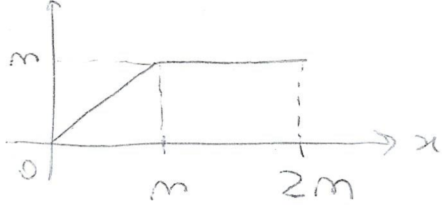
① (a) $f_m(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \le x \le m \\ m & \text{se } m < x < 2m \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



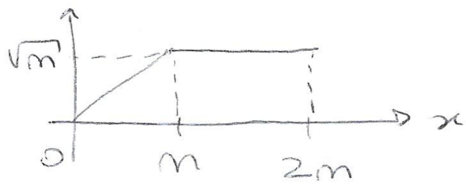
$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{m\to\infty} f_m(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \ge 0 \\ 0 & \text{se } x < 0 \end{cases} =: f(x)$

$\Rightarrow f_m$ conv. puntualm. a f in $\mathbb{R}$.

$\lim_{m\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_m(x) - f(x)| = +\infty \Rightarrow$ non c'è conv. ~~unif~~ unif. su $\mathbb{R}$

$\forall \alpha > 0 \quad \lim_{m\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,\alpha]} |f_m(x) - f(x)| = 0 \Rightarrow$ conv. unif. su $(-\infty, \alpha]$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(b) $f_m(x) = \begin{cases} x/\sqrt{m} & \text{se } 0 \le x \le m \\ \sqrt{m} & \text{se } m < x < 2m \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$

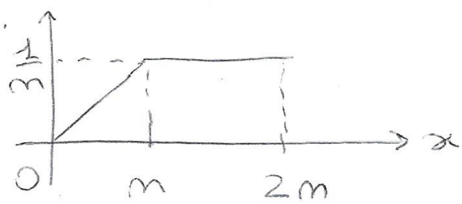


$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{m\to\infty} f_m(x) = 0 =: f(x) \Rightarrow f_m$ conv. puntualm. a f in $\mathbb{R}$.

$\lim_{m\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_m(x)| = \lim_{m\to\infty} \sqrt{m} = +\infty \Rightarrow$ no conv. unif. su $\mathbb{R}$.

$\forall \alpha > 0 \quad \lim_{m\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,\alpha]} |f_m(x)| = 0 \Rightarrow$ conv. unif. su $(-\infty, \alpha]$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

(c) $f_m(x) = \begin{cases} x/m^2 & \text{se } 0 \le x \le m \\ 1/m & \text{se } m < x \le 2m \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$



$\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{m\to\infty} f_m(x) = 0 =: f(x) \Rightarrow$ conv. puntuale $\forall x \in \mathbb{R}$.

$\lim_{m\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_m(x)| = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} = 0 \Rightarrow$ conv. unif. su $\mathbb{R}$. ■

② $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^5 e^{nx^5} = x^5 \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{x^5}\right)^n =: f(x)$

(a) Fisso $x \in \mathbb{R}$. Allora

[SE $x=0$ ALLORA $f(0)=0$. QUINDI ORA CONSIDERO $x \neq 0$.]

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{x^5}\right)^n$$

è una serie geometrica di ragione e^{x^5} che quindi converge se e solo se $|e^{x^5}| < 1$ ossia $x < 0$. In tal caso

$$f(x) = x^5\left(\frac{1}{1-e^{x^5}} - 1\right) = x^5 \, \frac{e^{x^5}}{1-e^{x^5}}.$$

Pertanto $A = (-\infty, 0]$ e $f(x) = \begin{cases} x^5 \dfrac{e^{x^5}}{1-e^{x^5}} & \text{se } x < 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$

(b) $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} x^5 \frac{e^{x^5}}{1-e^{x^5}} = \lim_{x \to 0^-} \cancel{x^5} \frac{e^{x^5}}{-\cancel{x^5}} = -1 \neq 0 = f(0)$

Quindi f <u>non</u> è continua in $x = 0$.

Se la serie convergesse unif. in A allora f sarebbe continua in $x=0$. $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ~~La~~ serie <u>non</u> converge unif. in A.

