano



$$\boldsymbol{F} + \boldsymbol{F}_s = m\boldsymbol{a}_G \qquad , \qquad M_z = I_z\alpha$$

ove l'asse di rotazione è l'asse perpendicolare passante per il baricentro G; G è anche il polo rispetto a cui sono calcolati i momenti, con l'asse z di direzione perpendicolare al piano del foglio e di verso entrante. Scrivendo le precedenti equazioni per componenti si trova

$$F - F_s = ma_G \qquad , \qquad F_s r = \frac{1}{2}mr^2\alpha$$

utilizzando la (5.4), si ottiene

$$a_G = \frac{2F}{3m}$$

e quindi

$$v_G = a_G t = \frac{2F}{3m}t = 5.3\,\mathrm{m/s}\ .$$

Si può eseguire lo stesso calcolo considerando l'asse di rotazione passante per il punto P di appoggio; in questo caso il momento d'inerzia, per il teorema di Huygens-Steiner, vale

$$I = I_G + mr^2 = \frac{3}{2}mr^2\ ;$$

la seconda equazione cardinale quindi diventa

$$Fr = \frac{3}{2}mr^2\alpha \qquad , \qquad a_G = \frac{\alpha}{r} = \frac{2F}{3m}$$

ritrovando cosí il risultato precedente.

② L'energia cinetica può essere calcolata utilizzando il teorema di König considerando l'energia di rotazione attorno al baricentro G piú l'energia di traslazione del baricentro:

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv_G + \frac{1}{2}I_G\omega^2 = \frac{3}{4}mv_G^2 = \frac{F^2t^2}{3m} = 1.3\cdot 10^2\ \mathrm{J}\ .$$

Lo stesso calcolo si può effettuare considerando la rotazione attorno al punto fisso P; in questo caso non vi è traslazione ma solo rotazione, cambia però il momento d'inerzia:

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} I_P \omega^2 = \frac{3}{4} mr^2\omega^2 = \frac{3}{4} mv_G^2$$

che è il risultato già trovato.
③ L'unica forza che compie lavoro è $\boldsymbol{F}$ in quanto la forza di attrito statico agisce su un punto fermo e quindi non vi è spostamento. La forza $\boldsymbol{F}$ agisce sul baricentro che si muove di moto uniformemente accelerato. partendo da fermo, con accelerazione a_G trovata sopra, quindi il suo spostamento è

$$s = \frac{1}{2} a_G t^2 = \frac{Ft^2}{3m}$$

e quindi il lavoro di $\boldsymbol{F}$ è

$$\mathcal{L} = Fs = \frac{F^2t^2}{3m} = 1.3 \cdot 10^2 \text{ J} ;$$

tale valore è uguale alla variazione di energia cinetica in accordo con il teorema dell'energia cinetica.
④ Dalla relazione trovata al primo punto si ottiene

$$F - F_s = \frac{2F}{3} \qquad , \qquad F_s = \frac{1}{3} F$$

quindi per avere puro rotolamento la forza agente deve essere il triplo della forza di attrito; ora, poiché la forza massima di attrito che può sviluppare il vincolo è data da $\mu_s mg$, la forza agente non può superare il triplo di tale valore, cioè deve valere

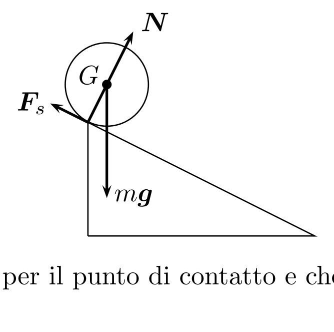
$$F \leq 3\mu_s mg \qquad \longrightarrow \qquad F_{max} = 3\mu_s mg = 1.0 \cdot 10^2 \text{ N} .$$

Problema 2

Una sfera di massa $m = 24$ kg parte da ferma dalla cima di un piano inclinato scabro di altezza $h = 3.5$ m scendendo rotolando senza strisciare; sapendo che l'angolo di inclinazione del piano è $\theta = 23°$ e che il coefficiente di attrito statico fra la sfera e il piano è $\mu_s = 0.30$, determinare

① la velocità con cui la sfera arriva in fondo al piano;
② il modulo della forza di attrito statico agente sulla sfera;
③ l'angolo di inclinazione massimo che consente il rotolamento senza strisciare.

Soluzione



① L'unica forza che lavora qui è la forza peso che è una forza conservativa, quindi l'energia cinetica finale deve essere uguale all'energia potenziale iniziale; a sua volata l'energia cinetica può essere calcolata come energia cinetica di rotazione attorno al punto di contatto cioè

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} I\omega^2$$

ove il momento d'inerzia è quello rispetto all'asse di rotazione passante per il punto di contatto e che va calcolato utilizzando il teorema di Huygens-Steiner:

$$I = I_G + mr^2 = \frac{2}{5} mr^2 + mr^2 = \frac{7}{5} mr^2 .$$

Riconoscendo che $r^2\omega^2 = v_G^2$, si ottiene

$$\mathcal{E}_c = \frac{7}{5} mr^2\omega^2 = \frac{7}{5} mv_G^2$$

uguagliando, come detto, questa energia cinetica con l'energia potenziale iniziale mgh si trova

$$mgh = \frac{7}{5}\, mv_G^2 \qquad \longrightarrow \qquad v_G = \sqrt{\frac{5}{7}\, gh} = 5.0\,\mathrm{m/s}\ .$$

② Le forze agenti sulla sfera sono la forza peso $m\boldsymbol{g}$, applicata al baricentro, la forza di reazione vincolare perpendicolare $\boldsymbol{N}$, applicata al punto di appoggio, e la forza di attrito statico $\boldsymbol{F}_s$, anch'essa applicata al punto di appoggio. Le equazioni cardinali sono

$$m\boldsymbol{g} + \boldsymbol{N} + \boldsymbol{F}_s = m\boldsymbol{a}_G \qquad , \qquad M = I\alpha$$

scegliendo come polo il punto di appoggio, l'unica forza ad avere momento non nullo è la forza peso, le precedenti equazioni scritte per componenti, quindi diventano

$$\begin{cases} mg\,\mathrm{sen}\,\theta - F_s = ma_G \\ mg\cos\theta - N = 0\ . \end{cases} \qquad , \qquad mgr\,\mathrm{sen}\,\theta = I\alpha$$

utilizzando il momento d'inerzia già calcolato e ricordando che $r\alpha = a_G$, si trova

$$mgr\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{7}{5}\, mr^2\alpha \qquad , \qquad ma_G = \frac{5}{7}\, mg\,\mathrm{sen}\,\theta$$

e quindi

$$F_s = mg\,\mathrm{sen}\,\theta - ma_G = mg\,\mathrm{sen}\,\theta - \frac{5}{7}\, mg\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{2}{7}\, mg\,\mathrm{sen}\,\theta\ .$$

③ il valore massimo del modulo della forza di attrito statico che può sviluppare il vincolo è

$$F_s^M = \mu_s N = \mu_s mg\cos\theta = 26\,\mathrm{N}$$

quindi per aver un moto di puro rotolamento il modulo della forza di attrito calcolato sopra non deve superare tale valore, quindi deve valere

$$\frac{2}{7}\, mg\,\mathrm{sen}\,\theta \le \mu_s mg\cos\theta \qquad \longrightarrow \qquad \mathrm{tg}\,\theta \le \frac{7}{2}\,\mu_s \qquad \longrightarrow \qquad \alpha \le \mathrm{arctg}\left(\frac{7}{2}\,\mu_s\right) = 46^\circ\ .$$

5.2.3 Esercizi

Momento di una forza

✍ **Es. 1** — Due bambini di masse $m_1 = 25\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 30\,\mathrm{kg}$ giocano su di un'altalena basculante sospesa nel suo punto medio di lunghezza totale $\ell = 6.0\,\mathrm{m}$; se il primo bambino si siede su una delle due estremità, determinare

a) la distanza dall'altra estremità a cui deve sedersi il secondo bambino perché il sistema sia in equilibrio;

b) la reazione vincolare nel punto di sospensione.

☞ **Es. 2** — Una scala omogenea di massa $m = 8.0\,\mathrm{kg}$ è appoggiata ad una parete liscia con cui forma un angolo $\alpha = 30^\circ$; determinare i moduli delle forze $\boldsymbol{F}_1$ ed $\boldsymbol{F}_2$ esercitate rispettivamente dal pavimento e dalla parete sulla scala.

✐ **Es. 3** — Un quadro rettangolare di massa $m = 650\,\mathrm{g}$ è appeso al soffitto per mezzo di due fili verticali inestensibili di massa trascurabile uno dei quali è attaccato ad un'estremità, mentre l'altro è attaccato ad un punto che dista dall'altra estremità i 2/3 della lunghezza totale del quadro; determinare le tensioni dei due fili.

☞ **Es. 4** — Una ruota di massa $m = 350\,\mathrm{g}$ di raggio $r = 31\,\mathrm{cm}$ deve superare uno scalino di altezza $h = 15\,\mathrm{cm}$; per farlo viene applicata una forza $\boldsymbol{F}$ orizzontale nel suo centro; determinare il minimo modulo di $\boldsymbol{F}$ necessario.

☞ **Es. 5** — Una scala 'a libretto' è costituita da due parti uguali entrambe appoggiate a terra e formanti un angolo $\alpha = 36°$; a metà altezza le due parti della scala sono trattenute da un filo inestensibile di massa trascurabile che le collega; sapendo che ciascuna delle due parti della scala ha massa $m = 4.5\,\text{kg}$ e che non vi è attrito fra la scala e il pavimento su cui appoggia, determinare il modulo della tensione del filo.

✐ **Es. 6** — Un cubo di massa $m = 4.6\,\text{kg}$ ha uno spigolo appoggiato ad una parete ed uno spigolo appoggiato al pavimento scabro in modo che la faccia inferiore formi con il pavimento un angolo $\alpha = 25°$; determinare il modulo della forza di attrito agente sul cubo.

✐ **Es. 7** — Un asta metallica omogenea, che è piegata ad angolo retto il modo che uno dei due rami abbiano lunghezze ℓ_1 ed ℓ_2 tali che sia $\ell_2 = 2\ell_1$, viene appesa ad un sostegno orizzontale; determinare gli angoli formati dai due rami in condizioni di equilibrio.

Momento angolare

☞ **Es. 1** — Un sasso di massa m è legato ad un filo inestensibile che è fissato ad un bastoncino verticale; il sasso è fatto ruotare in modo che il filo progressivamente si avvolga attorno al bastoncino; sapendo che inizialmente il filo è lungo $\ell_0 = 0.80\,\text{cm}$ e che il sasso è posto in rotazione con una velocità di modulo $v_0 = 4.5\,\text{m/s}$,

a) stabilire come il modulo della tensione del filo dipende dalla sua lunghezza;

b) determinare il modulo v della velocità del sasso quando il filo ha dimezzato la propria velocità.

☞ **Es. 2** — Un punto materiale di massa $m = 23\,\text{kg}$ si muove di moto circolare uniforme con velocità di modulo $v_0 = 4.5\,\text{m/s}$ quando su esso comincia ad agire, nel verso del moto, una forza tangenziale di modulo $F = 54\,\text{N}$; sapendo che l'azione della forza dura $t = 1.8\,\text{s}$, determinare il modulo v della velocità finale del punto materiale.

☞ **Es. 3** — Un punto materiale di massa $m = 4.2\,\text{kg}$ ruota su un piano orizzontale privo di attrito; il punto è attaccato ad una estremità di un filo inestensibile e di massa trascurabile, mentre l'altra estremità passa attraverso un buco del piano che viene tirata da una forza esterna in modo da diminuire il raggio della traiettoria circolare del punto materiale; sapendo inizialmente il punto materiale si muove con velocità di modulo $v_1 = 2.6\,\text{m/s}$ lungo una circonferenza di raggio $r_1 = 60\,\text{cm}$, determinare

a) il modulo del momento angolare del punto materiale;

b) la velocità del punto materiale quando il raggio è diminuito al valore $r_2 = 36\,\text{cm}$.

Dinamica del corpo rigido

✍ **Es. 1** — Determinare il momento angolare di un disco di vinile avente massa $m = 120\,\text{g}$ e diametro $d = 35.5\,\text{cm}$ che ruota percorrendo 45 giri al minuto.

☞ **Es. 2** — Una giostra di massa $m = 450\,\text{kg}$ e raggio $r = 3.50\,\text{m}$ ruota compiendo 3 giri al minuto; determinare

a) il modulo del momento angolare della giostra rispetto al suo centro;

b) il modulo del momento delle forze esterne che è necessario applicare alla giostra per fermarla nell'intervallo di tempo $\Delta t = 5.5\,\text{s}$.

☞ **Es. 3** — L'elica di un generatore eolico è assimilabile a tra aste di massa $m = 12\,\text{kg}$, spessore trascurabile e lunghezza $\ell = 7.5\,\text{m}$ disposte a $120°$ una dall'altra; determinare il momento di forze esterno, rispetto al centro O dell'elica, che è necessario applicare per portare all'elica per portarla in $t = 9\,\text{s}$ a ruotare con una velocità angolare di modulo $\omega = 10\,\text{rad/s}$.

☞ **Es. 4** — Un vasaio sta modellando un vaso facendo ruotare un blocco di argilla su una ruota di raggio $r = 10\,\mathrm{cm}$ che gira a velocità angolare costante percorrendo 2.5 giri al secondo; l'unica forza di attrito agente è quella delle mani del vasaio ed ha modulo $F_a = 2.3\,\mathrm{N}$; determinare

a) il modulo del momento delle forze esterne rispetto al centro O della ruota che tengono in rotazione la ruota;

b) il momento di inerzia del sistema costituito dalla ruota e dal vaso sapendo che il tempo impiegato dalla ruota a fermarsi sotto l'azione dell'attrito quando le forze esterne smettono di agire è $t = 4.6\,\mathrm{s}$

✐ **Es. 5** — Due corpi di masse $m_1 = 15\,\mathrm{kg}$ e $m_2 = 18\,\mathrm{kg}$ sono collegati per mezzo di un filo inestensibile che passa per una carrucola di massa $m = 6.5\,\mathrm{kg}$ e raggio $r = 35\,\mathrm{cm}$; sapendo che le masse sono inizialmente ferme, determinare

a) l'accelerazione dei due corpi;

b) la velocità angolare della carrucola quando il piú pesante dei due corpi è sceso di $h = 25\,\mathrm{cm}$.

✐ **Es. 6** — Una stella di neutroni è stata generata dal collasso gravitazionale di una stella di raggio $r_1 = 6.2 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$; sapendo che prima del collasso compiva una rotazione attorno al proprio asse ogni 5 giorni e che alla fine del collasso il suo raggio è $r_2 = 15\,\mathrm{km}$, determinare la frequenza di rotazione della stella di neutroni.

Moto di rotolamento

☞ **Es. 1** — Si consideri una sfera omogenea di massa $m = 5.4\,\mathrm{kg}$ che rotola su di un piano orizzontale scabro sotto l'azione di una forza $\boldsymbol{F}$ orizzontale applicata al baricentro G del disco di modulo $F = 20\,\mathrm{N}$; sapendo che la sfera parte da ferma e che il coefficiente di attrito statico fra il cilindro e il piano orizzontale è $\mu_s = 0.23$, determinare

a) il modulo della sua velocità lineare dopo $t = 4.2\,\mathrm{s}$;

b) il lavoro fatto dalla forze agenti sulla sfera;

c) il modulo della forza di attrito statico.

☞ **Es. 2** — Una sfera di raggio $r = 45\,\mathrm{cm}$ sta rotolando su un piano orizzontale muovendosi con velocità di modulo $v = 4.8\,\mathrm{m/s}$ quando comincia a salire un piano inclinato; determinare di quanto sale la sfera prima di fermarsi.

✐ **Es. 3** — Una ruota di raggio $r = 30\,\mathrm{cm}$ si sta muovendo con velocità di modulo $v = 90\,\mathrm{km/h}$ su una strada asfaltata; sapendo che il coefficiente di attrito statico fra lo pneumatico della ruota e l'asfalto è $\mu_s = 0.55$, determinare il minimo spazio di frenata se la ruota decelera uniformemente senza slittare.

Capitolo 6

Gravitazione

La teoria della gravitazione studia il moto dei corpi celesti e in particolare del sistema solare; come caso particolare è anche un modello dell'attrazione di tutti i corpi verso il centro della Terra.

6.1 Teoria newtoniana della forza gravitazionale

6.1.1 Leggi di Kepler

I moti dei pianeti attorno al Sole verificano le seguenti leggi empiriche, formulate da Kepler.

1. *Ogni pianeta ruota attorno al Sole descrivendo un'orbita ellittica della quale il Sole occupa un fuoco.*
2. *Durante il moto di rivoluzione la velocità del pianeta varia in modo da mantenere costante la velocità areolare.*
3. *I quadrati dei tempi di rivoluzione dei pianeti sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle rispettive orbite.*

Per *velocità areolare* si intende l'area $\mathcal{A}$ spazzata dal raggio vettore che unisce il Sole al pianeta nell'unità di tempo; si può quindi indicare con il simbolo $\frac{\Delta\mathcal{A}}{\Delta t}$. La velocità areolare è legata al modulo L_S del momento angolare del pianeta rispetto al Sole dalla relazione;

$$\frac{\Delta\mathcal{A}}{\Delta t} = \frac{L_S}{2m} \tag{6.1}$$

ove m è la massa del pianeta. La costanza della velocità angolare quindi non è altro che una conseguenza della conservazione del momento angolare del pianeta. I pianeti del Sistema Solare, con l'esclusione di Mercurio e di Plutone, hanno un'orbita con eccentricità molto piccola; le loro orbite quindi sono con ottima approssimazione assimilabili a circonferenze e il semiasse maggiore viene a coincidere con il raggio. In questa approssimazione, che spesso verrà utilizzata negli esercizi, la seconda legge di Kepler dice che il moto di rivoluzione dei pianeti è circolare uniforme.
La terza legge, indicando con T il periodo di rivoluzione e con a il semiasse maggiore, viene espressa dalla relazione

$$T^2 = \kappa a^3 \tag{6.2}$$

ove la costante κ è la stessa per tutti i pianeti.
Per la misura dei periodi di rivoluzione spesso si usano, come unità di misura il *giorno*, simbolo d, e l'*anno*, simbolo y. Le formule di conversione con i secondi sono

$$1\,\mathrm{d} = 86400\,\mathrm{s} \qquad , \qquad 1\,\mathrm{y} = 31561920\,\mathrm{s}\ .$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Sapendo che la distanza media di Giove dal Sole è 5.205 volte quella della Terra, determinare il periodo di rivoluzione di Giove.

