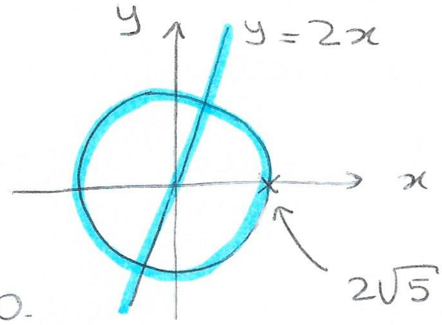
(1) $f(x,y) = |2x-y|(x^2+y^2-20)$

(a) Per la simmetria del problema, studio solo il caso $y \le 2x$



$\Rightarrow f(x,y) = (2x-y)(x^2+y^2-20)$.

Nelle parti colorate in azzurro, $f=0$.

$\sup_{\mathbb{R}^2} f = \lim_{x \to +\infty} f(x,0) = +\infty$.

$\inf_{\mathbb{R}^2} f = \min_{\mathbb{R}^2} f$ è assunto nell'interno della circonferenza $x^2+y^2-20=0$.

$\nabla f(x,y) \overset{!}{=} 0$ → lo impongo, per trovare i punti critici di f in $\{y \le 2x\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \cancel{2}(x^2+y^2-20) + (2x-y)\cancel{2}x \overset{!}{=} 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -(x^2+y^2-20) + (2x-y)2y \overset{!}{=} 0$$

+

$$\underbrace{(2x-y)}(x+2y) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = -2y$$

(escludo che si annulli, altrimenti sono sulla retta $y = 2x$ e f vale 0)

$-4y^2 - y^2 + 20 - 8y^2 - 2y^2 = 0$

$15y^2 = 20 \Leftrightarrow y^2 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow y = \pm\frac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow x = \mp\frac{4}{\sqrt{3}}$

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f = f\left(\left(\frac{4}{\sqrt{3}}, -\frac{2}{\sqrt{3}}\right)\right) = \frac{10}{\sqrt{3}} \cdot \frac{20(-2)}{3} = -\frac{400}{3\sqrt{3}}.$$

(b) Non c'è max assoluto.

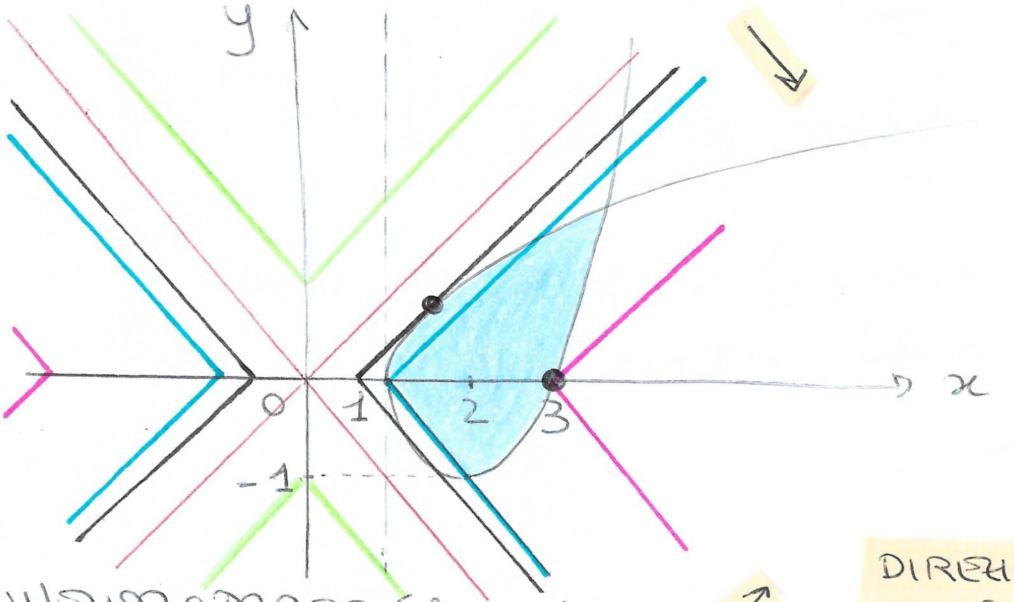
Il min. assoluto è $-\frac{400}{3\sqrt{3}}$, assunto in $\left(\pm\frac{4}{\sqrt{3}}, \mp\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Tali minimi sono anche relativi.