MODO ALTERNATIVO:

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{x \in (-\infty, 0]} \Big| \underbrace{\sum_{n=1}^{N} f_n(x) - f(x)}_{\substack{=0 \\ \text{PER } x=0, \\ \text{QUINDI CONSIDERO } x\neq 0}} \Big| =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sup_{x \in (-\infty, 0)} \left| x^5 \left(\sum_{n=1}^{N} e^{nx^5} - \frac{1}{1-e^{x^5}} + 1 \right) \right| =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \sup_{x \in (-\infty, 0)} -x^5 \left| \frac{\cancel{1} - e^{(N+1)x^5}}{1-e^{x^5}} - \cancel{\frac{1}{1-e^{x^5}}} \right| \geq 1.$$

③ $f_n(x) = n^2 \log\left(1 + \frac{x^{3/2}}{n^2}\right) \quad \forall x \geq 0$.

(a) Fisso $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x = 0 \\ x^{3/2} & \text{se } x \neq 0 \end{cases} = x^{3/2}$$

$\Rightarrow f_n$ converge puntualmente a $f(x) := x^{3/2} \ \forall x \in \mathbb{R}$.

(b) $\lim_{n\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| = +\infty$

$\forall \alpha > 0 \quad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(-\infty,\alpha]} |f_n(x) - f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(\alpha) - f(\alpha)| = 0$

$\Rightarrow f_n$ converge uniformemente a f su $(-\infty, \alpha] \ \forall \alpha > 0$.

④ $f_n(x) = \sqrt{n}\, x^n \log\left(1 + \frac{x^2}{\sqrt{n}}\right)$

(a) $\forall x \in (0,1) \quad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \cancel{\sqrt{n}}\, x^n \cdot \frac{x^2}{\cancel{\sqrt{n}}} = 0$

$\Rightarrow \int_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) dx = 0$.

D'altra parte: $\forall x \in (0,1)$

$0 \leq f_n(x) \leq \cancel{\sqrt{n}}\, x^n \cdot \frac{x^2}{\cancel{\sqrt{n}}} = x^{n+2}$

$\Rightarrow 0 \leq \int_0^1 f_n(x)\, dx \leq \int_0^1 x^{n+2}\, dx = \frac{1}{n+3}$

$\Rightarrow 0 \leq \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+3} = 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\, dx = 0$. Quindi i due termini sono uguali.

(b) $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } |x| < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ +\infty & \text{se } x > 1 \\ \nexists & \text{se } x \leq -1 \end{cases}$

(Ho conv. puntuale in $(-1,1]$.)

Siccome $f_n \in \mathcal{C}^0((-1,1])$,
allora se f_n convergesse unif. in $(-1,1]$ si avrebbe che $f \in \mathcal{C}^0((-1,1])$
e questo è falso, perché $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \neq 1 = f(1)$.
Quindi <u>non</u> c'è conv. uniforme in $(-1,1]$.

$\forall a \in (0,1)$ $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-a,a]} |f_n(x)| \leq \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[-a,a]} \sqrt{n}\, x^n \frac{x^2}{\sqrt{n}} =$

$= \lim_{n\to\infty} a^{n+2} = 0 \Rightarrow$ conv. unif. su $[-a,a]$ $\forall a \in (0,1)$

Oss: Non si può fare di meglio:

* Guardo vicino a -1:
Se ci fosse conv. unif. in $(-1, c]$ (per $c \in (-1,1)$)
allora il Teorema del doppio limite implicherebbe
che
$$\left\{ \ell_n := \lim_{x \to (-1)^+} f_n(x) = (-1)^n \sqrt{n} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right\}$$
è di Cauchy (e quindi convergente, in $\mathbb{R}$).
Ma $\nexists \lim_{n \to +\infty} \ell_n = \lim_{n \to +\infty} (-1)^n$.

Quindi non c'è conv. unif. in $(-1, c]$.