Soluzione

Usando la (6.2) si può scrivere

$$\frac{T_T^2}{T_G^2} = \frac{r_T^3}{r_G^3}$$

da cui, ricordando che il periodo di rivoluzione della Terra è un anno, si trova

$$T_G = T_T \left(\frac{r_G}{r_T}\right)^{3/2} = 11.87\,\mathrm{y}\ .$$

Problema 2

Nell'approssimazione che le rispettive orbite siano circolari, determinare le velocità areolari della Terra e di Saturno.

Soluzione

Nella situazione presente è possibile considerare i pianeti come punti materiali; quindi, ricordando che il momento angolare di un punto materiale di massa m in moto circolare uniforme con velocità v su una traiettoria di raggio r, è dato da $L = mrv$, usando la (6.1), si trova

$$\frac{\Delta\mathcal{A}}{\Delta t} = \frac{mrv}{2m} = \frac{1}{2}\,rv$$

ma la velocità di un pianeta che si muove di moto circolare uniforme è dato dal rapporto della lunghezza dell'orbita e del periodo di rivoluzione, cioè

$$v = \frac{2\pi r}{T}\ ;$$

quindi

$$\frac{\Delta\mathcal{A}}{\Delta t} = \frac{1}{2}\,r\,\frac{2\pi r}{T} = \frac{\pi r^2}{T}$$

che è proprio l'area totale racchiusa dall'orbita diviso il periodo di rivoluzione.
Usando le costanti disponibili in appendice si trova quindi:

$$\left(\frac{\Delta\mathcal{A}}{\Delta t}\right)_T = 2.228 \cdot 10^9\,\mathrm{m^2/s} \qquad , \qquad \left(\frac{\Delta\mathcal{A}}{\Delta t}\right)_S = 6.949 \cdot 10^9\,\mathrm{m^2/s}\ .$$

6.1.2 Legge di gravitazione universale

Le leggi empiriche di Kepler possono essere dedotte a partire dalla *legge di gravitazione universale* enunciata da Newton:

> *Ogni corpo nell'Universo attira ogni altro corpo mediante una forza a distanza il cui modulo è direttamente proporzionale al prodotto delle due massa ed inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza.*

Dati i due corpi di masse m_1 ed m_2 e distanza r_{12}, la forza $\boldsymbol{F}_{21}$ con cui la prima attira la seconda è:

$$\boldsymbol{F}_{21} = G m_1 m_2 \frac{\boldsymbol{r}_{21}}{r_{21}^3} \ , \tag{6.3}$$

ove $\boldsymbol{r}_{21}$ è il vettore diretto dal corpo 2 al corpo 1, il modulo della forza precedente è

$$F_{21} = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \ ,$$

ove r è il modulo di $\boldsymbol{r}_{21}$ e G è la costante di proporzionalità il cui valore è

$$G = 6.674 \cdot 10^{-11} \, \mathrm{N\, m^2/kg^2} \ .$$

Usando la legge di gravitazione universale (6.3) è possibile dimostrare le tre leggi di Kepler e in particolare determinare la costante κ che compare nella terza legge (6.2), che quindi si può riscrivere nella forma

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G m_S} a^3 \tag{6.4}$$

ove m_S è la massa del Sole. Poiché la legge di gravitazione è universale, la (6.4) vale per qualsiasi satellite, naturale o artificiale, che ruoti attorno a un corpo celeste: basta sostituire la massa di quest'ultimo alla massa del Sole:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{G m_P} a^3 \ . \tag{6.5}$$

La legge di gravitazione universale vale in particolare sulla superficie dei pianeti e qui rende conto del valore della accelerazione di gravità, si può infatti dimostra che vale

$$a_G = G \frac{m_P}{R_P^2} \tag{6.6}$$

ove m_P e R_P sono la massa e il raggio del pianeta: nel caso particolare della Terra, usando i dati esposti in appendice, si trova

$$g = 9.801 \, \mathrm{m/s^2}$$

che è un valore molto vicino al valore medio.
Ad un'altezza h dalla superficie del pianeta l'accelerazione di gravità è minore di quanto risulta da (6.6), vale infatti

$$a_G(h) = G \frac{m_P}{(R_P + h)^2} \ .$$

Se i satelliti di un corpo celeste di massa m, naturali o artificiali, percorrono orbite circolari, esiste una semplice relazione fra il raggio dell'orbita e la velocità, vale infatti

$$v^2 = G \frac{m}{r} \ . \tag{6.7}$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Si consideri l'interazione gravitazionale fra la Terra e la Luna;

① determinare la forza agente su ciascun corpo e le loro accelerazioni;

② supponendo di scegliere un sistema di riferimento geocentrico, e che l'orbita della Luna attorno alla Terra sia circolare uniforme, determinare il periodo di rivoluzione della Luna attorno alla Terra.

Soluzione

① La forza con cui la Terra attira la Luna è uguale e contraria (per la terza legge di Newton) alla forza con cui la Luna attira la Terra. Il modulo di questa forza è (si vedano le costante necessarie in appendice)

$$F = G\,\frac{m_T m_L}{r_{TL}^2} = 1.983 \cdot 10^{20}\,\mathrm{N}\ .$$

Per trovare le due accelerazioni basta dividere per le rispettive masse:

$$a_T = \frac{F}{m_T} = G\,\frac{m_T}{r_{TL}^2} = 3.319 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m/s^2} \qquad , \qquad a_L = \frac{F}{m_L} = G\,\frac{m_T}{r_{TL}^2} = 2.698 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}\ ;$$

si vede quindi che l'accelerazione della Luna è circa 100 volte piú grande dell'accelerazione della Terra.
② Se l'orbita della Luna è supposta circolare uniforme, l'accelerazione ora determinata è centripeta, si può quindi scrivere

$$a_c = \omega^2 r_{TL} = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r_{TL} \qquad \longrightarrow \qquad T = 2\pi\sqrt{\frac{r_{TL}}{a_c}} = 2.372 \cdot 10^6\,\mathrm{s} = 27.45\,\mathrm{d}\ .$$

Problema 2

Durante un'eclissi di Sole la Luna si trova in un punto della retta congiungente Sole e Terra;

① determinare il rapporto F_T/F_S delle forze esercitate dalla Tera e dal Sole sulla Luna;

② rispondere allo stesso quesito nel caso di eclisse di Luna.

Soluzione

① Nel caso di un'eclissi di Sole la Luna si trova fra il Sole e la Terra quindi la distanza r_{SL} fra il Sole e la luna è uguale alla differenza delle distanze della Terra dal Sole e della Luna dalla Terra (entrambe riportate in appendice) cioè

$$r_{SL} = r_{ST} - r_{TL}\ ;$$

ora

$$F_T = G\,\frac{m_T m_L}{r_{TL}} \qquad , \qquad F_S = G\,\frac{m_S m_L}{r_{SL}}$$

quindi

$$\frac{F_T}{F_S} = \frac{m_T}{m_S}\left(\frac{r_{TS} - r_{TL}}{r_{TL}}\right)^2 = 0.4526\ .$$

② Similmente nel caso di un'eclissi di Luna, la Terra si trova fra il Sole e la Luna e quindi

$$r_{SL} = r_{ST} + r_{TL}\ ;$$

Procedendo come sopra si trova

$$\frac{F_T}{F_S} = \frac{m_T}{m_S}\left(\frac{r_{TS} + r_{TL}}{r_{TL}}\right)^2 = 0.4570\ .$$

Problema 3

Il satellite *Deimos* di Marte percorre un'orbita con ottima approssimazione circolare (l'eccentricità è $e = 0.0005$); sapendo che il raggio dell'orbita è $r = 23459\,\mathrm{km}$ e che il periodo di rivoluzione attorno a Marte è $T = 1\,\mathrm{d}, 6\,\mathrm{h}, 17\,\mathrm{min}, 54.81\,\mathrm{s}$, determinare

① la massa di Marte;

② la velocità orbitale di Deimos.

Soluzione

① Per prima cosa è necessario calcolare il periodo di rivoluzione in secondi; si trova: $T = 109074.81\,\mathrm{s}$; quindi usando la (6.5) si trova

$$m = \frac{4\pi^2}{GT^2}\,r^3 = 6.419 \cdot 10^{23}\,\mathrm{kg}\ .$$

② Usando la (6.7) si trova

$$v = \sqrt{G\,\frac{m_M}{r}} = 1351\,\mathrm{m/s}\ .$$

Problema 4

Si determini distanza dalla superficie terrestre e velocità di un satellite geostazionario che si muova su un'orbita circolare.

Soluzione

Un satellite geostazionario è un satellite che ruota attorno alla Terra trovandosi sempre sopra lo stesso punto della superficie terrestre; cioè che percorre un giro completo nello stesso tempo impiegato adlla Terra a compiere un'intera rotazione su sé stessa; quindi per un satellite geostazionario il periodo è

$$T = 1\,\mathrm{d} = 86400\,\mathrm{s}\ .$$

Ora, usando la (6.5) ponendo la massa della Terra al posto di m_P e il raggio dell'orbita circolare del satellite al posto di a, si trova

$$r = \sqrt[3]{\frac{Gm_T}{4\pi^2}\,T^2} = 4.224 \cdot 10^7\,\mathrm{m}\ ;$$

quindi l'altezza sulla superficie terrestre è

$$h = r - r_T = 3.587 \cdot 10^7\,\mathrm{m}\ .$$

La velocità si determina ricordando che per il moto circolare uniforme vale

$$v = \frac{2\pi r}{T} = 3072\,\mathrm{m/s}\ .$$

6.1.3 Energia potenziale gravitazionale

La forza gravitazionale è una forza centrale e quindi è conservativa; la sua energia potenziale è proporzionale all'inverso della distanza r fra le due masse m_1 ed m_2 interagenti; vale

$$\mathcal{U}_g = -G\,\frac{m_1 m_2}{r}\ .$$

ove si è scelto, come d'uso, di porre uguale a zero l'energia potenziale quando la distanza fra le masse è infinita; con questa scelta l'energia potenziale è uguale al lavoro fatto per avvicinare le due masse in questione dall'infinito alla distanza r.
L'energia totale del sistema è costante, quindi se le due masse sono in movimento con velocità $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$, vale

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}\,m_2 v_2^2 - G\frac{m_1 m_2}{r} = \text{costante}\ .$$

La precedente equazione è particolarmente interessante nel caso si sia scelto un sistema di riferimento solidale a una delle due masse; per esempio si consideri il moto di un corpo di massa m rispetto alla Terra. In questo caso la velocità della Terra è nulla e vale

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}\,mv^2 - G\frac{m_T m}{r} = \text{costante}\ .$$

Se, in particolare, il moto del corpo ha una traiettoria circolare e uniforme attorno alla Terra, vale la (6.7), e quindi

$$\mathcal{E} = -G\frac{m_T m}{2r} = -\frac{1}{2}\,mv^2 = -\mathcal{E}_c\ . \tag{6.8}$$

La velocità necessaria a sfuggire all'attrazione gravitazionale di un corpo celeste è detta *velocità di fuga* v_f; la velocità di fuga da un corpo di massa m e raggio r è

$$v_f = \sqrt{\frac{2Gm}{r}}\ . \tag{6.9}$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Si supponga che un corpo venga lanciato dalla superficie terrestre con una velocità iniziale $v = \sqrt{R_T g}$;

① verificare che la velocità è inferiore alla velocità di fuga;

② determinare l'altezza massima raggiunta.

Soluzione

① Ricordando che l'accelerazione di gravità sulla superficie terrestre è data dalla (6.6), si trova

$$v = \sqrt{r_T\frac{Gm_T}{r_T^2}} = \sqrt{\frac{Gm_T}{r_T}} < v_f\ ,$$

quindi il corpo non sfugge all'attrazione terrestre.
② Sulla superficie terrestre l'energia totale, cioè la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale gravitazionale, vale

$$E = \frac{1}{2}\,mv^2 - G\,\frac{m_T m}{r_T} = -G\,\frac{m_T m}{2r_T}\ .$$

Nel punto di altezza massima il corpo si ferma e quindi la sua energia cinetica è nulla; l'energia totale quindi coincide con l'energia potenziale:

$$E = -G\frac{m_T m}{(r_T + h)}\ ,$$

ove h è la massima altezza raggiunta. Per la conservazione dell'energia queste due equazioni devono coincidere; si trova quindi

$$h = r_T\ .$$

***Problema 2**

Un buco nero ha massa $m = 2 \cdot 10^{30}$ kg; determinare la distanza d dal suo centro alla quale la sua velocità di fuga è uguale alla velocità della luce.

Soluzione Utilizzando l'equazione (6.9) si trova

$$c = \sqrt{\frac{2Gm}{d}} \qquad \longrightarrow \qquad d = \frac{2Gm}{c^2} = 3\,\text{km}\ .$$

Una tale distanza è detta *orizzonte degli eventi* del buco nero.

Problema 3

Il satellite *Teti* di Saturno ha massa $m = 6.18 \cdot 10^{20}$ kg e percorre un'orbita perfettamente circolare di raggio $r = 2.95 \cdot 10^5$ km nel tempo $T = 1.63 \cdot 10^5$ s; determinare l'energia totale del sistema Saturno-Teti.

Soluzione

Basta usare l'equazione (6.8), osservando che $v = \dfrac{2\pi r}{T}$:

$$E = -\frac{1}{2}mv^2 = -\frac{2\pi^2 mr^2}{T^2} = 4.00 \cdot 10^{22}\,\mathrm{J}\ .$$

6.1.4 Esercizi

Leggi di Kepler

✍ **Es. 1** — Dimostrare che il momento angolare L di un satellite di massa m che percorra un'orbita di area S in un tempo T è dato dalla relazione

$$L = \frac{2mS}{T}\ .$$

✍ **Es. 2** — Utilizzando i valori per la distanza media dal Sole e per l'eccentricità presenti in appendice, determinare la distanza L dell'afelio e la distanza ℓ del perielio di Mercurio dal Sole.

✍ **Es. 3** — Il satellite S_1 orbita intorno al suo pianeta lungo una traiettoria circolare di raggio r_1, il satellite S_2 ha un'orbita circolare di raggio $r_2 = 2r_1$; determinare la relazione fra i due periodi di rivoluzione dei satelliti.

Legge di gravitazione universale

✍ **Es. 1** — Due masse m_1 ed m_2 si trovano a distanza r una dall'altra e si attraggono con una forza di modulo F,determinare come cambia F se si dimezzano sia m_1, sia m_2, sia r.

✍ **Es. 2** — Una scialuppa di massa $m = 250\,\mathrm{kg}$ si trova a una distanza $d = 4.5\,\mathrm{m}$ da una grande nave di massa $M = 19000\,\mathrm{t}$; determinare

a) il modulo della forza di attrazione gravitazionale fra le due masse, e l'accelerazione della scialuppa;
b) la distanza d_1 a cui devono trovarsi scialuppa e nave perché l'accelerazione della scialuppa abbia modulo $a_1 = 0.5\,\mathrm{m/s^2}$.

✍ **Es. 3** — Due navi di masse $m_1 = 10^4\,\mathrm{t}$ e$m_2 = 2 \cdot 10^4\,\mathrm{t}$ si trovano alla distanza $d = 30.0\,\mathrm{m}$

a) Determinare il modulo della forza gravitazione con cui si attraggono;
b) Determinare i moduli delle loro accelerazioni.

☞ **Es. 4** — Una stella di massa $M = 1.3 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$ ha un pianeta di massa $m_1 = 3.5 \cdot 10^{24}\,\mathrm{kg}$ che percorre un'orbita circolare il cui periodo di rivoluzione è $T = 318\,\mathrm{d}$; determinare

a) il raggio dell'orbita;
b) la velocità del pianeta;
c) la forza gravitazionale totale subita da un corpo di massa $m_2 = 3.5\,\mathrm{kg}$ che si trovi nel punto medio fra il centro della stella e quello del pianeta.

☞ **Es. 5** — Determinare a quale quota sul livello del mare l'accelerazione di gravità ha modulo $g/2$. Determinare il periodo, espresso in ore, di rivoluzione di un satellite artificiale viene posto in orbita circolare attorno alla Luna con raggio $r = 3.0 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$.

✍ **Es. 6** — Usando la legge (6.4) si determini la massa del Sole e la si confronti con il valore riportato in appendice.

✍ **Es. 7** — Tra l'orbita di Marte e quella di Giove si trova una fascia di piccoli pianeti, detti asteroidi, il piú grande dei quali, *Cerere* si trova a distanza $D = 4.14 \cdot 10^{11}$ m dal Sole; si determini il periodo di rivoluzione di Cerere.

☞ **Es. 8** — Indicando con D la distanza della Luna dalla Terra, determinare la distanza d dalla Terra del punto sul segmento che congiunge i centri della Terra e della Luna in cui un corpo si trova in equilibrio sotto la forza di attrazione gravitazionale dei due corpi celesti.

✍ **Es. 9** — Determinare il periodo T di rivoluzione di un satellite artificiale della Terra posto su un'orbita circolare distante $h = 300$ km dalla superficie terrestre.

✍ **Es. 10** — Quando il modulo lunare LEM dell'Apollo 11 scese sulla Luna nel 1969, trasportando gli astronauti Neil Armstrong e Edwin Aldrin, la parte centrale dell'astronave, sotto la sorveglianza dell'astronauta Michael Collins, rimase attorno alla Luna in orbita circolare di raggio $r = 2100$ km; determinare il periodo di rivoluzione ed esprimerlo in ore.