I punti $\{(x,2x) \mid -2 < x < 2\}$ sono punti di massimo relativo, perché lì f vale 0, mentre appena fuori dalla retta è <0, essendo $x^2+y^2-20 < 0$, $|2x-y| > 0$. Analog. $\{(x,2x) \mid x < -2 \vee x > 2\}$ sono punti di minimo relativo.

(2) $f(x,y) = 2^{|x|-|y|}$

$$\Omega = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1-x \le y \le \sqrt{x-1},\ y \ge x^2-4x+3\}.$$



curve di livello:

$y = x + c$

nel 1° quadrante e simmetrie assiali negli altri

DIREZIONE DI CRESCITA DI f, AL VARIARE DELLE CURVE DI LIVELLO

PER WEIERSTRASS (f CONTINUA SU Ω COMPATTO) $\exists$ MAX, MIN GLOBALI.

▷ CERCO IL PUNTO IN CUI LA CURVA DI LIVELLO NERA $y = x + c$ È TANGENTE A $y = \sqrt{x-1}$:

$$\begin{cases} y = x + c \\ y = \sqrt{x-1} \rightsquigarrow x = y^2+1 \end{cases} \Rightarrow y^2 - y + 1 + c = 0$$

$$\Delta = 1 - 4 - 4c = -3 - 4c \overset{!}{=} 0$$

[LO IMPONGO NULLO, AFFINCHÉ C'È UN SOLO PUNTO DI TANGENZA]

$$c = -3/4$$

IN QUEL PUNTO f VALE $2^{x-y} = 2^{-c} = 2^{3/4}$.

[SE SI VUOLE TROVARE ESPLICITAMENTE TALE PUNTO DI TANGENZA:

$$\begin{cases} y = x - \frac{3}{4} \\ x = y^2+1 \end{cases} \Rightarrow y^2 - y + \frac{1}{4} = 0 \rightarrow y = \frac{1 \pm 0}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2} + \frac{3}{4} = \frac{5}{4}$$

QUINDI IL PUNTO È $(\frac{5}{4}, \frac{1}{2})$, DOVE $f(\frac{5}{4},\frac{1}{2}) = 2^{3/4}$.]

▷ OSSERVO CHE NEL PUNTO $(3,0)$ LA CURVA DI LIVELLO ROSA $y = x + c$ INTERSECA $y = x^2 - 4x + 3$:

$$f(3,0) = 2^3 = 8.$$

▷ OSSERVO CHE LA CURVA DI LIVELLO AZZURRA SI SOVRAPPONE AL BORDO DI Ω DETERMINATO DA $y = 1 - x$:

$$f(x, 1-x) \overset{y<0}{=} 2^{x+1-x} = 2,$$

QUINDI, OSSERVANDO LA DIREZIONE IN CUI CRESCONO LE CURVE DI LIVELLO, VEDIAMO CHE:

- $\max\limits_{\Omega} f = \sup\limits_{\Omega} f = f(3,0) = 8$
- $\min\limits_{\Omega} f = \inf\limits_{\Omega} f = f(\frac{5}{4}, \frac{1}{2}) = 2^{3/4}$
- I PUNTI $\{(x, 1-x) \mid 1 < x \leq 2\}$ SONO PUNTI DI MINIMO LOCALE PER f, IN CUI f VALE 2. ■

③ $f(x,y) = \log(x^3+1+y^4) - e^{x^4+2y^4}$ $\quad (0,0)$

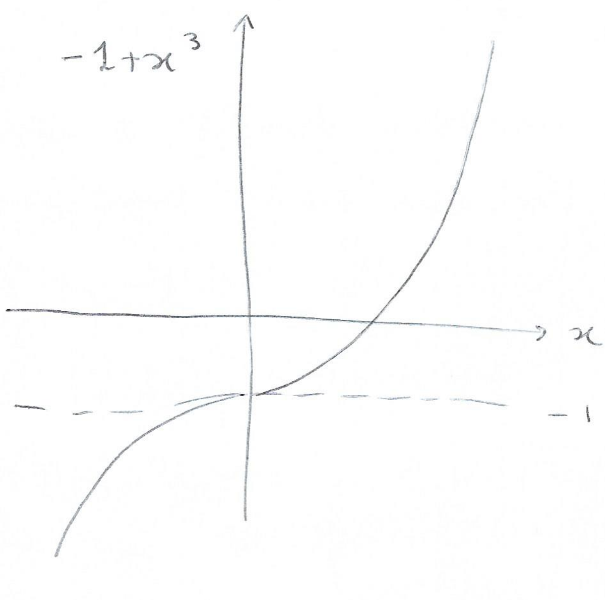
Poiché f contiene espressioni di ordine maggiore di 2 in x, y, allora