* Guardo vicino a 1:
Se ci fosse conv. unif. in $[c, 1)$ (per $c \in (-1,1)$)
allora il Teorema del doppio limite implicherebbe
che
$$\underbrace{\lim_{n \to \infty} \underbrace{\lim_{x \to 1^-} f_n(x)}_{\sqrt{n} \log\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}}_{1} = \underbrace{\lim_{x \to 1^-} \underbrace{\lim_{n \to \infty} f_n(x)}_{f(x)}}_{0}$$

DIVERSI!

Quindi non c'è conv. unif. in $[c, 1)$. ∎

(5) $\alpha > 0$ $\quad \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3x)^n}{(n+1)\log^{\alpha} n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$

per $a_n := \dfrac{3^n}{(n+1)\log^{\alpha} n}$.

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{3^{n+1}}{(n+2)\log^{\alpha}(n+1)} \cdot \frac{(n+1)\log^{\alpha} n}{3^n} \xrightarrow{n \to +\infty} 3 \Longrightarrow R = \frac{1}{3}.$$

RAGGIO DI CONVERGENZA

Quindi ho sicuramente $\begin{cases} \text{conv. unif. su } [a,b] & \text{per } -\frac{1}{3} < a < b < \frac{1}{3} \\ \text{conv. semplice su } \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{cases}$

▷ $x = 1/3$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)\log^{\alpha} n} < \infty$ SSE $\alpha > 1$.

▷ $x = -1/3$: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(-\frac{1}{3}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(n+1)\log^{\alpha} n} < \infty$ $\forall \alpha > 0$ (LEIBNIZ)

Quindi

- $\alpha > 1$: conv. puntuale su $[-1/3, 1/3]$
  conv. unif. su $[a,b]$ per $-\frac{1}{3} \leq a < b \leq \frac{1}{3}$
- $\alpha \in (0,1]$: conv. puntuale su $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$
  conv. unif. su $[a,b]$ per $-\frac{1}{3} \leq a < b < \frac{1}{3}$. ∎

⑥ $\cos x = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$ conv. unif. su $\mathbb{R}$.

$\cos x - 1 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!}$

$$\int_{-1/2}^{0} \frac{\cos x^2 - 1}{x^3} dx = \int_{-1/2}^{0} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \frac{x^{4m-3}}{(2m)!} dx =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \int_{-1/2}^{0} x^{4m-3} dx = -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} \frac{(1/2)^{4m-2}}{4m-2} =: S$$

dove $S = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m a_m$ per $a_m := -\frac{1}{(2m)!} \frac{(1/2)^{4m-2}}{4m-2}$.

Per il Teorema di Leibniz, si ha

$$|S - S_N| \leq |a_{N+1}| \quad \text{per } S_N := \sum_{m=1}^{N} (-1)^m a_m .$$

$\boxed{N=1}$ $|a_2| = \frac{1}{4!} \frac{(1/2)^6}{6} < \frac{1}{100}$

Quindi una approssimazione cercata è

$$S_1 = (-1)^1 a_1 = +\frac{1}{2} \cdot \frac{(1/2)^2}{2} = \frac{1}{16}$$

(7) $f(x) := \sum_{m=2}^{+\infty} (-1)^m \frac{m x^m}{(m+1)^2} = \sum_{m=2}^{+\infty} a_m x^m$, $a_m := \frac{(-1)^m m}{(m+1)^2}$.

(a) $\frac{|a_{m+1}|}{|a_m|} = \frac{m+1}{(m+2)^2} \cdot \frac{(m+1)^2}{m} = \frac{(m+1)^3}{m(m+2)^2} \xrightarrow{m\to+\infty} 1 = R$ RAGGIO DI CONVERGENZA.

▷ $\underline{x=1}$: $\sum_{m=2}^{+\infty} a_m 1^m = \sum_{m=2}^{+\infty} (-1)^m \frac{m}{(m+1)^2} < \infty$ per Leibniz.

▷ $\underline{x=-1}$: $\sum_{m=2}^{+\infty} a_m (-1)^m = \sum_{m=2}^{+\infty} \frac{m}{(m+1)^2} = +\infty$ perche' si comporta asintoticam. come la serie armonica, che diverge.

Quindi ho

- conv. semplice / puntuale su $(-1,1]$
- conv. uniforme su $[a,b]$ per $-1<a<b\leq 1$.