☞ **Es. 11** — Un pianeta della stella Alfa Centauri ha periodo di rivoluzione $T = 803$ d; sapendo che il raggio della sua orbita circolare è $r = 2.61 \cdot 10^{11}$ m e che il raggio della stella è $R = 854 \cdot 10^3$ km, determinare

a) l'accelerazione di gravità sulla superficie della stella;

b) la massa di Alfa Centauri.

Energia potenziale gravitazionale

☞ **Es. 1** — Uno scienziato ha costruito un razzo che si muove alla velocità costante di modulo $v = 8.5$ km/s; determinare da quale quota al di sopra della superficie terrestre dovrebbe lanciarlo per riuscire a farlo sfuggire all'attrazione della Terra.

✍ **Es. 2** — Un corpo di massa $m = 3.5$ kg che si trova sulla superficie della Luna subisce una forza peso di modulo $F = 5.69$ N; determinare il raggio della Luna.

☞ **Es. 3** — Su un pianeta di massa $m = 3.0 \cdot 10^{23}$ kg l'accelerazione di gravità ha modulo $a_G = 7.3\,\mathrm{m/s^2}$; determinare

a) il raggio del pianeta;

b) la velocità di fuga a una quota $h = 1.2$ km dalla superficie.

✐ **Es. 4** — Sapendo che la velocità di fuga da un buco nero di raggio $r = 1750$ m è uguale alla velocità della luce, determinare

a) l'accelerazione di gravità sulla superficie del buco nero;

b) a quale distanza dal centro del buco nero l'accelerazione di gravità vale g.

☞ **Es. 5** — Un buco nero ha massa $m = 2.75 \cdot 10^{30}$ kg, determinare

a) il raggio del buco nero perché la velocità di fuga sia il doppio della velocità della luce;

b) la distanza al centro a cui la velocità di fuga è uguale alla velocità della luce;

c) l'accelerazione di gravità sulla superficie del buco nero.

☞ **Es. 6** — Il satellite *Io* del pianeta Giove ha massa $m = 8.93 \cdot 10^{22}$ kg e raggio $r = 1822$ km; sapendo che il periodo di rivoluzione attorno a Giove è $T = 1.8$ d, e supponendo che l'orbita percorsa sia una circonferenza, si determini

a) l'accelerazione di gravità sulla sua superficie;
b) la sua velocità di fuga;
c) la sua distanza da Giove;
d) la velocità orbitale;
e) l'energia totale del sistema Giove-Io.

☞ **Es. 7** — L'accelerazione di gravità sulla superficie di un asteroide sferico di diametro $d = 530$ km è $a_G = 0.285\,\mathrm{m/s^2}$; determinare

a) la velocità di fuga dall'asteroide;
b) l'altezza massima raggiunta da un corpo che si stacchi dalla superficie dell'asteroide con una velocità $v = 200\,\mathrm{m/s}$;
c) la velocità w di impatto di un corpo che viene lasciato cadere sulla superficie dell'asteroide da un'altezza $h = 500$ km.

Capitolo 7

Meccanica dei liquidi

Lo studio della meccanica di un liquido, costituito da un numero enorme di punti materiali, gli atomi del liquido, deve rinunciare ad utilizzare il modello della meccanica newtoniana in termini di velocità, accelerazioni e forze agenti per ciascuno di essi; si affida quindi ad una descrizione in termini di grandezze macroscopiche che risultino dal comportamento *medio* degli atomi del liquido in questione.

7.1 Statica dei liquidi

7.1.1 Pressione

Si definisce *densità* di un corpo il rapporto fra la sua massa e il suo volume

$$\rho = \frac{m}{V} \ .$$

Un corpo è detto *omogeneo* se ogni sua parte ha la stessa densità. Se non lo la densità viene definita la densità puntuale considerando la densità di un volume piccolo al tendere a zero del volume in questione.
Si definisce *peso specifico* di un corpo il rapporto fra il modulo della sua forza peso e il volume:

$$P_s = \frac{mg}{V} = \rho g \ .$$

Un liquido si dice *incomprimibile* se la sua densità è costante; cioè se il suo volume non varia qualsiasi sia la forza agente su di esso. I liquidi reali sono, con ottima approssimazione incomprimibili; qui si suppone che siano perfettamente incomprimibili.
Si definisce *pressione* esercitata da una forza $\boldsymbol{F}$ su una superficie il rapporto fra il modulo $F_\perp$ della componente di $\boldsymbol{F}$ perpendicolare alla superficie e l'area S della superficie:

$$p = \frac{F_\perp}{S} \ .$$

La pressione in un punto viene definita al tendere a zero della superficie. L'unità di misura della pressione è il *pascal*, simbolo Pa.
Se un liquido è in equilibrio la sua pressione ha le seguenti proprietà.
La forza esercitata dalla pressione del liquido su ciascuna delle pareti del recipiente che lo contiene è sempre perpendicolare alla parete in questione.
In ogni punto di un liquido la pressione è indipendente dall'orientazione della superficie rispetto alla quale la pressione viene calcolata.
La pressione esercitata dall'atmosfera terrestre dipende dalla latitudine, dalla temperatura dell'aria e dalla quota sul livello del mare; il valore *normale* o *standard* della pressione atmosferica è

$$p_0 = 101325\,\mathrm{Pa} = 1\,\mathrm{atm} = 1013.25\,\mathrm{mbar} \ .$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Un recipiente cubico contiene un litro di spigolo $\ell = 10.0\,\mathrm{cm}$ è riempito di acqua; sapendo che la densità dell'acqua vale $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$; determinare la pressione esercitata dall'acqua sulla base del recipiente.

Soluzione

La pressione è dovuta alla forza peso dell'acqua che preme sulla superficie di base del cubo. Vale quindi

$$p = \frac{mg}{S} \ ;$$

la massa dell'acqua può essere calcolata come il prodotto della densità per il volume:

$$m = \rho V = \rho\ell^3 = \rho S\ell \ ;$$

per la pressione cercata pertanto si trova

$$p = \frac{\rho S\ell g}{S} = \rho\ell g = 981\,\mathrm{Pa} \ .$$

Problema 2

Determinare la forza esercitata dalla pressione atmosferica normale sulla superficie di una mano, supposta di area $S = 1.0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m^2}$

Soluzione

Vale evidentemente

$$F = p_0 S = 1.0 \cdot 10^3\,\mathrm{N} \ .$$

7.1.2 Legge di Stevin

Dati due punti P_1 e P_2 che si trovino all'interno di un liquido di densità ρ in equilibrio e sia h la differenza delle loro profondità, con P_2 piú in basso, allora fra le pressioni nei due punti vale la relazione, detta *legge di Stevin*,

$$p_2 - p_1 = \rho g h \ . \tag{7.1}$$

La legge di Stevin ha alcune immediate conseguenze.

1. Due punti che si trovano alla stessa profondità hanno la stessa pressione.
2. Una variazione di pressione in un punto di un liquido si trasmette integralmente in ogni altro punto del liquido (*legge di Pascal*).
3. Se due o piú vasi in comunicazione fra loro sono riempiti dello stesso liquido, le loro superfici libere si trovano alla stessa altezza (*principio dei vasi comunicanti*).

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Determinare la pressione sul fondo di una piscina piena d'acqua e profonda $h = 10\,\mathrm{m}$.

Soluzione

La superficie libera dell'acqua è in equilibrio con l'atmosfera, quindi la pressione dell'acqua è qui uguale alla pressione atmosferica; la pressione cercata è quindi data da (7.1):

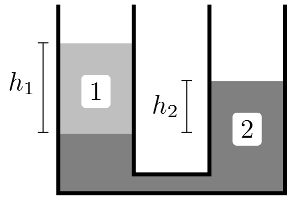
$$p = p_0 + \rho g h = 2.0 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa} \ .$$

Problema 2

Due vasi comunicanti sono riempiti uno con olio di densità $\rho_1 = 850\,\mathrm{kg/m^3}$ e l'altro con acqua di densità $\rho_2 = 1000\,\mathrm{kg/m^2}$; sapendo che i due liquidi non sono mescolabili, e che la superficie libera dell'acqua si trova ad $h_2 = 4.32\,\mathrm{cm}$ dalla superficie di separazione dei due liquidi, determinare l'altezza h_2 della superficie libera dell'olio dalla stessa superficie di separazione.

Soluzione

Con riferimento alla figura, si consideri che le superfici libere dei due liquidi sono entrambe in equilibrio con l'atmosfera e quindi si trovano alla pressione atmosferica p_0; inoltre i due liquidi sono in equilibrio alla loro superficie di separazione e quindi hanno qui la stessa pressione p. Applicando la legge di Stevin (7.1) ad entrambi i liquidi si ottiene pertanto



$$p_0 = p + \rho_1 g h_1 \qquad , \qquad p_0 = p + \rho_2 g h_2 \ ;$$

dal confronto di queste due equazioni si trova

$$\rho_1 g h_1 = p_0 = \rho_2 g h_2 \qquad \longrightarrow \qquad h_1 = \frac{\rho_2}{\rho_1} h_2 = 5.40\,\mathrm{cm} \ .$$

7.1.3 Legge di Archimede

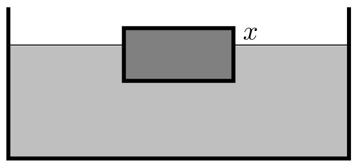
Un corpo immerso in un liquido di densità ρ_l riceve una spinta verso l'alto pari al peso del liquido spostato, cioè al peso di un volume di liquido pari al volume del corpo.

Come conseguenza si ha che un corpo galleggia o affonda a seconda che la sua densità sia rispettivamente minore o maggiore della densità del liquido.

PROBLEMI RISOLTI

***Problema 1**

Un parallelepipedo di densità $\rho = 850\,\mathrm{kg/m^3}$ galleggia in una vasca d'acqua; sapendo che la base S del parallelepipedo è parallela al fondo della vasca e che l'altezza è $h = 40\,\mathrm{cm}$ determinare qual'è la porzione x dell'altezza che emerge dall'acqua.



Soluzione

Poiché il parallelepipedo galleggia, la sua forza peso deve uguagliare la spinta di Archimede; questa, a sua volta, è uguale al peso di una volume di acqua uguale al volume della parte immersa del parallelepipedo. Poiché la porzione immersa è alta $h - x$ il volume della parte immersa è $S(h - x)$; quindi, la spinta di Archimede si trova quindi moltiplicando questo volume per la densità ρ_l dell'acqua per l'accelerazione di gravità:

$$F_A = \rho_l S(h - x)g \ ;$$

questa espressione deve uguagliare il peso del parallelepipedo che si può trovare moltiplicando il suo volume totale Sh per la sua densità per l'accelerazione di gravità; quindi

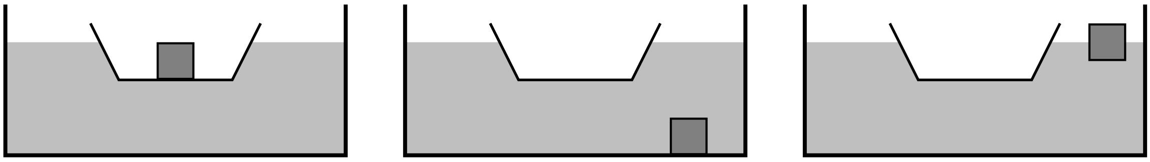
$$\rho_l S(h - x)g = \rho S h g \qquad \longrightarrow \qquad x = \frac{\rho_l - \rho}{\rho_l} h = 6.0\,\mathrm{cm} \ .$$

*__Problema 2__

Una barca di massa M contenente un corpo di massa m e densità ρ in una vasca d'acqua di densità ρ_l; il corpo viene quindi lanciato fuori bordo; stabilire come varia il livello dell'acqua rispetto al bordo della vasca nei casi

① il corpo affonda;

② il corpo galleggia.



Soluzione

① Con riferimento alla figura, nel caso A viene spostato un volume d'acqua V_A sufficiente al galleggiamento della barca e del corpo; vale dunque

$$(m+m)g = V_A \rho_l g \qquad \longrightarrow \qquad V_A = \frac{M+m}{\rho_l} \; .$$

Nel caso B viene spostato un volume d'acqua V_1 sufficiente al galleggiamento della sola barca, piú un volume V_2 uguale al volume del corpo; tali volumi sono dati da

$$Mg = V_2 \rho_l g \quad \longrightarrow \quad V_1 = \frac{M}{\rho_l} \qquad , \qquad V_2 = \frac{m}{\rho}$$

pertanto il volume totale spostato nel caso B è

$$V_B = V_1 + V_2 = \frac{M}{\rho_l} + \frac{m}{\rho} \; .$$

Ora poiché il corpo affonda la sua densità è maggiore di quella dell'acqua e quindi $V_B < V_A$, infatti si ha

$$V_B < V_A \quad \longleftrightarrow \quad \frac{M}{\rho_l} + \frac{m}{\rho} < \frac{M}{\rho_l} + \frac{m}{\rho_l} \quad \longleftrightarrow \quad \frac{m}{\rho} < \frac{m}{\rho_l} \quad \longleftrightarrow \quad \rho > \rho_l \; .$$

Quindi se nel caso B viene spostata meno acqua che nel caso A significa che il livello dell'acqua nella vasca si abbassa.
② Nel caso C viene spostato un volume d'acqua V_3 sufficiente al galleggiamento della sola barca, piú un volume V_4 sufficiente al galleggiamento del corpo; si ha quindi un caso identico al caso A, vale infatti

$$Mg = V_3 \rho_l g \quad \longrightarrow \quad V_3 = \frac{M}{\rho_l} \qquad , \qquad mg = V_4 \rho_l g \quad \longrightarrow \quad V_4 = \frac{m}{\rho_l} \; ;$$

pertanto il volume d'acqua spostato nel caso C è

$$V_C = V_3 + V_4 = \frac{M+m}{\rho_l} = V_A$$

quindi nel caso C il livello d'acqua nella vasca resta invariato.

7.2 Dinamica dei liquidi

Un liquido si dice *perfetto* se è incomprimibile e non viscoso; in questa sezione che si limita a considerare liquidi perfetti il cui moto sia *stazionario* e *irrotazionale*. Si dice stazionario il moto di un liquido in cui la velocità delle molecole che lo compongono dipenda dalla posizione ma non dal tempo; si dice irrotazionale il moto di un liquido che non forma vortici.

7.2.1 Portata e teorema di Bernoulli

Si consideri un liquido che fluisce in un tubo a sia S l'area di una sezione del tubo, e sia ΔV il volume di liquido che fluisce attraverso la sezione nell'intervallo di tempo Δt; si definisce *portata* media del liquido attraverso la sezione in questione il rapporto

$$Q = \frac{\Delta V}{\Delta t} \ .$$

Se il tubo è sufficientemente sottile da poter considerare costante la velocità $\boldsymbol{v}$ in tutti i punti della sezione, indicando con $\boldsymbol{n}$ il versore perpendicolare alla sezione, si può dimostrare che vale

$$Q = S\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} \ .$$

Nel caso particolare in cui la sezione sia perpendicolare alla velocità del liquido, la precedente equazione si semplifica nella

$$Q = Sv \ .$$

Per un liquido incomprimibile la portata è la stessa attraverso qualsiasi sezione (*equazione di continuità*). Per un liquido perfetto in moto stazionario e irrotazionale di densità ρ, vi è una relazione, detta *teorema di Bernoulli*, fra la sua pressione p, il modulo v della sua velocità e la sua quota h; il moto del liquido infatti si svolge il modo tale che in tutti i punti di esso sia costante la quantità

$$p + \rho g h + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{costante} \ .$$

PROBLEMI RISOLTI

Problema 1

Un tubo di gomma per annaffiare un giardino ha diametro $d_1 = 1.5\,\mathrm{cm}$ e viene tenuto orizzontale ad un'altezza $h = 1.2\,\mathrm{m}$ da terra; il tubo finisce con un erogatore avente diametro $d_2 = 2\,\mathrm{mm}$; sapendo che nel tubo scorre acqua con una velocità di modulo $v_1 = 1.7\,\mathrm{m/s}$ determinare la gittata dell'acqua.

Soluzione

Poiché la portata ha lo stesso valore all'interno del tubo e all'erogatore, vale la relazione

$$\frac{\pi}{4} d_1^2 v_1 = \frac{\pi}{4} d_2^2 v_2 \qquad \longrightarrow \qquad v_2 = \frac{d_1^2}{d_2^2} v_1 \ .$$

A questo punto le equazioni del moto del getto d'acqua sono

$$\begin{cases} x(t) = v_2 t \\ t(t) = h - \dfrac{1}{2} g t^2 \ , \end{cases}$$

il getto d'acqua quindi arriva a terra quando $y = 0$, cioè all'istante

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

e quindi la gittata richiesta è

$$G = v_2 t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \frac{d_1^2}{d_2^2} v_1 = 28\,\mathrm{m} \ .$$

Problema 2

Un fiume, in punto in un cui è largo $d_1 = 12\,\mathrm{m}$ e profondo $h_1 = 3.5\,\mathrm{m}$, riceve l'acqua di un affluente largo $d_2 = 4.5\,\mathrm{m}$ e profondo $h_2 = 1.7\,\mathrm{m}$; sapendo che prima della confluenza i moduli delle velocità dei due corsi d'acqua sono rispettivamente $v_1 = 3.2\,\mathrm{m/s}$ e $v_2 = 1.8\,\mathrm{m/s}$ e che dopo la confluenza le dimensioni del letto del fiume restano invariate, determinare il modulo v della velocità dell'acqua del fiume dopo la confluenza.