$$\nabla f(0,0) = \underline{0}, \quad Hess(f)_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Precisamente, il polinomio di Taylor di f in $(0,0)$ arrestato al terzo ordine è

$$P_3(x,y) = -1 + x^3$$

Quindi $(0,0)$ non è né punto di massimo né punto di minimo locale per f. ■



(4) $f(x,y,t) = -x^2 - 2xy - 2y^2 + 2y - 5e^{t^2}$

$\Omega = \text{DOMINIO} = \mathbb{R}^2$

$$\inf_{\mathbb{R}^2} f = \lim_{x \to +\infty} f(x,0) = -\infty.$$

$$f(x,y,t) = g(x,y) + h(t)$$

per $g(x,y) := -x^2 - 2xy - 2y^2 + 2y$, $h(t) := -5e^{t^2}$.

$$\sup_{\mathbb{R}^2} h = h(0) = -5.$$

$$\nabla g(x,y) = (-2x-2y, -2x-4y+2) \overset{!}{=} 0$$

$$\begin{cases} y = -x \\ -x + 2x + 2 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 \\ x = -1 \end{cases} \longrightarrow (-1,1)$$

$$\text{Hess}(f)(-1,1) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}$$

La funzione ~~f~~ è concava, quindi il punto stazionario $(-1,1)$ è punto di massimo assoluto.

$$\Rightarrow \sup_{\mathbb{R}^2} g = g((-1,1)) = -1 + 2 - \cancel{2} + \cancel{2} = 1.$$

Quindi

$$\sup_{\mathbb{R}^2} f = \sup_{\mathbb{R}^2} g + \sup_{\mathbb{R}^2} h = 1 - 5 = -4. \quad \blacksquare$$

(5) $f(x,y,t) = 4y^3 + 6t^2 - 3tx + x^2 + 8x - 4y$

$$\sup_{\mathbb{R}^3} f = \lim_{y \to +\infty} f(0,y,0) = +\infty$$

$$\inf_{\mathbb{R}^3} f = \lim_{y \to -\infty} f(0,y,0) = -\infty .$$

$$\nabla f(x,y,t) = \left(-3t + 2x + 8,\ 12y^2 - 4,\ 12t - 3x\right) \overset{!}{=} \underline{0}$$

$$\begin{cases} -3t + 8t + 8 = 0 \\ y^2 = 1/3 \\ x = 4t \end{cases} \implies \left(-\frac{32}{5}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{8}{5}\right)$$

$$\mathrm{Hess}(f)(x,y,z) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 24y & 0 \\ -3 & 0 & 12 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Hess}(f)\left(-\frac{32}{5}, \pm\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{8}{5}\right) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & \pm 8\sqrt{3} & 0 \\ -3 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$(1/\sqrt{3})$

$$\begin{cases} 2 > 0 \\ \det\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 8\sqrt{3} \end{bmatrix} > 0 \\ \det\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & 8\sqrt{3} & 0 \\ -3 & 0 & 12 \end{bmatrix} = 8\sqrt{3}\,(2 \cdot 12 - 9) > 0 \end{cases} \implies \left(-\frac{32}{5}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{8}{5}\right) \text{ punto di min. locale}$$

$(-1/\sqrt{3})$

$$0 \overset{!}{=} \det\begin{bmatrix} 2-\lambda & 0 & -3 \\ 0 & -8\sqrt{3}-\lambda & 0 \\ -3 & 0 & 12-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (2-\lambda)(-8\sqrt{3}-\lambda)(12-\lambda) - 9(-8\sqrt{3}-\lambda) =$$

$$= -(8\sqrt{3}+\lambda)(\lambda^2 - 14\lambda + 15)$$

$$\lambda_{1,2} = 7 \pm \sqrt{34} > 0, \quad \lambda_3 = -8\sqrt{3} < 0$$

$$\implies \left(-\frac{32}{5}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{8}{5}\right) \text{ punto di sella.}$$

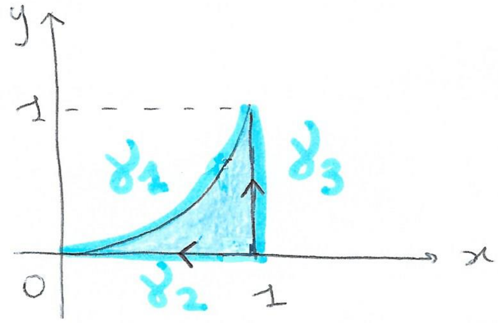
<u>Nota</u>: Nei casi $(1/\sqrt{3})$ e $(-1/\sqrt{3})$ ho usato due modi diversi per studiare la natura del punto critico, ma avrei potuto usare lo stesso.