(b) $f(0)=0$. Sia $x\neq 0$. $\frac{d}{dx}x^m = m x^m$, $\int_0^x t^m dt = \frac{x^{m+1}}{m+1}$.

$$f(x) = \sum_{m\geq 2} (-1)^m \frac{m x^m}{(m+1)^2} = \sum_{m\geq 2} (-1)^m \frac{x}{(m+1)^2} \frac{d}{dx} x^m =$$

$$= \sum_{m\geq 2} (-1)^m \frac{x}{m+1} \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\int_0^x t^m dt\right] = \leftarrow \text{conv. unif.}$$

$$= x \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{t} \sum_{m\geq 2} (-1)^m \frac{t^{m+1}}{m+1} dt\right] =$$

$$\left(\log(1+t) = \sum_{m\geq 1} (-1)^{m+1} \frac{t^m}{m} = \sum_{m\geq 0} (-1)^m \frac{t^{m+1}}{m+1}\right)$$

$$= x \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{t}\left(\log(1+t) - t + \frac{t^2}{2}\right) dt\right] =$$

volendo, si risolve come segue $\rightarrow$ $= x \frac{d}{dx}\left[\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\log(1+t)}{t} dt \cancel{-1} + \frac{x}{4}\right] =$

$$= -\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\log(1+t)}{t} dt + \frac{\log(1+x)}{x} + \frac{x}{4}.$$

Allo stesso modo

$$f(x) = \sum_{m\geq 2} (-1)^m \frac{m}{m+1} \frac{1}{x}\int_0^x t^m dt =$$

$$= \sum_{m\geq 2} (-1)^m \frac{1}{m+1} \frac{1}{x}\int_0^x t\left(\frac{d}{dt} t^m\right) dt = \leftarrow \text{conv. unif.}$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^x t \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{t}\left(\sum (-1)^m \frac{t^{m+1}}{m+1}\right)\right] dt =$$

$$= \frac{1}{x}\int_0^x t \, \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{t}\left(\log(1+t) - t + \frac{t^2}{2} \right) \right] dt = \leftarrow$$ volendo, si risolve come segue

$$= \frac{1}{x}\int_0^x t \left[\frac{\frac{t}{1+t} - \log(1+t)}{t^2} + \frac{1}{2} \right] dt = \frac{1}{x}\int_0^x \left(\frac{1}{1+t} - \frac{\log(1+t)}{t} + \frac{t}{2} \right) dt =$$

$$= \frac{\log(1+x)}{x} - \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\log(1+t)}{t}\, dt + \frac{x}{4}.$$

(c) $f(x) = \sum_{n \geq 2} a_n x^n$

$$S := \int_0^{1/2} f(x)\, dx \overset{\text{conv. unif.}}{=} \sum_{n\geq 2} (-1)^n \frac{n}{(n+1)^2} \int_0^{1/2} x^n \, dx = \sum_{n \geq 2} (-1)^n \underbrace{\frac{n}{(n+1)^3} \frac{1}{2^{n+1}}}_{=: b_n}$$

Per il Teorema di Leibniz,

$$\left| S - \sum_{n=2}^{N} (-1)^n b_n \right| \leq b_{N+1}.$$

$\boxed{N=2}$ $b_3 = \frac{3}{4^3} \cdot \frac{1}{2^4} > 10^{-3}$

$\boxed{N=3}$ $b_4 = \frac{4}{5^3} \cdot \frac{1}{2^5} = 10^{-3}$

$\boxed{N=4}$ $b_5 = \frac{5}{6^3} \cdot \frac{1}{2^6} < 10^{-3}$.

L'approssimazione cercata è quindi

$$\sum_{n=2}^{4} (-1)^n b_n = b_2 - b_3 + b_4 = \frac{2}{3^3} \cdot \frac{1}{2^3} - \frac{3}{4^3} \cdot \frac{1}{2^4} + \frac{4}{5^3} \cdot \frac{1}{2^5} =$$

$$= \frac{1}{108} - \frac{3}{1024} + \frac{1}{1000} \simeq 0.0073.$$

$\blacksquare$