Soluzione

La portata prima e dopo la confluenza è uguale; si ha quindi

$$h_1 d_1 v_1 + h_2 v_2 v_2 = h_1 d_1 v \qquad \longrightarrow \qquad v = v_1 + \frac{h_2 v_2}{h_1 v_1} v_2 = 3.5\,\mathrm{m/s}\ .$$

Problema 3

In un tubo orizzontale di sezione S_1 che ha una strozzatura che ne riduce il raggio alla metà, viene fatta scorrere acqua alla velocità di modulo $v_1 = 4.2\,\mathrm{m/s}$; determinare

① il modulo v_2 della velocità nella strozzatura;

② la differenza di pressione fra tubo e strozzatura.

Soluzione

① Se la strozzatura ha il raggio metà del raggio del tubo, la sezione della strozzatura è un quarto della sezione del tubo; quindi per la costanza della portata si ha

$$v_1 S_1 = v_2 S_2 = \frac{1}{4} v_2 S_1 \qquad \longrightarrow \qquad v_2 = 4v_1 = 16.8\,\mathrm{m/s}\ .$$

② Nel caso presente il teorema di Bernoulli si scrive nella forma

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

e quindi

$$p_1 - p_2 = \frac{1}{2}\rho(v_2^2 - v_1^2) = \frac{15}{2}\rho v_1^2 = 1.3 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\ .$$

Problema 4

Da una botte cilindrica di raggio $r_1 = 40\,\mathrm{cm}$ viene spillato il vino per mezzo di un rubinetto che si trova $h = 80\,\mathrm{cm}$ piú in basso della superficie libera del vino; determinare il modulo della velocità di uscita del vino dal rubinetto.

Soluzione Il vino che esce dal rubinetto e il vino sulla superficie libera nella botte sono in equilibrio con l'atmosfera e quindi la pressione del vino nei due casi è uguale alla pressione atmosferica; inoltre, supponendo che la discesa del vino all'interno della botte sia molto lenta, è possibile trascurare la velocità della superficie libera; in questo caso, quindi, la legge di Bernoulli diviene

$$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v^2 \qquad \longrightarrow \qquad v = \sqrt{2gh} = 4.0\,\mathrm{m/s}\ .$$

Si noti che la velocità di uscita è quella che si avrebbe se il vino cadesse liberamente dall'altezza h.

7.2.2 Esercizi

PRESSIONE

✍ **Es. 1** — Un uomo di massa $m = 65\,\mathrm{kg}$ è in piedi sulla neve; sapendo che la neve sopporta senza cedere una pressione totale, inclusa la pressione atmosferica, $p = 1.1 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$; stabilire se l'uomo affonda nella neve indossando

a) due scarponi ciascuno di massa $m_1 = 0.75\,\mathrm{kg}$ con suole di area $S_1 = 2.0\,\mathrm{dm}^2$;

b) due sci ciascuno di massa $m_2 = 1.0\,\mathrm{kg}$ di superficie $S_2 = 16\,\mathrm{dm}^2$.

☞ **Es. 2** — Due superfici semisferiche di raggio $r = 20\,\mathrm{cm}$ sono accostate in modo da ricostruire la sfera; quindi dall'interno della sfera si toglie tutta l'aria facendo il vuoto; determinare il modulo della forza necessaria a separare il due semisfere.

☞ **Es. 3** — I quattro pneumatici di un'automobile sono gonfiati con una pressione relativa (cioè la pressione interna meno la pressione atmosferica esterna) $p = 250\,\mathrm{kPa}$; sapendo che la superficie di appoggio di ciascun pneumatico ha area $S = 200\,\mathrm{cm}^2$, determinare la massa dell'automobile.

✐ **Es. 4** — Un cilindro è tenuto appeso con il pistone, di massa trascurabile e area $S = 24\,\mathrm{cm}^2$, verso il basso; al pistone è appeso un carico di massa $m = 5.4\,\mathrm{kg}$; all'interno del cilindro una pompa mantiene una pressione costante p minore della pressione atmosferica esterna; sapendo che il pistone scende percorrendo $d = 20\,\mathrm{cm}$ in $t = 4.2\,\mathrm{s}$, determinare la pressione interna al cilindro.

Legge di Stevin

✍ **Es. 1** — Sapendo che la densità del sangue è $\rho = 1060\,\mathrm{kg/m}^3$, determinare la pressione minima con cui il cuore deve pompare il sangue per farlo arrivare al cervello che si trova $h = 450\,\mathrm{mm}$ piú in alto.

✍ **Es. 2** — Supponendo che l'aria si possa considerare un liquido perfetto di densità $\rho = 1.2\,\mathrm{kg/m}^3$ determinare a che altezza dal livello del mare la pressione atmosferica vale $p = 0.8p_0$.

✍ **Es. 3** — Una pompa aspira dell'acqua lungo un tubo verticale; determinare la massima altezza che può raggiungere l'acqua.

✍ **Es. 4** — Un sottomarino si trova ad $h = 180\,\mathrm{m} =$ di profondità sotto il livello del mare; il suo portello circolare ha raggio $r = 56.0\,\mathrm{cm}$; sapendo che l'acqua marina ha densità $\rho = 1025\,\mathrm{kg/m}^3$; determinare la forza totale esercitata sul portello, nei seguenti casi:

a) la pressione all'interno del sottomarino è trascurabile;

b) la pressione dell'aria all'interno è uguale a quella atmosferica.

✍ **Es. 5** — Un orologio subacqueo di superficie $S = 3.5\,\mathrm{cm}^2$ può sopportare una forza massima di modulo $F = 375\,\mathrm{N}$; sapendo che la densità dell'acqua di mare è $\rho = 1025\,\mathrm{kg/m}^3$, determinare la profondità alla quale può essere portato senza venire schiacciato.

☞ **Es. 6** — Un cubo di ferro cavo di spigolo $\ell = 35\,\mathrm{cm}$ è pieno d'aria a pressione atmosferica; esso viene spinto sott'acqua, in mare, fino a una profondità $h = 23\,\mathrm{m}$ ove implode; sapendo che la densità dell'acqua marina è $\rho = 1025\,\mathrm{kg/m}^3$, determinare

a) il modulo della forza esterna agente su ciascuna parete del cubo;

b) il modulo della forza totale agente su ciascuna parete del cubo;

c) la profondità H a cui sarebbe potuto arrivare il cubo se la sua pressione interna fosse stata $p = 3p_0$.

☞ **Es. 7** — La superficie del mar Morto, la cui acqua ha densità $\rho = 1240\,\mathrm{kg/m}^3$, si trova ad $h_1 = 423\,\mathrm{m}$ sotto il livello del mare; considerando l'aria come un liquido perfetto di densità $\rho_1 = 1.2\,\mathrm{kg/m}^3$; determinare la pressione alla profondità $h = 20\,\mathrm{m}$ sotto la superficie del mar Morto.

☞ **Es. 8** — Una barca ha un foro circolare di raggio $r = 5.0\,\mathrm{cm}$ posto alla profondità $h = 1.2\,\mathrm{m}$ sotto il livello dell'acqua; la falla è chiusa da un tappo; sapendo che la pressione all'interno della barca è quella atmosferica, determinare

a) il modulo della forza che il tappo deve essere in grado di sopportare;

b) come cambia il modulo di tale forza se il foro avesse raggio doppio.

☞ **Es. 9** — Due vasi cilindrici di superficie di base $S = 450\,\mathrm{cm}^2$, posati sullo stesso piano orizzontale, contengono acqua alle diverse altezze $h_1 = 20\,\mathrm{cm}$ e $h_2 = 30\,\mathrm{cm}$; una volta messi in comunicazione l'acqua passa da un vaso all'altro fino a che le due altezza diventano uguali; determinare il lavoro fatto dalla forza peso.

Legge di Archimede

✍ **Es. 1** — Un'asse di legno di volume $V = 0.03\,\mathrm{m}^3$ e densità $\rho = 687\,\mathrm{kg/m}^3$ galleggia in acqua di mare ($\rho_l = 1025\,\mathrm{kg/m}^3$; determinare

a) il volume V_i della parte immersa;

b) la massa che si deve porre sull'asse perché sia completamente immersa.

✍ **Es. 2** — Un tronco di volume V è immerso per l'80% in acqua salata di densità $\rho_l = 1030\,\mathrm{kg/m}^3$; determinare

a) la densità del tronco;

b) la percentuale del volume che sarebbe immersa se il liquido fosse mercurio, la cui densità è $\rho_{Hg} = 13600\,\mathrm{kg/m}^3$.

✍ **Es. 3** — Su una zattera di legno ha massa $m_1 = 500\,\mathrm{kg}$ e densità $\rho = 720\,\mathrm{kg/m}^3$ salgono tre persone aventi massa totale $M_2 = 180\,\mathrm{kg}$; determinare il volume emerso della zattera.

☞ **Es. 4** — Un cilindro di legno è fissato sul fondo di un lago con una corda; un sommozzatore recide la corda e osserva che il cilindro sale con un'accelerazione di modulo $a = 2.0\,\mathrm{m/s}^2$; determinare

a) la densità ρ_1 cilindro;

b) il modulo dell'accelerazione se la densità del cilindro fosse $\rho_2 = 800\,\mathrm{kg/m}^3$.

☞ **Es. 5** — Un corpo di legno di massa $m = 14\,\mathrm{kg}$ e densità $\rho = 720\,\mathrm{kg/m}^3$ è immerso interamente in acqua, legato al fondo da una corda; determinare

a) il modulo della tensione della corda;

b) l'accelerazione di salita se la corda viene recisa.

☞ **Es. 6** — Una persona di massa $m = 81\,\mathrm{kg}$ e volume $V = 89\,\mathrm{l}$ galleggia in acqua di mare di densità $\rho_l = 1030\,\mathrm{kg/m}^3$; determinare

a) il volume emerso V_e;

b) il modulo della forza con cui deve essere spinto verso l'alto perché il volume emerso aumenti di $\Delta V = 1.8\,\mathrm{l}$.

☞ **Es. 7** — Un iceberg ha volume emerso $V_e = 1.6 \cdot 10^4\,\mathrm{m}^3$; sapendo che la densità del ghiaccio è $\rho_g = 920\,\mathrm{kg/m}^3$, mentre quella dell'acqua di mare è $\rho_l = 1025\,\mathrm{kg/m}^2$, determinare il volume totale dell'iceberg.

☞ **Es. 8** — Una nave di massa $m = 9700\,\mathrm{t}$ naviga inizialmente in mare la cui acqua ha densità $\rho_1 = 1030\,\mathrm{kg/m}^3$, entra quindi in un fiume la cui acqua ha densità $\rho_2 = 1000\,\mathrm{kg/m}^3$;

a) stabilire se la linea di galleggiamento si alza o si abbassa;

b) calcolare il volume immerso della nave nei due casi.

☞ **Es. 9** — Una barca di massa m_1, passando da acqua di mare, di densità $\rho_1 = 1025\,\mathrm{kg/m}^3$ ad acqua dolce, di densità $\rho_2 = 1000\,\mathrm{kg/m}^3$, affonda leggermente; se dalla barca viene gettata una zavorra di massa $m_2 = 50\,\mathrm{kg}$ essa ritorna al livello iniziale; determinare la massa iniziale della barca.

☞ **Es. 10** — Un blocco di ferro avente massa $m = 800\,\mathrm{g}$ e densità $\rho = 7874\,\mathrm{kg/m^3}$ contiene una cavità; se immerso in acqua ha una diminuzione di peso di modulo $\Delta P = 1.6\,\mathrm{N}$; determinare il volume della cavità.

✐ **Es. 11** — Una corona di massa $m_1 = 500\,\mathrm{g}$ è fatta di una lega di oro, di densità $\rho_{Au} = 19320\,\mathrm{kg/m^3}$, e argento, di densità $\rho_{Ag} = 10490\,\mathrm{kg/m^3}$; se pesata mentre è immersa in acqua risulta una massa $m_2 = 470\,\mathrm{g}$; determinare la massa m dell'oro presente nella corona.

✐ **Es. 12** — In un recipiente cilindrico di sezione $S = 0.05\,\mathrm{m^2}$ contiene acqua; determinare di quanto varia la pressione sul fondo del recipiente quando nell'acqua viene posto un blocco di legno di massa $m = 2.4\,\mathrm{kg}$.

✐ **Es. 13** — Un cubetto di ghiaccio galleggia nell'acqua di un recipiente; stabilire se il livello dell'acqua nel recipiente aumenta, diminuisce o resta invariato quando il cubetto si è sciolto completamente.

✐ **Es. 14** — Una piscina è riempita di un liquido ignoto; una misura di pressione effettuata a profondità $h = 2.0\,\mathrm{m}$ dà il valore $p = 117960\,\mathrm{Pa}$; una persona di massa $m = 70\,\mathrm{kg}$ e densità $\rho = 920\,\mathrm{kg/m^3}$ si immerge nel liquido; determinare il modulo dell'accelerazione con cui la persona va a fondo.

Portata e teorema di Bernoulli

☞ **Es. 1** — In un edificio l'acqua scorre al primo piano, in un tubo di diametro $d_1 = 6.0\,\mathrm{cm}$, con velocità di modulo $v_1 = 45\,\mathrm{cm/s}$ alla pressione $p = 50\,\mathrm{kPa}$; al piano superiore, che si trova $h = 4.2\,\mathrm{m}$ più in alto, vi è un tubo di diametro $d_2 = 2.0\,\mathrm{cm}$; determinare la pressione e il modulo della velocità con cui l'acqua esce dai rubinetti del secondo piano.

☞ **Es. 2** — Un bacino d'acqua è trattenuto da una diga; alla profondità $h = 3.5\,\mathrm{m}$ si trova un tubo orizzontale che attraversa la diga di sezione $S = 0.12\,\mathrm{m^2}$ con un tappo sul fondo;

a) determinare la forza che deve esercitare il tappo per trattenere l'acqua;
b) se il tappo viene rimosso quale volume d'acqua fuoriesce nel tempo $t = 5\,\mathrm{min}$.

☞ **Es. 3** — Una piscina di volume $V = 320\,\mathrm{m^3}$ viene riempita per mezzo di un tubo di gomma di raggio $r = 1.5\,\mathrm{cm}$; sapendo che la velocità dell'acqua nel tubo ha modulo $v = 2.8\,\mathrm{m/s}$, determinare il tempo impiegato a riempire la piscina.

☞ **Es. 4** — Un tubo di gomma per irrigazione posto a terra ha un forellino da cui fuoriesce uno zampillo d'acqua che raggiunge l'altezza $h = 32.0\,\mathrm{cm}$; sapendo che all'interno del tubo l'acqua scorre con velocità di modulo $v = 1.50\,\mathrm{m/s}$, determinare la pressione all'interno del tubo.

☞ **Es. 5** — Una fontana è costituita da un recipiente in cui è contenuta dell'acqua la cui superficie libera è mantenuta all'altezza $h_1 = 100\,\mathrm{cm}$ dal suolo; l'acqua fuoriesce da recipiente attraverso un foro praticato sulla parete del recipiente a $h_2 = 75\,\mathrm{cm}$, dal suolo; determinare

a) la distanza a cui lo zampillo arriva a terra;
b) quanto deve valere h_2 perché tale distanza sia massima.

☞ **Es. 6** — Due tubi orizzontali aventi diametro $d_1 = 2.8\,\mathrm{cm}$ e $d_2 = 1.6\,\mathrm{cm}$ sono connessi fra loro; sapendo che la differenza di pressione fra i due tubi è $\Delta p = 7.5\,\mathrm{kPa}$, determinare la velocità dell'acqua nei due tubi.

✐ **Es. 7** — Durante un uragano con vento alla velocità di modulo $v = 120\,\mathrm{km/h}$ un tetto viene divelto dalla differenza di pressione, fra interno ed esterno Δp; se la superficie del tetto è $S = 50\,\mathrm{m^2}$; considerando l'aria come in liquido incomprimibile di densità $\rho = 1.2\,\mathrm{kg/m^3}$, determinare il modulo della forza che ha agito sul tetto.

Appendice A

Risposte degli esercizi proposti

Moto rettilineo uniforme

1. a) $x(t) = 23t - 92.5$; b) $x(12) = 183.5\,\mathrm{m}$

2. a) $v_A = \dfrac{100}{t_A} = 10.1\,\mathrm{m/s}$, $v_B = \dfrac{100}{t_B} = 9.95\,\mathrm{m/s}$; b) $d = 100 - \left(1 - \dfrac{t_A}{t_B}\right) = 0.60\,\mathrm{m}$.

3. a) $x(t) = x_1 + \dfrac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}(t - t_1) = 8.4t - 14$; b) $t = (100 - x_1)\dfrac{t_2 - t_1}{x_2 - x_1} + t_1 = 14\,\mathrm{s}$.

4. $d = 400\left(1 - \dfrac{v_B}{v_A}\right) = 62.2\,\mathrm{m}$.

5. a) $x(t) = 42.0t - 1160$; b) $x(0) = -1160\,\mathrm{m}$.

6. $x = \dfrac{d_A - d_b}{v_l - v_s}\, v_s = 0.011\,\mathrm{m}$.

7. a) $t = 0.76\,\mathrm{s}$; b) $d = |x_1(1) - x_2(1)| = 26\,\mathrm{m}$.

8. $x = \left(1 - \dfrac{v_2}{v_1}\right) d = 500\,\mathrm{m}$.

9. a) $v_1 = 9.1\,\mathrm{m/s}, v_2 = 9.75\,\mathrm{m/s}, v_3 = 9.80\,\mathrm{m/s}, v_4 = 9.85\,\mathrm{m/s}$;
b) $t = 100\left(\dfrac{1}{v_1} + \dfrac{1}{v_2} + \dfrac{1}{v_3} + \dfrac{1}{v_4}\right) = 41.6\,\mathrm{s}$.

10. a) $x_A(t) = v_A t$, $x_T(t) = x_0 + v_T t$; b) Achille, $x_T = \dfrac{v_A}{v_A - v_T}\, x_0 = 99.1\,\mathrm{m}$;
c) $D = 100\, \dfrac{v_A - v_T}{v_A} = 99.9\,\mathrm{m}$.