⑥ $f(x,y) = \displaystyle\int_{x^2}^{y} t e^{-t} \log(1+t)\, dt$

$$\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le x^2\}$$

f continua su Ω compatto

$\Rightarrow$ (Weierstrass) $\exists$ max / min di f su Ω.



$$\nabla f(x,y) = \left(-2x^3 e^{-x^3} \log(1+x^3),\ y e^{-y} \log(1+y)\right) = \underline{0} \text{ SSE } (x,y) = \underline{0}$$

$\Rightarrow$ I max / min sono sul bordo $\partial\Omega$.

Osservo che $f(x, x^2) = 0 \quad \forall x \in [0,1]$, quindi $\{(x,x^2) \mid 0 \le x \le 1\}$ sono punti di max globale (e locale) di f su Ω (essendo f l'integrale di una funzione strettam. positiva tra due estremi x^2 e y, con $x^2 \ge y$ in Ω, dunque $f \le 0$ in Ω).

~~cons $\{(x,0) \mid 0 \le x \le 1\} \Rightarrow f(x,0) =: g(x)$~~

Siccome la prima componente di $\nabla f(x,y)$ è < 0 in Ω allora f cresce verso sinistra lungo γ_2.

Siccome la seconda componente di $\nabla f(x,y)$ è > 0 in Ω allora f cresce verso l'alto lungo γ_3.

$\Rightarrow$ $(1,0)$ è punto di minimo globale (e locale) di f in Ω.

Pertanto

$$\sup_{\Omega} f = \max_{\Omega} f = f((0,0)) = 0$$

$$\inf_{\Omega} f = \min_{\Omega} f = f((1,0)) =: \gamma \in \mathbb{R}$$

⑦ $f(x,y) = \dfrac{(x+y)^3}{3}$

(a) $\Omega = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \underbrace{\frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2}_{=:\, F(x,y)} = 0 \right\}$

Ω è chiuso (controimmagine del chiuso $\{0\} \subset \mathbb{R}$ tramite F continua: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$)

e limitato

INFATTI Fisso $x \in \mathbb{R}$. Allora

$$y^2 + xy + \frac{x^2-4}{2} = 0$$

$$y_{1,2} = \frac{-x \pm \sqrt{8-x^2}}{2} \Rightarrow 8-x^2 \geq 0$$

$$-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$$

$$\min\{y_1, y_2\} \leq y \leq \max\{y_1, y_2\}$$

$$\Rightarrow \Omega \subseteq [-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}] \times [\min\{y_1,y_2\}, \max\{y_1,y_2\}]$$

Quindi Ω compatto. Essendo f continua su Ω, allora (Weierstrass) $\exists$ max/min di f su Ω.

$\mathrm{Jac}\, F(x,y) = (x+y,\ x+2y) \rightarrow$ ha rango $=1$ SSE $(x,y) \neq (0,0)$ $\overset{\Omega}{\notin}$

$G(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \cdot F(x,y)$

$\nabla G(x,y,\lambda) = \left((x+y)^2 + \lambda x + \lambda y,\ (x+y)^2 + \lambda x + 2\lambda y,\ \frac{x^2}{2} + xy + y^2 - 2\right) \overset{!}{=} 0$

$\Rightarrow \lambda y = 0$

* $\underline{\lambda = 0}$: $(x+y)^2 = 0 \Leftrightarrow y = -x$

$\frac{x^2}{2} - \cancel{x^2} + \cancel{x^2} - 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow \begin{cases} y = \mp 2 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

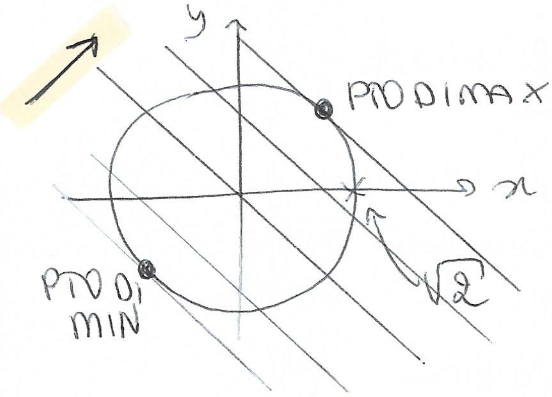
* $\underline{\lambda \neq 0}$: $y = 0 \Rightarrow \frac{x^2}{2} = 2 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2$

$f((\pm 2, \mp 2)) = 0$, $f((\pm 2, 0)) = \pm \frac{8}{3}$

$\Rightarrow (2,0)$ punto di max. di f in Ω

$(-2,0)$ punto di min. di f in Ω.