11. $t = \dfrac{D - d}{v_B - v_A} = 89.5\,\mathrm{s}$

12. a) $x_A(t) = v_A = 27.8\,t$; b) $d_1 = v_A = 25\,\mathrm{km}$; c) $t_2 = \dfrac{d_2}{v_A} = 864\,\mathrm{s}$; d) $t_3 = \dfrac{D}{v_A + v_B} = 1869\,\mathrm{s}$;
e) $d = D - v_B t_3 = 57\,\mathrm{km}$.

13. a) $t_1 = \dfrac{v_V}{v_V - v_A}\, t_0 = 381\,\mathrm{s}$; b) $d_V = (t_1 - t_0)v_V = 8917\,\mathrm{m}$, $d_A = (t_1 - t_0)v_A = 7511\,\mathrm{m}$.

14. $D = \dfrac{v_M}{v_B}\, d = 640\,\mathrm{m}$.

Moto uniformemente accelerato

1. a) $d_1 = \dfrac{1}{2}\,at_1^2 = 18.9\,\mathrm{m}$; b) $t = \sqrt{\dfrac{2d_2}{a}} = 4.87\,\mathrm{s}$, $v_2 = \sqrt{2d_2a} = 20.5\,\mathrm{m/s}$; c) $d = \dfrac{v_3^2}{2a} = 190\,\mathrm{m}$.

2. a) $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 6.1\,\mathrm{s}$, $v = gt = \sqrt{2gh} = 18\,\mathrm{m/s}$; b) $v_0 = \dfrac{h}{t_1} - \dfrac{1}{2}\,gt_1 = 17.93\,\mathrm{m/s}$; c) la zavorra deve essere lanciata verso l'alto con velocità $v_0 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{h}{t_2}\,gt_2 = 8.6\,\mathrm{m/s}$.

3. a) $a = \dfrac{v^2}{2\cdot 40} = 2.11\,\mathrm{m/s^2}$, $t = \dfrac{2\cdot 40 + 60}{v} = 10.8\,\mathrm{s}$; b) $v_m = \dfrac{100}{t} = 9.28\,\mathrm{m/s}$;
c) $a = \dfrac{2\cdot 100}{t^2} = 1.90\,\mathrm{m/s^2}$.

4. Il tempo impiegato a fermarsi è $t = \dfrac{2s}{v_0} = 4\,\mathrm{s}$, quindi si salva.

5. a) Lo spazio di frenata del primo treno è $\Delta x_1 = \dfrac{v_1^2}{2a} = 181\,\mathrm{m}$, mentre quello del secondo treno è $\Delta x_2 = \dfrac{v_2^2}{2a} = 253\,\mathrm{m}$, quindi i due treni si scontrano; b) la distanza minima è $\Delta x_1 + \Delta x_2 = 434\,\mathrm{m}$; c) l'istante dello scontro è $t = \dfrac{v_1 + v_2 - \sqrt{(v_1+v_2)^2 - 4ad}}{2a} = 7.61\,\mathrm{s}$, le due velocità a quest'istante sono $v_1(t) = v_1 - at = 7.56\,\mathrm{m/s}$, $v_2(t) = v_2 - at = 14.6\,\mathrm{m/s}$.

6. a) $t = \dfrac{v_0}{a} = 6.5\,\mathrm{s}$, $d = D - \dfrac{v_0^2}{2a} = 54\,\mathrm{cm}$; b) $a = \dfrac{v_0^2}{2s} = 1.4\,\mathrm{m/s^2}$.

7. a) $t = \dfrac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2gh}}{g} = 1.7\,\mathrm{s}$, $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 14\,\mathrm{m/s}$; b) Lo spazio percorso è quello di salita fino al punto di massima altezza piú quello di discesa da tale punto massimo all'acqua, quindi $v_m = \dfrac{v_0^2 + gh}{gt} = 6.1\,\mathrm{m/s}$.

8. a) Deve spingersi verso l'alto con $v_0 = \dfrac{gt^2 - 2h}{2t} = 1.7\,\mathrm{m/s}$; b) $v_0 = \sqrt{v^2 - 2gh} = 4.8\,\mathrm{m/s}$ verso l'alto o verso il basso, $t_1 = \dfrac{v + \sqrt{v^2 - 2gh}}{g} = 1.6\,\mathrm{s}$.

9. a) l'istante in cui la freccia colpisce Batman è dato dalla minore delle soluzioni dell'equazione di secondo grado $gt^2 - 2(v_0 - v)t + 2g = 0$ la quale, con i dati forniti, ha discriminante negativo; b) $v_{0,min} = v + \sqrt{2gh} = 16\,\mathrm{m/s}$.

10. a) $t = \dfrac{H}{v_0} = 0.73\,\mathrm{s}$, $h = H - \dfrac{gH^2}{2v_0^2} = 3.4\,\mathrm{m}$; b) $t_{MAX} = \dfrac{v_0}{g} = 0.84\,\mathrm{s}$, quindi l'urto avviene prima;
c) $t = \dfrac{H}{v_0 + v} = 0.63\,\mathrm{s}$, $h = H - \dfrac{v}{v_0 + v}\,H - \dfrac{gH^2}{2(v_0+v)^2}$.

11. a) $t = \dfrac{2x_1 + x_2 + 2x_3}{v} = 34\,\mathrm{s}$; b) $v_1 = \dfrac{x_1 + x_2 + x_3}{2x_1 + x_2 + 2x_3}\,v = 110\,\mathrm{m/s}$.

12. $h = \dfrac{v_s^2 + v_s gt - \sqrt{v_s^4 + 2v_s^3 gt}}{g} = 267\,\mathrm{m}$.

13. $t = \sqrt{\dfrac{2d}{a}} = 4.3\,\mathrm{s}$; $v = \sqrt{2da} = 5.1\,\mathrm{m/s}$.

14. $a = \dfrac{2}{d}\, v_{\scriptscriptstyle A}(v_{\scriptscriptstyle A} - v_{\scriptscriptstyle M}) = 0.37\,\mathrm{m/s^2}$.

15. $a = 2\dfrac{d}{t^2} - 2\dfrac{v_0}{t} = 0.597\,\mathrm{m/s^2}$; $v(t) = v_0 + at = 8.52\,\mathrm{m/s}$.

17. $a = \dfrac{v^2 - v_0^2}{2d} = 7.31\,\mathrm{m/s^2}$; $t = \dfrac{2d}{v_0 + v} = 5.40\,\mathrm{s}$.

18. $D = \dfrac{v_0}{2a}(v_0 + 2at_r) = 41\,\mathrm{m}$.

19. $v(t) = 3 - 3t^2$.

20. Il punto materiale raggiunge tale altezza due volte: salendo e scendendo; il che avviene rispettivamente agli istanti $t_{1,2} = \dfrac{v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$ con $t_1 = 1.08\,\mathrm{s}$ e $t_2 = 2.88\,\mathrm{s}$; in tali istanti la velocità ha lo stesso valore e vale $v(t_1) = v(t_2) = \sqrt{v_0^2 - 2gh} = 8.84\,\mathrm{m/s}$.

21. $t = \dfrac{2v_0 - gt_r}{v_0 - dt_r} t_r = 3.1\,\mathrm{s}$; $h = H - \dfrac{1}{2}gt^2 = 2.5\,\mathrm{m}$.

22. $H = \dfrac{1}{8gt^2}(2h + gt^2)^2 = 1.5\,\mathrm{m}$.

23. $t = \dfrac{s}{g\tau} - \dfrac{\tau}{2} = 3.83\,\mathrm{s}$.

24. a) $\Delta t = \tau = 0.2\,\mathrm{s}$; b) $h = \dfrac{1}{2}\tau g \left(2\sqrt{\dfrac{2h}{g}} - 3\tau\right) = 1.6\,\mathrm{m}$.

Vettori

1. Sono scalari: tempo, lunghezza, età e temperatura; sono vettoriali: velocità e accelerazione.

2. $\|\boldsymbol{w}\| = 12.5/3$; la direzione è la stessa di $\boldsymbol{v}$, il verso è opposto.

3. $\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{13}$, $\alpha_u = 34°$, $\|\boldsymbol{v}\| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$, $\alpha_v = 117°$, $\|\boldsymbol{w}\| = 2$, $\alpha_v = 270°$; $\boldsymbol{z}\left(\dfrac{5}{2}, 1\right)$.

4. a) vera; b) falsa.

5. $\boldsymbol{a} = (4, 2)$, $\boldsymbol{b} = (4, -2)$, $\boldsymbol{c} = (-4, 2)$; $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{c}\| = 2\sqrt{5}$.

6. La risposta corretta è la c).

7. $\|\boldsymbol{a}\| = 24$, stesso verso; $\|\boldsymbol{b}\| = 10$, verso opposto.

8. $\|\boldsymbol{a}\| = 16$, stesso verso di $\boldsymbol{v}_1$; $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$.

9. a) nessuna soluzione; b) $\|\boldsymbol{v}_2\| = \dfrac{27}{2}$; c) $\|\boldsymbol{v}_2\| = \dfrac{97}{4}$; stesso verso di $\boldsymbol{v}_2$.

10. a) $\|\boldsymbol{w}\| = 10$; b) $\|\boldsymbol{w}\| = 10$; c) $\|\boldsymbol{w}\| = 10$.

11. I due vettori sono proporzionali, valendo $\boldsymbol{v} = -4\boldsymbol{u}$; quindi $\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} \times (4\boldsymbol{u}) = 4(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{0}$.

12. $\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = (-1, 2, 1)$; $\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u} = (2, -3, -2)$; $\boldsymbol{u} \cdot (\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w}) = \boldsymbol{v} \cdot (\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u}) = 1$.

Moto parabolico

1. a) $G = \dfrac{2v_{0x}v_{0y}}{g} = 300\,\mathrm{m}$; b) $h = \dfrac{v_{0y}^2}{2g} = 90\,\mathrm{m}$; c) $v = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = 55\,\mathrm{m/s}$.

2. a) $v_0 = \sqrt{\dfrac{2}{3\sqrt{3}}gD} = 23.8\,\mathrm{m/s}$; b) $h_M = \dfrac{v_0^2}{8g} = \dfrac{D}{12\sqrt{3}} = 7.22\,\mathrm{m}$.

3. a) $h = \dfrac{gD^2}{2v_0^2} = 78\,\mathrm{cm}$; b) $t = \dfrac{D}{v_0} = 0.40\,\mathrm{s}$; c) $v = 4.0\,\mathrm{m/s}$.

4. a) $v_{0y} = \dfrac{hv_{0x}}{D} + \dfrac{gD}{2v_{0x}} = 8.9\,\mathrm{m/s}$; b) $\alpha = \operatorname{arctg}\dfrac{v_{0y}}{v_{0x}} = 41.7°$.

5. a) $D = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}v_0 = 7095\,\mathrm{m}$; b) $v^* = \sqrt{v_0^2 + g^2\dfrac{D^2}{v_0^2}} = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 384\,\mathrm{m/s}$; c) $D = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}(v_0 - v_V) = 6563\,\mathrm{m}$; $v^* = \sqrt{(v_0 - v_V)^2 + 2gh} = 375\,\mathrm{m/s}$.

6. a) il motociclista riesce a saltare il fosso; b) $d = v_0\sqrt{\dfrac{2h}{g}} - D = 1.4\,\mathrm{m}$; c) $v_m = D\sqrt{\dfrac{g}{2h}} = 9.9\,\mathrm{m/s}$.

7. a) $x = \sqrt{\dfrac{2hv^2}{g}} = 33\,\mathrm{m}$; b) $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 3.3\,\mathrm{s}$.

8. a) $d = \dfrac{2\sqrt{2}v_0^2\cos^2\alpha}{g}(1 + \operatorname{tg}\alpha)$; b) $\dfrac{v_0\operatorname{sen}\alpha}{g} = 0.06\,\mathrm{s}$.

9. a) $v = \sqrt{\dfrac{gG}{\operatorname{sen}2\alpha}} = 31\,\mathrm{m/s}$; b) $h = \dfrac{1}{4}G\operatorname{tg}\alpha = 16\,\mathrm{m}$.

10. a) $v_0 = \sqrt{gd} = 50\,\mathrm{m/s}$, $h = \dfrac{1}{2}d\operatorname{sen}\alpha = 88\,\mathrm{m}$.

11. a) $v_0 = \sqrt{\dfrac{gd^2}{2(h + d\operatorname{tg}\alpha - H)\cos^2\alpha}} = 7.0\,\mathrm{m/s}$; b) $h_M = h + \dfrac{v_0^2\operatorname{sen}^2\alpha}{2g} = 3.5\,\mathrm{m}$.

12. a) $h = d\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{gd^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = 12\,\mathrm{m}$; b) il vertice della parabola si ha per $x = \dfrac{v_0^2\operatorname{sen}\alpha\cos\alpha}{g} = 31\,\mathrm{m}$, quindi l'impatto con il muro avviene prima.

13. a) il gradino è dato dal primo intero maggiore di $\dfrac{2hv_0^2}{gb^2}$, quindi si tratta del settimo gradino; b) $t = \sqrt{\dfrac{g}{14h}} = 2\,\mathrm{s}$.

14. $v_0 = \sqrt{\dfrac{gD^2}{2(h + D\operatorname{tg}\alpha)\cos^2\alpha}} = 14\,\mathrm{m/s}$.

Moto circolare uniforme

1. a) $v = \dfrac{2\pi r}{T} = \dfrac{2\pi nr}{t} = 2.1\,\mathrm{m/s}$; b) $a = \dfrac{v^2}{r} = \dfrac{4\pi^2 r}{T^2} = 19\,\mathrm{m/s^2}$; c) $\nu = 1.4\,\mathrm{Hz}$; d) $T = \dfrac{t}{n} = 0.71\,\mathrm{s}$.

2. a) $\omega = 2\pi\nu = 10/\mathrm{s}$, $v = 2\pi\ell\nu = 5.2\,\mathrm{m/s}$; b) $T = \dfrac{1}{\nu} = 0.63\,\mathrm{s}$, $a_c = 4\pi^2\ell\nu^2 = 53\,\mathrm{m/s^2}$.

3. a) $\omega = \sqrt{\dfrac{a_c}{\ell}} = 1.3/\mathrm{s}$, $v = \sqrt{a_c\ell} = 1.1\,\mathrm{m/s}$; b) ω aumenta e v diminuisce, i nuovi valori sono $\omega_1 = 1.4/\mathrm{s}$ e $v_1 = 0.99\,\mathrm{m/s}$.

4. $T = \dfrac{2\pi\ell \operatorname{sen}\alpha}{d}\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = 0.17\,\mathrm{s}$.

5. a) il primo bambino è fermo quindi le sue velocità sono entrambe nulle, $\omega_2 = \omega_3 = 2\pi\nu = 0.63/\mathrm{s}$, $v_2 = 2\pi\nu d_2 = 1.1\,\mathrm{m/s}$, $v_3 = 2\pi\nu d_3 = 1.6\,\mathrm{m/s}$; b) $T_1 = 0\,\mathrm{s}$, $T_2 = T_3 = \dfrac{1}{\nu} = 10\,\mathrm{s}$, $a_{c1} = 0\,\mathrm{m/s^2}$, $a_{c2} = 4\pi^2\nu^2 d_2 = 7.1\,\mathrm{m/s^2}$, $a_{c3} = 4\pi^2\nu^2 d_3 = 9.9\,\mathrm{m/s^2}$.

6. a) $d_1 = \dfrac{a_1}{4\pi^2\nu^2} = 3.8\,\mathrm{m}$, $d_2 = \dfrac{a_2}{4\pi^2\nu^2} = 5.1\,\mathrm{m}$; b) $v_1 = \dfrac{a_1}{2\pi\nu} = 2.4\,\mathrm{m/s}$, $v_2 = \dfrac{a_2}{2\pi\nu} = 3.2\,\mathrm{m/s}$

7. a) $v = \sqrt{a(d+R_T)} = 7200\,\mathrm{m/s}$, $\omega = \sqrt{\dfrac{a}{d+R_T}} = 8.82\cdot 10^{-4}/\mathrm{s}$.

8. a) $r = \dfrac{aT^2}{4\pi^2} = 42200\,\mathrm{km}$; b) $v = \dfrac{aT}{2\pi} = 3070\,\mathrm{m/s}$.

9. $a_c = \dfrac{4\pi^2 r}{T^2} = 2.724\,\mathrm{m/s^2}$.

10. $v = \dfrac{2\pi r}{T} = 2.981\cdot 10^4\,\mathrm{m/s}$, $a = \dfrac{4\pi^2 r}{T^2} = 5.939\cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$.

11. a) $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 9.7\cdot 10^{-4}/\mathrm{s}$, $v = \dfrac{aT}{2\pi} = 1760\,\mathrm{m/s}$; b) $r = \dfrac{aT^2}{4\pi^2} = 1.8\cdot 10^6\,\mathrm{m}$.

12. $v = \dfrac{2\pi\ell}{T} = 1.7\cdot 10^{-2}\,\mathrm{m/s}$; $a_c = \dfrac{4\pi^2\ell}{T^2} = 1.8\,\mathrm{m/s^2}$.

13. $r = \dfrac{aT^2}{4\pi^2} = 9.9\,\mathrm{m}$, $v = \dfrac{aT}{2\pi} = 20\,\mathrm{m/s}$.

14. a) $v = \pi\ell\nu = 50\,\mathrm{m/s}$, $a = 2\pi^2\ell\nu^2 = 6300\,\mathrm{m/s^2}$; b) $\nu = \dfrac{v}{\pi\ell} = 320\,\mathrm{m/s}$; c) la velocità raddoppia.

15. a) $\nu = \sqrt{\dfrac{a_c}{2\pi^2 d}} = 117/\mathrm{min}$; b)n $v = \sqrt{\dfrac{1}{2}\,a_c d} = 12.2\,\mathrm{m/s}$.

16. a) $r = \dfrac{vT}{2\pi} = 8.9\,\mathrm{cm}$; b) $r = \dfrac{aT^2}{4\pi^2} = 51\,\mathrm{cm}$.

Moto armonico

1. a) $T = \dfrac{5.22}{4.25} = 1.23\,\mathrm{s}$; b) $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = 5.12/\mathrm{s}$; c) $v_M = \omega A = 0.21\,\mathrm{m/s}$; d) $a_M = \omega^2 A = \omega v_M = 1.1\,\mathrm{m/s^2}$.

2. a) $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{a}{2d}} = 2.9\,\mathrm{s}$; b) $v = \sqrt{2da} = 0.77\,\mathrm{m/s}$.

3. $A = 0.08\,\mathrm{m}$.

4. a) $T = 1.5\,\mathrm{s}$, $\nu = 0.67\,\mathrm{Hz}$;
b) $v(t) = \dfrac{2\pi A}{T}\operatorname{sen}\left(\dfrac{2\pi}{T}\,t + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0.1\,\mathrm{m/s}$, $a(t) = \dfrac{4\pi^2 A}{T^2}\cos\left(\dfrac{2\pi}{T}\,t + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0\,\mathrm{m/s^2}$.

5. $x(t) = \dfrac{vT}{2\pi} \cos\left(\dfrac{2\pi}{T}\, t + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0.21 \cos\left(1.3t + \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Moti relativi

1. a) $v = v_a + \sqrt{2gh} = 6.4\,\mathrm{m/s}$; b) $a = g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$.

2. La sferetta cade con la stessa accelerazione dell'ascensore; quindi non raggiunge il pavimento.

3. Indicando con T il periodo di rotazione, si trova $g^* = g - \dfrac{4\pi^2}{T^2} R_T = 9.77\,\mathrm{m/s^2}$.

4. a) $v = \sqrt{v_n^2 + v_f^2} = 2.5\,\mathrm{m/s}$;b) $t = \dfrac{d}{v_n} = 320\,\mathrm{s}$; c) $D = d\sqrt{1 + \dfrac{v_f^2}{v_n^2}} = 800\,\mathrm{m}$.

5. Il motoscafo deve muoversi controcorrente in modo che la sua traiettoria formi con la perpendicolare alle rive un angolo $\theta = \operatorname{arcsen} \dfrac{v_f}{v_m} = 29°$.

Legge di Newton

1. $a = \dfrac{F}{m} = 0.54\,\mathrm{m/s}$.

2. $F = \dfrac{mv}{t} = 3.01\,\mathrm{kN}$.

3. $a = \dfrac{F\cos 60°}{m} = \dfrac{F}{2m} = 1.5\,\mathrm{m/s^2}$.

4. Due forze: quella esercitata verso l'alto dal montacarichi e quella esercitata verso il basso dal corpo di massa m_2; la loro risultante non è nulla.

5. $m = \dfrac{F}{v}\, t = 96\,\mathrm{kg}$.

6. a) $F_1 = \dfrac{m}{M + 10m}\, F = 67.3\,\mathrm{N}$; $F_2 = F_1$.

Principio di azione e reazione

1. $a_a = \dfrac{F}{m_a} = 0.71\,\mathrm{m/s^2}$; $a_b = \dfrac{F}{m_b} = 1.9\,\mathrm{m/s^2}$; $d_a = \dfrac{a_a}{a_b} d_b = \dfrac{m_a}{m_b} d_b = 1.1\,\mathrm{cm}$.

2. $m_c = \dfrac{F}{a} - (m_a + m_b) = 8.9\,\mathrm{kg}$; $F_c = m_c a = 4.8\,\mathrm{N}$; $F_b = F_c + m_b a = (m_b + m_c)a = 7.9\,\mathrm{N}$.

3. a) $a_2 = \dfrac{m_1}{m_2}\, a_1 = 1.9\,\mathrm{m/s^2}$; b) le due forza sono uguali.

4. $a_T = \dfrac{m_L}{m_T}\, a_L = 2.698 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m/s^2}$.

5. a) $F_m = (m_1 + m_2)a = 2850\,\mathrm{N}$; b) $F_r = m_2 a = 992\,\mathrm{N}$; c) $F_f = F_m - F_r = 1860\,\mathrm{N}$.

6. a) $a_u = \dfrac{F}{m_1} = 1.2\,\mathrm{m/s^2}$, $a_b = \dfrac{F}{m_2} = 3.7\,\mathrm{m/s^2}$; b) $v_u = \dfrac{F}{m_1} t = 0.3\,\mathrm{m/s}$, $v_b = \dfrac{F}{m_2} t = 1.1\,\mathrm{m/s}$

Forza peso

1. $F = (m_a + m_b)g = 41\,\mathrm{N}$; $F_a = m_b g = 14\,\mathrm{N}$.

2. a) $F = m_2 g = 33\,\mathrm{N}$; b) $N = (m_1 + m_2)g = 86\,\mathrm{N}$.

Piano inclinato

1. a) $H = \dfrac{v_0^2}{2g} = 12.9\,\text{m}$; b) $t_1 = \dfrac{v_0 \ell}{gh} = 1.0\,\text{s}$.

2. a) $t = \dfrac{d}{v} = 2.2\,\text{s}$; b) $\Delta x = d + \dfrac{d^2 g \operatorname{sen}\theta}{2v^2} = 12\,\text{m}$.

3. a) $a = g \operatorname{sen}\alpha - \dfrac{F}{m} = 0.73\,\text{m/s}^2$, $N = mg\cos\alpha = 7300\,\text{N}$; b) $F = mg\operatorname{sen}\alpha = 900\,\text{N}$.

Forza d'attrito radente

1. $\alpha = \operatorname{arctg}\mu_s = 50°$.

2. $\mu_s = \dfrac{a}{g} = 0.21$.

3. a) $\mu_s = \operatorname{cotg}\alpha = 0.78$; b) $a = \dfrac{F}{m}(\cos\alpha - \mu_d \operatorname{sen}\alpha) = 0.17\,\text{m/s}^2$.

4. $F_d = F - \dfrac{mv}{t} = 38\,\text{N}$.

5. a) $v_0 = v - \dfrac{F - F_d}{m} t = 0.75\,\text{m/s}$. b) $v(t_1) = \dfrac{F - F_d}{m} t_1 = 9.8\,\text{m}$.

6. a) $F = F_d = 50\,\text{N}$; b) $F = (m + m_1)\dfrac{v}{t} + F_d = 70\,\text{N}$.

7. $F_a = mg\dfrac{\sqrt{\ell^2 - b^2}}{\ell} - ma = 1.0\,\text{N}$.

8. $F_1 = \dfrac{m + m_s}{m_s} F = 90\,\text{N}$

9. a) $m = \dfrac{F_d}{\mu_d g} = 800\,\text{kg}$; b) $t = \dfrac{v}{\mu_d g} = 7.3\,\text{s}$

10. $\mu_d = \dfrac{v_0}{gt} = 0.055$.

11. a) $a_1 = \dfrac{F}{m_2} - \mu_d g = 9.8\,\text{m/s}^2$; b) si tratta di una decelerazione di modulo $a_2 = \mu_d g = 2.7\,\text{m/s}^2$.

12. a) $F = \dfrac{mv}{t} = 300\,\text{N}$; b) $t_1 = \dfrac{mvt}{mv - F_d t} = 15\,\text{s}$.

13. a) $m = \dfrac{F}{\mu_d g} = 74\,\text{kg}$; b) $F_1 = \dfrac{v}{\mu_d g t} F = 31\,\text{N}$.

14. a) $a = \dfrac{F}{m} - \mu_d g = 0.214\,\text{m/s}^2$; b) $F = \mu_d mg = 294\,\text{N}$.

15. a) $F_M = \mu_s mg = 212\,\text{N}$; b) $v = \sqrt{2\mu_d g s} = 5.24\,\text{m/s}$.

16. a) la cassa si muove se $F\cos\alpha \geq \mu_s(mg - F\operatorname{sen}\alpha)$, quindi non si muove;
b) $a = \dfrac{F_1}{m}(\cos\alpha - \mu_d\operatorname{sen}\alpha) - \mu_d g$ e quindi $v = \sqrt{2as} = 2.2\,\text{m/s}$; c) $d = \dfrac{v_2^2}{2\mu_d mg} = 3.0\,\text{cm}$.

17. $F = \dfrac{(m_1 + m_2)g}{\mu_s} = 330\,\text{N}$.

18. $\mu_d = \operatorname{tg}\alpha = 0.25$.

19. a) $F = mg(\mu_d \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = 42\,\mathrm{N}$; b) $F = ma + mg(\mu_d \cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha) = 48\,\mathrm{N}$; c) $a = (\operatorname{sen}\alpha - \mu_d \cos\alpha)g = 4.0\,\mathrm{m/s^2}$.

20. $\mu_d = \dfrac{\sqrt{\ell^2 - b^2}}{b} - \dfrac{a\ell}{gb} = 0.46$.

Fili e carrucole

1. $F = \dfrac{1}{2} mg = 368\,\mathrm{N}$.

2. a) il sistema scende dalla parte di m_1 con accelerazione di modulo $a = \dfrac{m_1 \operatorname{sen}\alpha_1 - m_2 \operatorname{sen}\alpha_2}{m_1 + m_2} = 26 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m/s^2}$; b) $\tau = \dfrac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}(\operatorname{sen}\alpha_1 + \operatorname{sen}\alpha_2) = 6.91\,\mathrm{N}$.

3. $\tau_1 = \dfrac{mg}{(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2)\cos\alpha_1} = 55\,\mathrm{N}$; $\tau_2 = \dfrac{mg}{(\operatorname{tg}\alpha_1 + \operatorname{tg}\alpha_2)\cos\alpha_2} = 41\,\mathrm{N}$.

4. $m = \dfrac{\operatorname{sen}(\alpha + \beta)}{g\cos\beta}\,\tau = 39\,\mathrm{kg}$.

5. $\tau_1 = mg \operatorname{cotg}\alpha = 160\,\mathrm{N}$, $\tau_2 = \dfrac{mg}{\operatorname{sen}\alpha} = 210\,\mathrm{N}$.

6. a) $F = \dfrac{F_a}{2\cos\alpha} = 177\,\mathrm{N}$; b) $F = \dfrac{ma + F_a}{2\cos\alpha} = 265\,\mathrm{N}$.

7. $\tau_1 = \dfrac{\cos\alpha_2}{\operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)} = 526\,\mathrm{N}$, $\tau_2 = \dfrac{\cos\alpha_1}{\operatorname{sen}(\alpha_1 + \alpha_2)} = 700\,\mathrm{N}$; quindi si spezza prima la liana piú inclinata, poi l'altra.

8. a) $\tau = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\,g = 6.0\,\mathrm{N}$, $a = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,g = 0.82\,\mathrm{m/s^2}$; b) $F = 2(m_1 - m_2)g = 20\,\mathrm{N}$.

Forza elastica

1. $\Delta x = \dfrac{mg}{k} = 0.89\,\mathrm{m}$; $\tau_1 = \tau_2 = 46\,\mathrm{N}$.

2. $\Delta x = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{mg}{k\cos 30°} = 3.4\,\mathrm{cm}$.

3. a) $k = \dfrac{m_2 g}{\Delta\ell} = 440\,\mathrm{N/m}$; b) $\ell_0 = \ell - \dfrac{m_1}{m_2}\Delta\ell = 39\,\mathrm{cm}$.

4. $v = \sqrt{\dfrac{k(\ell_0 + \Delta\ell)\Delta\ell}{m}} = 1.0\,\mathrm{m/s}$.

5. $\dfrac{\Delta\ell_1}{\Delta\ell_2} = \dfrac{k_2}{k_1}$.

6. a) $k = \dfrac{mg}{\Delta\ell_1} = 520\,\mathrm{N/m}$; b) $\Delta\ell_2 = \dfrac{a + g}{g}\,\Delta\ell_1 = 14\,\mathrm{cm}$.

Pendolo semplice

1. $\ell = \dfrac{T^2}{4\pi^2}\,g = 2.5\,\mathrm{m}$.

2. $\ell = \dfrac{T^2}{4\pi^2}\,g = 1\,\mathrm{m}$.

3. $T_L = \sqrt{\dfrac{g_T}{g_L}}\, T_T = 1.0\,\mathrm{s}$.

4. $\dfrac{T_h}{T_0} = \dfrac{R_T}{R_T + h}$, quindi T_h è il 99.96% di T_0.

Forza centripeta

1. $\nu = \dfrac{\sqrt{dg}}{2\pi\ell} = 3.885\,\mathrm{Hz}$, $F = \dfrac{d}{\ell}\, mg = 5179\,\mathrm{N}$.

2. $\nu = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{\mu_s g}{d}} = 0.20\,\mathrm{Hz}$.

3. $T_a = m(4\pi^2\nu^2\ell - g) = 377\,\mathrm{N}$, $T_b = m(4\pi^2\nu^2\ell + g) = 679\,\mathrm{N}$.

4. a) $N = m\left(\dfrac{v^2}{r} - g\right) = 4.5\,\mathrm{kN}$; b) $v = \sqrt{rg} = 5.9\,\mathrm{m/s}$.

Lavoro

1. $\mathcal{L} = \tau v t \cos\alpha = 2.5 \cdot 10^4\,\mathrm{J}$.

2. $\mathcal{L}_{\tau 2} = -\mathcal{L}_{\tau 1} = \dfrac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2}\, gh = 3.2 \cdot 10^2\,\mathrm{J}$, $\mathcal{L}_{g1} = m_1 gh = 3.3 \cdot 10^2\,\mathrm{J}$, $\mathcal{L}_{g2} = -m_2 gh = 3.1 \cdot 10^2\,\mathrm{J}$.

3. $\mathcal{L}_1 = F_1 s = 2.28 \cdot 10^2\,\mathrm{J}$, $\mathcal{L}_2 = F_2 s\cos\alpha = 498\,\mathrm{J}$, $\mathcal{L}_d = \mu_d(mg - F_s \operatorname{sen}\alpha) = 2.54 \cdot 10^2\,\mathrm{J}$.

4. $\mathcal{L} = k\,\dfrac{x_1 + x_2}{2}(x_2 - x_1) = 4.1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{J}$.

Teorema dell'energia cinetica

1. a) $F = m\,\dfrac{v - v_0}{t} = 72\,\mathrm{N}$, $s = \dfrac{t}{2}(v_0 + v)$; b) $s_1 = \dfrac{mv^2}{2F_1} = 36\,\mathrm{m}$; c) $F_2 = \dfrac{mv^2}{2s_2} = 110\,\mathrm{N}$.

2. a) $s = \dfrac{m}{2(F - F_f)}(v^2 - v_0^2) = 210\,\mathrm{m}$, $t = \dfrac{m}{F - F_f}(v - v_0) = 9.6\,\mathrm{s}$; b) $d = \dfrac{mv^2}{2F_f} = 510\,\mathrm{m}$.

3. a) $F = \dfrac{m_1 v^2}{2d_1} = 9.6\,\mathrm{N}$; $m_2 = \dfrac{d_1}{d}\, m = 4.5 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg}$.

4. a) $s = \sqrt{\dfrac{\mathcal{E}_c}{m}}\, t = 1.2 \cdot 10^2\,\mathrm{m}$; b) $s = \dfrac{\mathcal{E}_c}{F} = 10\,\mathrm{cm}$.

5. a) $\mathcal{L}_1 = \dfrac{1}{2}\, m(v_0^2 - v_1^2) = 74 \cdot 10^3\,\mathrm{J}$, $\mathcal{L}_2 = \dfrac{1}{2}\, m(v_1^2 - v_2^2) = 96 \cdot 10^3\,\mathrm{J}$; b) $s = \dfrac{v_2 + v_0}{2}\, t = 0.12\,\mathrm{km}$.

6. a) Il lavoro totale è nullo; b) $\mathcal{L} = F_a s = 1.9\,\mathrm{kJ}$; c) $F = \dfrac{1}{2s}\, m(v_2^2 - v_1^2) + F_a = 0.36\,\mathrm{kN}$.

7. a) $m = \dfrac{2(F - F_a)s}{v_2^2 - v_1^2} = 8.1 \cdot 10^2\,\mathrm{kg}$; b) $v = \sqrt{v_1^2 + \dfrac{2(F - F_a)s}{m_1}} = 20\,\mathrm{m/s}$.

8. a) $F_a = F\sqrt{2} = 8.5 \cdot 10^2\,\mathrm{N}$; b) $v = \sqrt{v_0^2 + \dfrac{2\sqrt{2}(F_1 - F)s}{m}} = 8.6\,\mathrm{m/s}$.

9. a) $\mathcal{E}_d = \mu_d mg\cos\alpha\ell = 3.1\,\mathrm{J}$; b) $v = \sqrt{2g(\operatorname{sen}\alpha - \mu_d\cos\alpha)} = 2.8\,\mathrm{m/s}$.

10. a) $F = \mu_d mg = 67\,\mathrm{N}$; b) $F = \mu_d mg + \dfrac{1}{2}\, m(v_2^2 - v_1^2) = 9.2 \cdot 10^2\,\mathrm{N}$.

11. a) $\mu_d = \dfrac{v^2}{2gs_1} = 0.65$; b) $s_2 = \dfrac{s_1}{\cos(\mathrm{arctg}\, 0.18)} = 81\,\mathrm{m}$.

Potenza

1. a) $v = \dfrac{\mathcal{P}}{F} = 1.7\,\mathrm{m/s}$; b) $\mathcal{P}_a = -\mathcal{P} = -50\,\mathrm{W}$; c) $\mathcal{L} = \mathcal{P}\Delta t = 13 \cdot 10^1\,\mathrm{J}$.

2. $\mathcal{P} = \dfrac{mgh}{60} = 94 \cdot 10^1\,\mathrm{MW}$.

3. a) $m = \dfrac{\mathcal{P}t}{gh} = 55\,\mathrm{kg}$, $v = \dfrac{h}{t} = 0.68\,\mathrm{s}$, $F = \dfrac{\mathcal{P}t}{h} = 5.4 \cdot 10^2\,\mathrm{N}$;
b) la forza esercitata e il lavoro svolto non cambiano; la potenza dimezza.