(b) Si può procedere come nel punto (a), oppure si può usare il metodo delle curve di livello.



$f \equiv \text{cost} \iff y = -x + c$

DIR. DI CRESCITA

[$\{x^2+y^2=2\}$ COMPATTO PERCHÉ CHIUSO E LIMITATO $(\subset [-2,2]\times[-2,2])$]

Impongo $\begin{cases} y = -x + c \\ x^2+y^2 = 2 \end{cases} \Rightarrow 2x^2 - 2cx + c^2 - 2 = 0$

$$\frac{\Delta}{4} = c^2 - 2c^2 + 4 = 4 - c^2 \overset{!}{=} 0 \iff c = \pm 2$$

(CONDIZIONE DI TANGENZA)

Il max corrisponde a $c = +2 \Rightarrow (x,y) = (1,1)$

Il min corrisponde a $c = -2 \Rightarrow (x,y) = (-1,-1)$. ∎

(8) $f(x,y) = (y^2 - x)\,e^{x+y}$

(a) $\sup_{\mathbb{R}^2} f = \lim_{y \to +\infty} f(0,y) = +\infty$

$\inf_{\mathbb{R}^2} f = \lim_{x \to +\infty} f(x,0) = -\infty$.

$\nabla f(x,y) = \left((-1 + y^2 - x)e^{x+y},\ (2y + y^2 - x)e^{x+y}\right) \overset{!}{=} \underline{0}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -1 + \cancel{y^2} = 2y + \cancel{y^2} \\ x = -1 + \frac{1}{4} = -\frac{3}{4} \end{cases} \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}$

$$\mathrm{Hess}(f)\left(-\tfrac{3}{4}, -\tfrac{1}{2}\right) = \left.\begin{bmatrix} (-2+y^2-x)e^{x+y} & (2y-1+y^2-x)e^{x+y} \\ (-1+2y+y^2-x)e^{x+y} & (2+4y+y^2-x)e^{x+y} \end{bmatrix}\right|_{(x,y)=\left(-\frac{3}{4},-\frac{1}{2}\right)} =$$

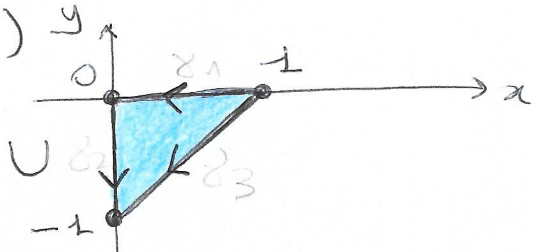
$$= \begin{bmatrix} -e^{-5/4} & -e^{-5/4} \\ -e^{-5/4} & e^{-5/4} \end{bmatrix}$$

Tale matrice ha determinante $= -2e^{-5/4} < 0$ quindi (essendo il determinante il prodotto degli autovalori) gli autovalori di tale matrice sono di segno discorde, quindi la matrice è indefinita ~~[illegible]~~ e il punto

$$\left(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right)$$

è di sella. ~~[illegible]~~ per f.

(b)



Per Weierstrass, $\exists$ max/min di f in U e per il punto (a) tali max/min sono sul bordo ∂U.

γ_1) $f(x,0) = -xe^x =: f_1(x)$, $\frac{\partial}{\partial x} f_1(x) = (-1-x)e^x < 0\ \forall x \in [0,1]$

γ_2) $f(0,y) = y^2 e^y =: f_2(y)$, $\frac{\partial}{\partial y} f_2(y) = (2y + y^2)e^y < 0\ \forall y \in [-1,0]$

γ_3) $f(x, x-1) = (x^2 - 3x + 1)e^{2x-1} =: f_3(x)$

$\frac{\partial}{\partial x} f_3(x) = (2x - 3 + 2x^2 - 6x + 2)e^{2x-1} = (2x^2 - 4x - 1)e^{2x-1}$

$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+2}}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{6}}{2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f_3(x) < 0\ \forall x \in [0,1]$

$\Rightarrow$ (1,0) punto di minimo, (0,−1) punto di massimo