4. a) $m = \dfrac{2\mathcal{P}t}{v_2^2 - v_1^2} = 8.2 \cdot 10^5\,\mathrm{kg}$; b) $F = \dfrac{2\mathcal{P}}{v_1 + v_2} = 1.0 \cdot 10^5\,\mathrm{N}$; $d = \dfrac{v_1 + v_2}{2}\, t = 2.3\,\mathrm{km}$.

5. a) $t = \dfrac{mv^2}{2\mathcal{P}} = 33\,\mathrm{s}$; b) $F = \dfrac{2\mathcal{P}}{v} = 1.7\,\mathrm{N}$.

6. a) $\mathcal{P} = \dfrac{mv^2}{2t} = 1.9 \cdot 10^5\,\mathrm{W}$; b) $F = \dfrac{mv}{t} = 4.1 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$; c) $d = \dfrac{vt}{2} = 8.7 \cdot 10^2\,\mathrm{m}$.

7. a) $d = \dfrac{vt}{2} = 10^2\,\mathrm{m}$; b) $\mathcal{P} = \dfrac{mv^2}{2t} = 5.5 \cdot 10^4\,\mathrm{W}$.

8. a) $v = \dfrac{\mathcal{P}}{mg} = 1.4\,\mathrm{m/s}$; b) $t = \dfrac{mgh}{\mathcal{P}} = 8.8\,\mathrm{s}$.

9. $\mathcal{P} = \dfrac{nmgh}{60} = 6.9\,\mathrm{kW}$.

10. $\mathcal{P} = \dfrac{\mathcal{E}}{86400} = 10^2\,\mathrm{W}$.

Forza peso

1. a) $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2g(h_1 - h_2)} = 8.7\,\mathrm{m/s}$; b) $v_0 = \sqrt{v_1^2 + 2gh_1} = 13\,\mathrm{m/s}$; c) $h = h_1 + \dfrac{v_1^2}{2g} = 8.8\,\mathrm{m}$.

2. a) $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh_1} = 2.2\,\mathrm{m/s}$; b) $h_2 = H - \dfrac{1}{2g}(v_2^2 - v_0^2) = 4.6\,\mathrm{m}$; c) $v = \sqrt{v_0^2 + 2gH} = 15\,\mathrm{m/s}$.

3. a) $\Delta\mathcal{U} = mgh = 3.1 \cdot 10^7\,\mathrm{J}$; b) $\mathcal{P} = \dfrac{mghv}{d} = 4.3\,\mathrm{kW}$.

4. a) $h = \dfrac{5}{2}\, r = 1.3\,\mathrm{m}$; b) $v_0 = \sqrt{gr} = 2.2\,\mathrm{m/s}$.

Forza elastica

1. a) $v_2 = \sqrt{v_1^2 + 2gh_1} = 13\,\mathrm{m/s}$; b) $x = \sqrt{\dfrac{m}{k}\left[v_1^2 + 2g(h_1 - h_3)\right]} = 70\,\mathrm{cm}$.

2. a) $x = \dfrac{m}{k}\, g = 12\,\mathrm{cm}$; b) $h = \dfrac{kx^2}{2mg} - x = 52\,\mathrm{cm}$.

3. a) $k = \dfrac{m}{x^2}(v_1^2 + 2gh_1) = 2.3 \cdot 10^3\,\mathrm{N/m}$; b) $h_2 = h_1 + \dfrac{v_1^2}{2g} - x = 3.5\,\mathrm{m}$.

4. a) $h_2 = \dfrac{1}{k}\left[\,k(h_1-\ell) - mg - \sqrt{m^2g^2 + 2mgk\ell}\,\right] = 14\,\mathrm{m}$; b) $k = \dfrac{2mgh_1}{(h_1-\ell)} = 78\,\mathrm{N/m}$;
c) $h_3 = h_1 - \ell - \dfrac{mg}{k} = 35\,\mathrm{m}$.

5. a) $x = \sqrt{\dfrac{2mgh}{k}} = 3.8\,\mathrm{m}$; b) $v = \sqrt{\dfrac{k}{m}(h-\ell_0)^2 - 2gh} = 3.4\,\mathrm{m/s}$.

6. $h = \dfrac{kx^2}{2mg} = 4.7\,\mathrm{cm}$, $d = \dfrac{kx^2}{2mg\,\mathrm{sen}\,\alpha} = 18\,\mathrm{cm}$.

7. $k = \dfrac{m}{x^2}(v^2 - 2gd\,\mathrm{sen}\,\alpha) = 130\,\mathrm{N/m}$.

Forza d'attrito

1. a) $v = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 2.63\,\mathrm{m/s}$; b) $F_a = \dfrac{mv_0^2 + 2mgh}{2d} = 0.39\,\mathrm{N}$, $\mathcal{P} = \dfrac{mv_0^2 + 2mgh}{2t} = 1.9\,\mathrm{W}$.

2. $v = \sqrt{2g\ell(\mathrm{sen}\,\alpha - \mu_d\cos\alpha)} = 32\,\mathrm{m/s}$.

3. a) $v = \sqrt{0.65(v_0^2 + 2gh)} = 31\,\mathrm{m/s}$, $t = \dfrac{2\ell}{v_0 + v} = 9.2\,\mathrm{s}$; $F_d = \dfrac{0.35}{\ell}(mgh + \dfrac{1}{2}\,v_0^2) = 128\,\mathrm{N}$.

4. a) $\ell = \dfrac{1}{\mu_d\cos\alpha}\left(h - \dfrac{v^2 - v_0^2}{2g}\right) = 1.0\cdot 10^2\,\mathrm{m}$; b) $s = \dfrac{v^2}{2\mu_d g} = 67\,\mathrm{m}$.

5. a) $h = \dfrac{v_2^2 - v_1^2}{2g} = 31\,\mathrm{m}$; b) $F_a = mg - \dfrac{m}{2s}(v_2^2 - v_1^2) = 2.4\cdot 10^2\,\mathrm{N}$.

6. a) $F_a = m\left(g - \dfrac{v^2}{2h}\right) = 14\,\mathrm{N}$; b) $v_1 = \sqrt{v_0^2 + v^2} = 43\,\mathrm{m/s}$.

7. a) $F_a = \dfrac{m}{2d}(v_0^2 - 2gh) = 0.17\,\mathrm{N}$; b) $h_1 = \dfrac{v_0^2}{2g} = 40\,\mathrm{cm}$, $d_1 = \dfrac{v_0^2}{2gh}\,d = 2.7\cdot 10^2\,\mathrm{m}$.

8. $k = \dfrac{m}{x^2}(v^2 - 2\mu_d gd) = 5.7\cdot 10^4\,\mathrm{N/m}$.

Quantità di moto e teorema dell'impulso

1. a) $v_2 = \dfrac{F}{m}\,t - v_1 = 60\,\mathrm{m/s}$; b) $F_1 = \dfrac{m}{t}\,(v_1 + v) = 69\,\mathrm{N}$.

2. a) $F = \dfrac{m}{t}\,(v_1 + v_2) = 22.1\,\mathrm{N}$; b) $\mathcal{L}_a = \dfrac{1}{2}\,mv_2^2 = 44.7\,\mathrm{J}$, $F_a = \dfrac{mv_2^2}{2d} = 0.745\,\mathrm{N}$.

3. a) $F = \dfrac{m}{t}\big(\sqrt{2gh_1} - \sqrt{2gh_2}\big) = 23.8\,\mathrm{N}$; b) $\mathcal{E}_d = mg(h_1 - h_2) = 19.1\,\mathrm{J}$.

4. a) $v = \dfrac{FT}{m} - \sqrt{v_1^2 - 2g(h_1 - h_2)} = 8.9\,\mathrm{m/s}$; b) v aumenta all'aumentare di t.

5. a) $v = \sqrt{2h\left(g - \dfrac{F_a}{m}\right)} = 22\,\mathrm{m/s}$; b) $F = \dfrac{4m}{5t}\,v = 2.8\cdot 10^2\,\mathrm{N}$.

6. $h = \dfrac{F^2t^2}{2gm^2} = 5.8\,\mathrm{m}$.

7. $h = \dfrac{(0.6Ft)^2}{2gm^2} = 2.1\,\mathrm{m}$.

8. a) $\mathcal{P} = \sqrt{\dfrac{F^3 s}{2m}} = 2.4 \cdot 10^4\,\text{W}$; b) $F_1 = \dfrac{1}{t}\sqrt{2mFs} = 9.4 \cdot 10^3\,\text{N}$.

9. $h = \dfrac{F^2 t^2}{2gm^2} = 46\,\text{m}$.

10. a) $\mathcal{L}_a = mgh - \dfrac{1}{2}\,mv^2 = 1.3 \cdot 10^5\,\text{J}$; b) $t = \dfrac{mv}{F} = 0.68\,\text{s}$.

11. a) $F = \dfrac{mgh}{d} = 4.9 \cdot 10^2\,\text{N}$; b) $t = \sqrt{\dfrac{2}{gh}}\,d = 0.01\,\text{s}$.

Conservazione della quantità di moto; urti ed esplosioni

1. a) $V = \dfrac{2}{5}\,v_1 = 6\,\text{m/s}$; b) verso opposto a quello di $\boldsymbol{v}_1$ e modulo $v_2 = \dfrac{2}{3}\,v_1 = 10\,\text{m/s}$.

2. a) $V_1 = \dfrac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 1.2\,\text{m/s}$; $V_2 = \dfrac{m_1 v_1}{m_1 + 2m_2} = 1.8\,\text{m/s}$.

3. a) $V = \dfrac{m_1 v_1 - 10 m_2 v_2}{m_1 + 10 m_2} = 2.4\,\text{m/s}$; b) $n = \dfrac{m_1 v_1}{m_2 v_2} = 32$.

4. a) $m_2 = \dfrac{\sqrt{v_1^2 + 2gh} - V}{V - v_2}\,m_1 = 4.3 \cdot 10^3\,\text{kg}$; b) $\mathcal{P} = \dfrac{1}{2t}(m_1 + m_2)V^2 = 6.6 \cdot 10^3\,\text{W}$.

5. $v = \dfrac{m_1 + m_2}{m_2}\sqrt{2gh} = 6.5 \cdot 10^2\,\text{m/s}$.

6. a) $m_2 = \left(\dfrac{v_1}{V} - 1\right) m_1 = 0.14\,\text{kg}$; b) $v_2 = \dfrac{v_1 V}{v_1 - V} = 9.5\,\text{m/s}$.

7. a) $V_1 = \dfrac{m_2 v_2 + m_3 v_3}{m_1} = 3.7 \cdot 10^{-2}\,\text{m/s}$; b) $V_4 = \dfrac{m_4 v_4 - m_2 v_2 + m_3 v_3}{m_2 + m_3 + m_4} = 3.4\,\text{m/s}$.

8. $v_1 = V + \dfrac{m_2}{m_1}(V - v_2) = 8.8\,\text{m/s}$.

9. a) la barca si sposta verso destra con velocità di modulo $V = \dfrac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{m} = 0.5\,\text{m/s}$;
b) $F = \dfrac{m_2 v_2 - m_1 v_1}{t} = 30\,\text{N}$.

10. Il pallone rimbalza con velocità di modulo $V_1 = \dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\,v_1 = 9.99\,\text{m/s}$, l'automobile si muove con velocità di modulo $V_2 = \dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}\,1.08 \cdot 10^{-2}\,\text{m/s}$.

11. $V_x = \dfrac{2m_1 - m_2 - m_3}{2(m_1 + m_2 + m_3)}\,v = -0.25\,\text{m/s}$, $V_y = \dfrac{\sqrt{3}(m_2 - m_3)}{2(m_1 + m_2 + m_3)}\,v = -7.2 \cdot 10^{-2}\,\text{m/s}$.

12. a) $m_2 = \dfrac{4}{3}\,m_1 = 72\,\text{kg}$; b) $F = \dfrac{m_2 v}{2t} = 1.5 \cdot 10^3\,\text{N}$; c) $\mathcal{E}_d = \left(\dfrac{3}{8}\,m_1 - \dfrac{1}{18}\,m_2\right) v^2 = 2.9 \cdot 10^2\,\text{J}$.

13. a) Scelti come assi x e y rispettivamente i versi delle velocità iniziali $\boldsymbol{v}_1$ e $\boldsymbol{v}_2$ si trovano le componenti $V_{2x} = \dfrac{m_1}{m_2}\,v = 1.6\,\text{m/s}$, $V_{2y} = \dfrac{m_2 - m_1}{m_2}\,v = 1.6\,\text{m/s}$; b) $\mathcal{E}_d = \dfrac{1}{4}\,m_2 v^2 = 13\,\text{J}$.

14. $t = \dfrac{\pi r}{v} = 3.5\,\text{s}$.

15. a) $\theta_2 = 60°$; b) $V_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\, v_1 = 2.0\,\mathrm{m/s}$; $V_2 = \dfrac{1}{2}\, v_1 = 1.2\,\mathrm{m/s}$.

16. $m_2 = \dfrac{m_1}{3} = 8\,\mathrm{t}$.

Centro di massa

1. $d = \dfrac{m_L}{m_L + m_T}\, r_{TL} = 4.7 \cdot 10^3\,\mathrm{km}$.

2. $d = \dfrac{14}{17}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\,\ell$

3. $d = \dfrac{3}{5}\,\ell = 15\,\mathrm{cm}$.

4. $d = \dfrac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + m}\,\ell = 24\,\mathrm{cm}$.

5. $s = \dfrac{m_1}{m_1 + m_2}\, d = 5.5\,\mathrm{m}$.

6. $v_G = \dfrac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} = 111\,\mathrm{km/h}$.

7. $d = \dfrac{3v^2}{2g} = 1.4 \cdot 10^2\,\mathrm{m}$.

8. $x(t) = h - \dfrac{m_2 - m_1}{2(m_1 + m_2)}\, g t^2 = 1.2 - 7.1 \cdot 10^{-2} t^2$.

9. a) $v_2 = \dfrac{m_1}{m_2}\, v_1 = 2.7\,\mathrm{m/s}$; b) $V = 0$; c) $\mathcal{E}_d = \dfrac{m_1 v_1^2}{2}\left(1 + \dfrac{m_1}{m_2}\right) = 64\,\mathrm{J}$.

10. $V_1 = v_G - u_1 = 1.1\,\mathrm{m/s}$, $V_2 = v_G - u_2 = 7.7\,\mathrm{m/s}$.

Momento di una forza

1. a) $d = \dfrac{m_2 - m_1}{2m_2}\,\ell = 50\,\mathrm{cm}$; b) $N = (m_1 + m_2)g = 5.4 \cdot 10^2\,\mathrm{N}$.

2. $F_1 = \sqrt{1 + \dfrac{1}{4\,\mathrm{tg}^2\,\alpha}}\, mg = 104\,\mathrm{N}$, $F_2 = \dfrac{mg}{2\,\mathrm{tg}\,\alpha} = 68\,\mathrm{N}$.

3. $\tau_1 = \dfrac{1}{4}\, mg = 1.6\,\mathrm{N}$, $\tau_2 = \dfrac{3}{4}\, mg = 4.8\,\mathrm{N}$.

4. $F = \dfrac{\sqrt{2rh - h^2}}{r - h}\, mg = 5.7\,\mathrm{N}$.

5. $\tau = mg\,\mathrm{tg}\,\dfrac{\alpha}{2} = 14\,\mathrm{N}$.

6. $F_a = \dfrac{\mathrm{sen}\,\alpha + \cos\alpha}{2\,\mathrm{sen}\,\alpha}\, mg = 71\,\mathrm{N}$.

7. $\alpha_1 = \mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{4} = 14°$; $\alpha_2 = 90° - \alpha_1 = 76°$.

Momento angolare

1. a) $\tau(\ell) = \dfrac{m\ell_0^2 v_0^2}{\ell^3}$; b) $v = 2v_0 = 9.0\,\mathrm{m/s}$.

2. $v = v_0 + \dfrac{F}{m}\, t = 8.7\,\mathrm{m/s}$.

3. a) $L = mr_1v_1 = 6.6\,\mathrm{kg\,m^2/s}$; b) $v_2 = \dfrac{r_1}{r_2}\, v_1 = 4.3\,\mathrm{m/s}$.

Dinamica del corpo rigido

1. $L = \pi m r^2 \nu = 8.91 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{kgm^2/s}$.

2. a) $L_O = \pi m r^2 \nu = 866\,\mathrm{kgm^2/s}$; b) $M_O = \dfrac{\pi m r^2 \nu}{\Delta t} = 1.6 \cdot 10^2\,\mathrm{N\,m}$.

3. $M_O = \dfrac{m\ell^2\omega}{t} = 9.4 \cdot 10^2\,\mathrm{N\,m}$.

4. a) $M_O = F_a r = 0.23\,\mathrm{N\,m}$; b) $I = \dfrac{F_a r t}{2\pi\nu} = 6.7 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{kgm^2}$.

5. a) $a = 2\,\dfrac{m_2 - m_1}{m}\, g = 9.1\,\mathrm{m/s^2}$; b) $\omega = \dfrac{2}{r}\sqrt{\dfrac{m_2 - m_1}{m}\, gh} = 6.1\,\mathrm{rad/s}$.

6. $\nu_2 = \left(\dfrac{r_1}{r_2}\right)^2 \nu_1 = 4.0 \cdot 10^3\,\mathrm{Hz}$.

Moto di rotolamento

1. a) $v = \dfrac{5Ft}{7m} = 11\,\mathrm{m/s}$; b) $\mathcal{L} = \dfrac{5F^2t^2}{14m} = 4.7 \cdot 10^2\,\mathrm{J}$; c) $F_s = \dfrac{2}{7}\, F = 5.7\,\mathrm{N}$.

2. $h = \dfrac{7v^2}{10g} = 1.6\,\mathrm{m}$.

3. $s = \dfrac{v^2}{4\mu_s g} = 29\,\mathrm{m}$.

Leggi di Kepler

2. $L = a(1+e) = 6.982 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$, $\ell = a(1-e) = 4.600 \cdot 10^{10}\,\mathrm{m}$.

3. $T_1 = \sqrt{\dfrac{r_1^3}{r_2^3}}\, T_2$.

Legge di gravitazione universale

1. F resta invariata.

2. a) $F = G\,\dfrac{Mm}{d^2} = 1.57 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{N}$, $a = G\,\dfrac{M}{d^2} = 6.26 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m/s^2}$; b) $d_1 = \sqrt{G\,\dfrac{M}{a_1}} = 5.04\,\mathrm{cm}$.

3. a) $F = G\dfrac{m_1 m_2}{d^2} = 14.8\,\mathrm{N}$; b) $a_1 = G\dfrac{m_1 m_2}{d^2} = 1.48 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{m/s^2}$, $a_2 = G\dfrac{m_1 m_1}{d^2} = 7.41 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m/s^2}$.

4. a) $r = \sqrt[3]{\dfrac{GMT^2}{4\pi^2}} = 1.2 \cdot 10^{11}\,\mathrm{m}$; b) $v = \sqrt[3]{\dfrac{2\pi GM}{T}} = 2.7 \cdot 10^4\,\mathrm{m/s}$;
c) $F = \sqrt[3]{\dfrac{32\pi^2 G^2}{MT^2}}(M + m_1)m_2 = 5.1 \cdot 10^9\,\mathrm{N}$.

5. $h = (\sqrt{2} - 1)R_T = 2.639 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$.

5. $T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2}{GM_L}\, r^3} = 4.1\,\text{h}$.

6. Per esempio, usando dati della Terra si trova: $m_S = \dfrac{4\pi^2}{GT_T^2}\, r_T^3 = 1.988 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$.

7. $T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2}{Gm_S}\, D^3} = 1.452 \cdot 10^8\,\text{s} = 4.603\,\text{y}$.

8. $d = \dfrac{m_T - \sqrt{m_T m_L}}{m_T - m_L}\, D = 3.460 \cdot 10^8\,\text{m}$.

9. $T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2}{Gm_T}(R_T + h)^3} = 5.42\,\text{s}$.

10. $T = \sqrt{\dfrac{4\pi^2}{Gm_T}\, r^3} = 2.40\,\text{h}$.

11. a) $a_G = \dfrac{4\pi^2}{T^2 R^2}\, r^3 = 2.0 \cdot 10^2\,\text{m/s}^2$; b) $M = \dfrac{4\pi^2}{GT^2}\, r^3 = 2.2 \cdot 10^{30}\,\text{kg}$.

Energia potenziale gravitazionale

1. $h = \dfrac{2GM_T}{v^2} - R_T = 4.7 \cdot 10^3\,\text{km}$.

2. a) $r = \sqrt{\dfrac{GM_L m}{F}} = 1.74 \cdot 10^6\,\text{m}$; b) .

3. a) $r = \sqrt{\dfrac{Gm}{a_G}} = 1.7 \cdot 10^3\,\text{km}$; b) $v = \sqrt{\dfrac{2Gm}{r+h}} = 4.9\,\text{km/s}$.

4. a) $a_G = \dfrac{c^2}{2r} = 2.6 \cdot 10^{13}\,\text{m/s}^2$; b) $d = \sqrt{\dfrac{r}{2g}}\, c = 2.8 \cdot 10^6\,\text{km}$.

5. a) $r = \dfrac{Gm}{2c^2} = 1.02\,\text{km}$; b) $d = \dfrac{Gm}{c^2} = 2.04\,\text{km}$; c) $a_G = \dfrac{4c^4}{Gm} = 1.76 \cdot 10^{14}\,\text{m/s}^2$.

6. a) $a_G = G\dfrac{m}{r^2} = 1.80\,\text{m/s}^2$; b) $v_f = \sqrt{\dfrac{2Gm}{r}} = 2.56\,\text{km/s}$; c) $D = \sqrt[3]{\dfrac{Gm_G}{4\pi^2}\, T^2} = 4.27 \cdot 10^8\,\text{m}$; d) $v = \sqrt{\dfrac{Gm_G}{D}} = 1.72 \cdot 10^4\,\text{m/s}$; e) $E = -\dfrac{1}{2}\, mv^2 = -1.33 \cdot 10^{31}\,\text{J}$.

7. a) $v_f = \sqrt{a_G d} = 389\,\text{m/s}$; b) $h_{\max} = \dfrac{v^2 d}{2a_G d - 2v^2} = 9.54 \cdot 10^4\,\text{m}$; c) $w = \sqrt{\dfrac{2hd}{2h+d}\, a_G} = 314\,\text{m/s}$.

Pressione

1. a) affonda b) non affonda.

2. $F = 1.3 \cdot 10^4\,\text{N}$.

3. $m = \dfrac{4pS}{g} = 2.04 \cdot 10^3\,\text{kg}$.

4. $p = p_0 - \dfrac{m}{St^2}(gt^2 - 2d) = 79\,\text{kPa}$.

Legge di Stevin

1. $p = \rho g h = 4.68 \cdot 10^3\,\mathrm{Pa}$.

2. $h = \dfrac{0.2 p_0}{\rho g} = 1.7 \cdot 10^3\,\mathrm{m}$.

3. $h = \dfrac{p_0}{\rho g} = 10.3\,\mathrm{m}$.

4. a) $F = (p_0 + \rho g h)\pi r^2 = 1.88 \cdot 10^6\,\mathrm{N}$; b) $F = \rho g h \pi r^2 = 1.78 \cdot 10^6\,\mathrm{N}$.

5. $h = \dfrac{1}{\rho g S}(F - p_0 S) = 96\,\mathrm{m}$.

6. a) $F_e = \rho g h \ell^3 = 9.9 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$; b) $F = (\rho g h - p_0)\ell^3 = 5.6 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$; c) $H = h + \dfrac{2p_0}{\rho g} = 43\,\mathrm{m}$.

7. $p = p_0 + g(\rho h + \rho_1 h_1) = 3.5 \cdot 10^5\,\mathrm{Pa}$.

8. a) $F = \rho g h \pi r^2 = 92\,\mathrm{N}$; b) quadruplica.

9. $\mathcal{L} = \rho g S \left(\dfrac{h_1 + h_2}{2}\right)^2 = 28\,\mathrm{J}$.

Legge di Archimede

1. a) $V_i = \dfrac{\rho}{\rho_l} V = 2.1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3$; b) $m = (\rho_l - \rho)V = 9.4\,\mathrm{kg}$.

2. a) $\rho = 0.8\rho_l = 824\,\mathrm{kg/m}^3$; b) la percentuale è $\dfrac{0.8\rho_l}{\rho_{Hg}}\% = 6.1\%$.

3. $V = \dfrac{m_1}{\rho} - \dfrac{m_1 + m_2}{\rho_l} = 1.44 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3$.

4. a) $\rho_1 = \dfrac{g}{g + a}\,\rho_l = 8.3 \cdot 10^2\,\mathrm{kg/m}^3$; b) $a = \dfrac{\rho_l - \rho}{\rho}\,g = 2.5\,\mathrm{m/s}^2$.

5. a) $T = \dfrac{\rho_l - \rho}{\rho}\,mg = 38\,\mathrm{N}$; b) $a = \dfrac{\rho_l - \rho}{\rho}\,g = 2.7\,\mathrm{m/s}^2$.

6. a) $V_e = V - \dfrac{m}{\rho_l} = 1.0 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}^3$; b) $F = \Delta V \rho_l g = 18\,\mathrm{N}$.

7. $V = \dfrac{\rho_l}{\rho_l - \rho_g}\,V_e = 2.0 \cdot 10^5\,\mathrm{m}^3$.

8. a) si alza; b) $V_1 = \dfrac{m}{\rho_1} = 9417\,\mathrm{m}^3$, $V_2 = \dfrac{m}{\rho_2} = 9700\,\mathrm{m}^3$.

9. $m_1 = \dfrac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2}\,m_2 = 2050\,\mathrm{kg}$.

10. $V = \dfrac{\Delta P}{\rho_l g} - \dfrac{m}{\rho} = 6.1 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3$.

11. $m = \dfrac{\rho_{Au}}{\rho_l}\,\dfrac{\rho_{Ag} m_2 - (\rho_{Ag} - \rho_l) m_1}{\rho_{Au} - \rho_{Ag}} = 405\,\mathrm{g}$.

12. $\Delta p = \dfrac{mg}{S} = 4.7 \cdot 10^2\,\mathrm{Pa}$.

13. Dimimuisce

14. $a = g - \dfrac{p - p_0}{\rho h} = 0.77\,\mathrm{m/s^2}$.

Portata e teorema di Bernoulli

1. $p_2 = p_1 - \rho g h + \dfrac{d_2^4 - d_1^4}{2 d_2^4}\,\rho v_1^2 = 7.0 \cdot 10^2\,\mathrm{Pa}$, $v_2 = \dfrac{d_1^2}{d_2^2}\,v_1 = 4.0\,\mathrm{m/s}$.

2. a) $F = \rho g h S = 4.1 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$; b) $V = \sqrt{2gh}St = 2.9 \cdot 10^2\,\mathrm{m^2}$.

3. $t = \dfrac{V}{\pi r^2 v} = 45\,\mathrm{h}$.

4. $p = p_0 + \rho g h - \dfrac{1}{2}\,\rho v^2 = 103\,\mathrm{kPa}$.

5. a) $d = 2\sqrt{(h_1 - h_2)h_2} = 87\,\mathrm{cm}$ b) deve essere $h_2 = \dfrac{h_1}{2} = 50\,\mathrm{cm}$.

6. $v_1 = \sqrt{2\Delta p\,\dfrac{d_2^4}{\rho(d_1^4 - d_2^4)}} = 1.3\,\mathrm{m/s}$, $v_2 = \sqrt{2\Delta p\,\dfrac{d_1^4}{\rho(d_1^4 - d_2^4)}} = 4.1\,\mathrm{m/s}$.

7. $F = \dfrac{1}{2}\,\rho v^2 S = 2.8 \cdot 10^7\,\mathrm{N}$.

Appendice B

Costanti utili

B.1 Costanti fisiche

La seguente tabella riunisce i valori di alcune costanti fisiche. Si fa presente che negli esercizi risolti e proposti tutte le costanti presenti nell'appendice vengono approssimate a quattro cifre significative.

Costante	Simbolo	Valore
Accelerazione media di gravità	g	$9.80665\,\mathrm{m/s^2}$
Costante di gravitazione universale	G	$6.67428 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{N\,m^2/kg^2}$
Velocità della luce	c	$299792458\,\mathrm{m/s}$

B.2 Dati sul Sistema Solare

La seguente tabella riunisce i dati sui principali corpi del Sistema Solare.

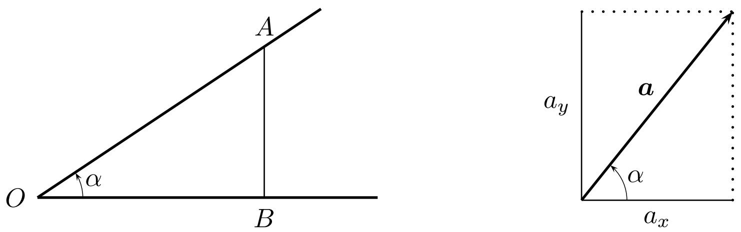
Corpo	Raggio medio km	Massa kg	Accelerazione di gravità* $\mathrm{m/s^2}$	Velocità di fuga km/s	Distanza media dal Sole** km	Periodo di rivoluzione d	Eccentricità dell'orbita
Sole	696000	1.9891×10^{30}	274.0	617.6			
Mercurio	2439.7	$3.302 \cdot 10^{23}$	3.70	4.3	$5.791 \cdot 10^{7}$	87.969	0.2056
Venere	6051.8	$4.8685 \cdot 10^{24}$	8.87	10.36	$1.0821 \cdot 10^{8}$	224.701	0.0067
Terra	6371.0	$5.9736 \cdot 10^{24}$	9.780	11.186	$1.49595 \cdot 10^{8}$	365.256	0.0167
Marte	3389.5	$6.4185 \cdot 10^{23}$	3.69	5.03	$2.27925 \cdot 10^{8}$	686.980	0.0935
Giove	69911	$1.8986 \cdot 10^{27}$	23.12	59.5	$7.7857 \cdot 10^{8}$	4332.589	0.0489
Saturno	58232	$5.6846 \cdot 10^{26}$	8.96	35.5	$1.433525 \cdot 10^{9}$	10759.22	0.0565
Urano	25362	$8.6832 \cdot 10^{25}$	8.69	21.3	$2.87246 \cdot 10^{9}$	30685.4	0.0457
Nettuno	24622	$1.0243 \cdot 10^{26}$	11.00	23.5	$4.49506 \cdot 10^{9}$	60189	0.00113
Plutone	1195	$1.25 \cdot 10^{22}$	0.58	1.2	$5.906375 \cdot 10^{9}$	90465	0.2488
Luna	1737.1	$7.349 \cdot 10^{22}$	1.62	2.38	384400***	27.3217	0.0549

* All'equatore.
** È anche il semiasse maggiore.
*** È la distanza media dalla Terra.

Appendice C

Funzioni goniometriche.

Le funzioni goniometriche sono molto utili in fisica poiché consentono di determinare in modo estremamente pratico la proiezione di un segmento lungo una direzione diversa, per esempio per calcolare le componenti di un vettore. Qui non si cerca di dare una esposizione esaustiva delle funzione goniometriche, ma solo di dare i pochi semplici strumenti utilizzati nel testo.



(h) L'angolo α

(i) Le proiezioni del vettore $\boldsymbol{a}$.

Figura C.1: Definizione e uso delle funzioni goniometriche.

Si consideri quindi un angolo α di vertice O, e sia A un qualsiasi punto su uno dei due lati dell'angolo e B la sua proiezione sull'altro lato. Si definiscono allora le seguenti funzioni goniometriche:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{AB}{OA} \quad , \quad \cos\alpha = \frac{OB}{OA} \quad , \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{AB}{OB} \;. \quad , \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{OB}{AB} \;.$$

le quattro funzioni di α qui definite non sono indipendenti, ma valgono le relazioni

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad , \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} \;. \quad , \quad \operatorname{cotg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \;.$$

Da queste definizioni è immediato ricavare le componenti di un vettore rispetto agli assi cartesiani x e y. Facendo riferimento alla figura C.1(i), le componenti a_x e a_y del vettore $\boldsymbol{a}$ sono date da

$$a_x = a\cos\alpha \quad , \quad a_y = a\operatorname{sen}\alpha \;.$$

Inoltre le due componenti sono fra loro legate dalle relazioni

$$a_y = a_x \operatorname{tg}\alpha \quad , \quad a_x = a_y \operatorname{cotg}\alpha \;.$$

Le funzioni goniometriche qui introdotte possono essere assai convenientemente rappresentate sul piano cartesiano utilizzando una circonferenza, detta goniometrica, avente il centro nell'origine degli assi e raggio unitario.

L'angolo positivo α viene rappresentato con il vertice nell'origine, un lato coincidente con il semiasse positivo delle ascisse e l'altro lato ruotato in senso antiorario, riservando la rotazione oraria per gli angoli negativi.

In questo modo il valore in radianti di α è rappresentato dalla lunghezza dell'arco sotteso sulla circonferenza.
Il seno e il coseno di α sono rappresentati dalle coordinate del punto P, intersezione del lato mobile dell'angolo con la circonferenza. Vale quindi

$$P(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$$

Inoltre la tangente e la cotangente di α sono rappresentati dai segmenti tangenti alla circonferenza rispettivamente nei punti di coordinate $(1,0)$ e $(0,1)$ compresi fra la circonferenza e il lato mobile di α.
Uno dei vantaggi della rappresentazione delle funzioni goniometriche sulla circonferenza è la estensione della loro definizione ad angoli qualunque.
Dalla figura e da quanto detto, si vede inoltre che, per α acuto, vale la disuguaglianza

$$\operatorname{sen}\alpha < \alpha < \operatorname{tg}\alpha$$

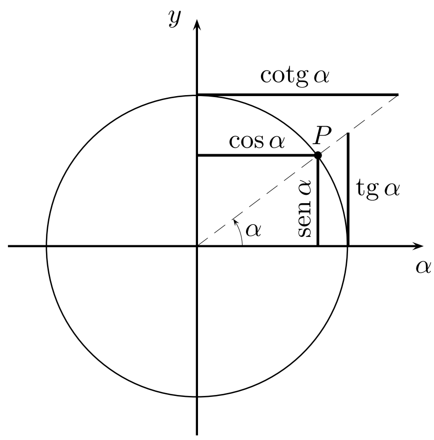


Figura C.2: La circonferenza goniometrica.

Inoltre per angoli piccoli, cioè per $\alpha \simeq 0$ vale l'approssimazione

$$\operatorname{sen}\alpha \simeq \operatorname{tg}\alpha \simeq \alpha$$

Si fornisce una tabella di corrispondenza fra le misure di alcuni angoli in gradi e in radianti e i valori corrispondenti delle funzioni goniometriche.

gradi	radianti	sen	cos	tg	cotg
$0°$	0	0	1	0	$\nexists$
$30°$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$45°$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$60°$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$90°$	$\frac{\pi}{2}$	1	0	$\nexists$	0
$180°$	π	0	-1	0	$\nexists$
$270°$	$\frac{3}{2}\pi$	-1	0	$\nexists$	0
$360°$	2π	0	1	0	$\nexists$

Sono definite le funzione goniometriche inverse che, dato il valore del seno, cose, tangente e cotangente, permettono di calcolare l'angolo corrispondente. Valgono cioè le corrispondenze

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}\alpha = x &\quad\longleftrightarrow\quad \operatorname{arcsen} x = \alpha \\
\cos\alpha = x &\quad\longleftrightarrow\quad \arccos x = \alpha \\
\operatorname{tg}\alpha = x &\quad\longleftrightarrow\quad \operatorname{arctg} x = \alpha \\
\operatorname{cotg}\alpha = x &\quad\longleftrightarrow\quad \operatorname{arccotg} x = \alpha\ .
\end{aligned}$$