ECONOMIA APPLICATA M - LEZIONE 4

Titolo nota ~~09/12/2018~~

6/12/19

MODELLI DINAMICI

$$y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \ldots + \beta_m X_{t-m} + U_t$$

$$= \alpha + \sum_{j=0}^{m} \beta_j X_{t-j} + U_t$$

$$\beta_j = \frac{\partial y_t}{\partial X_{t-j}} \quad , \quad j = 0 \ldots m \quad \left(\text{EFFETTI MARGINALI} \right)$$

FUNZIONI DI RISPOSTA A UN IMPULSO (IRF)

SHOCK TEMPORANEO

$$x_t = \begin{cases} \bar{x} & \text{SE } t \neq t_0 \\ \bar{x}+1 & \text{SE } t = t_0 \end{cases} \quad , \; t_0 > m+1$$

$\Downarrow$

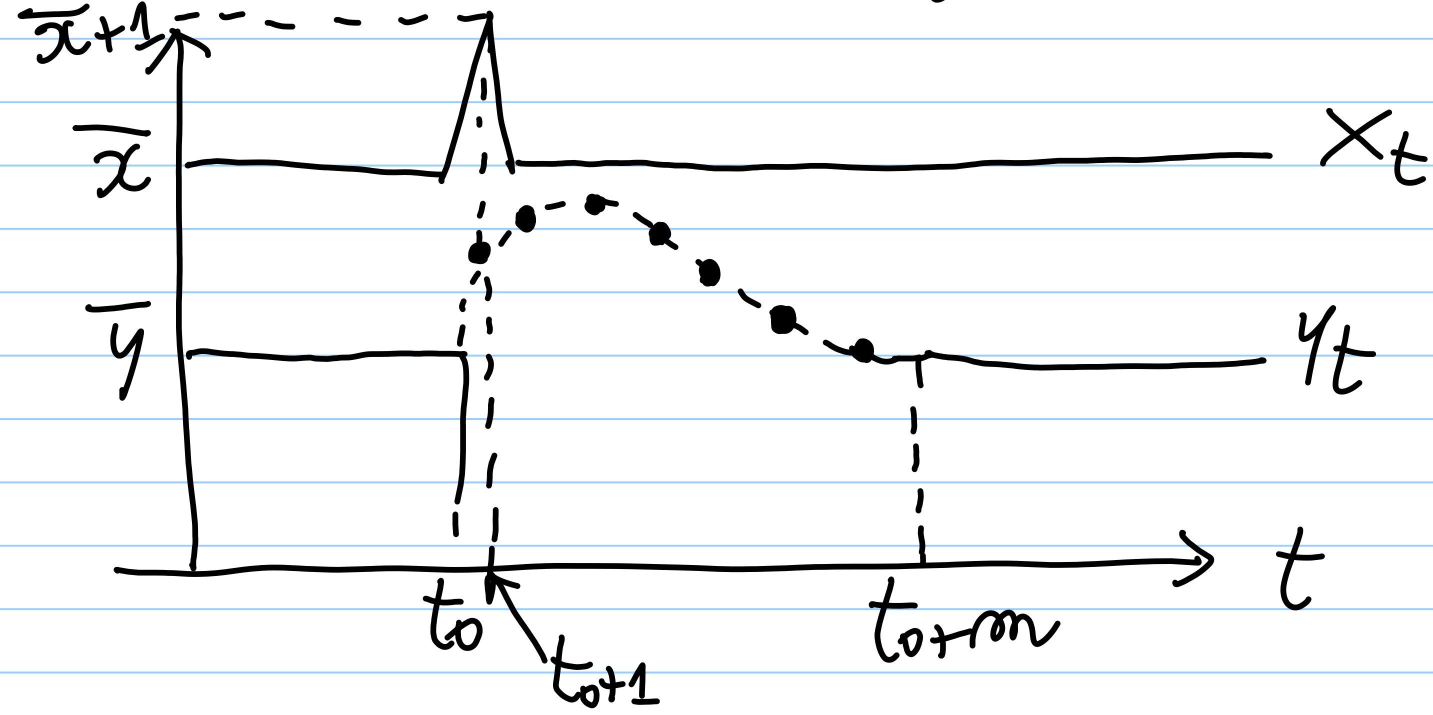
LO SCOSTAMENTO DI y_t DAL SUO EQUILIBRIO DI LUNGO PERIODO $\bar{y} = \alpha + \sum_j \beta_j \bar{x}$ AL TEMPO

$t = t_0 + j$ È DATO DAL PARAMETRO β_j

IPOTIZZANDO CHE L'ANDAMENTO DI β_j RISPETTO A j

SIA DESCRITTO DA :

L'ANDAMENTO DELLA IRF DI y_t È:



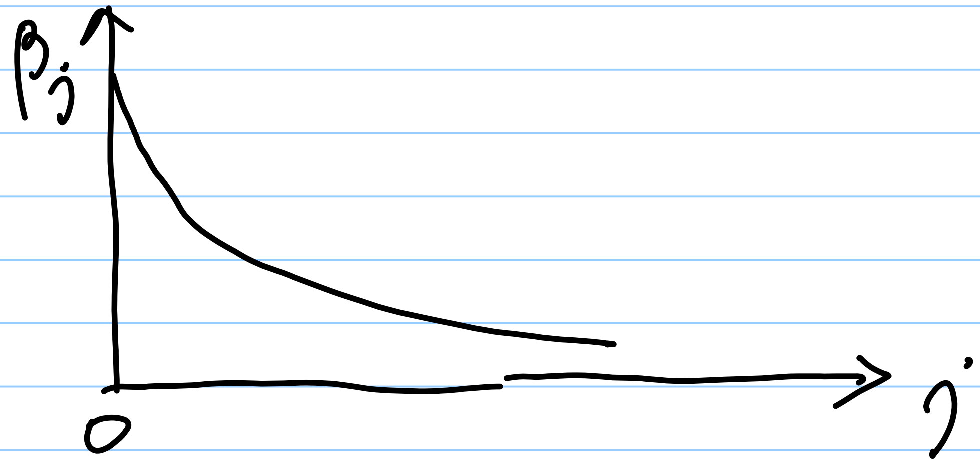
SHOCK PERMANENTE

$$x_t = \begin{cases} \bar{x} & \text{SE } t < t_0 \\ \bar{x}+1 & \text{SE } t \geq t_0 \end{cases}, \quad t_0 > m+1$$

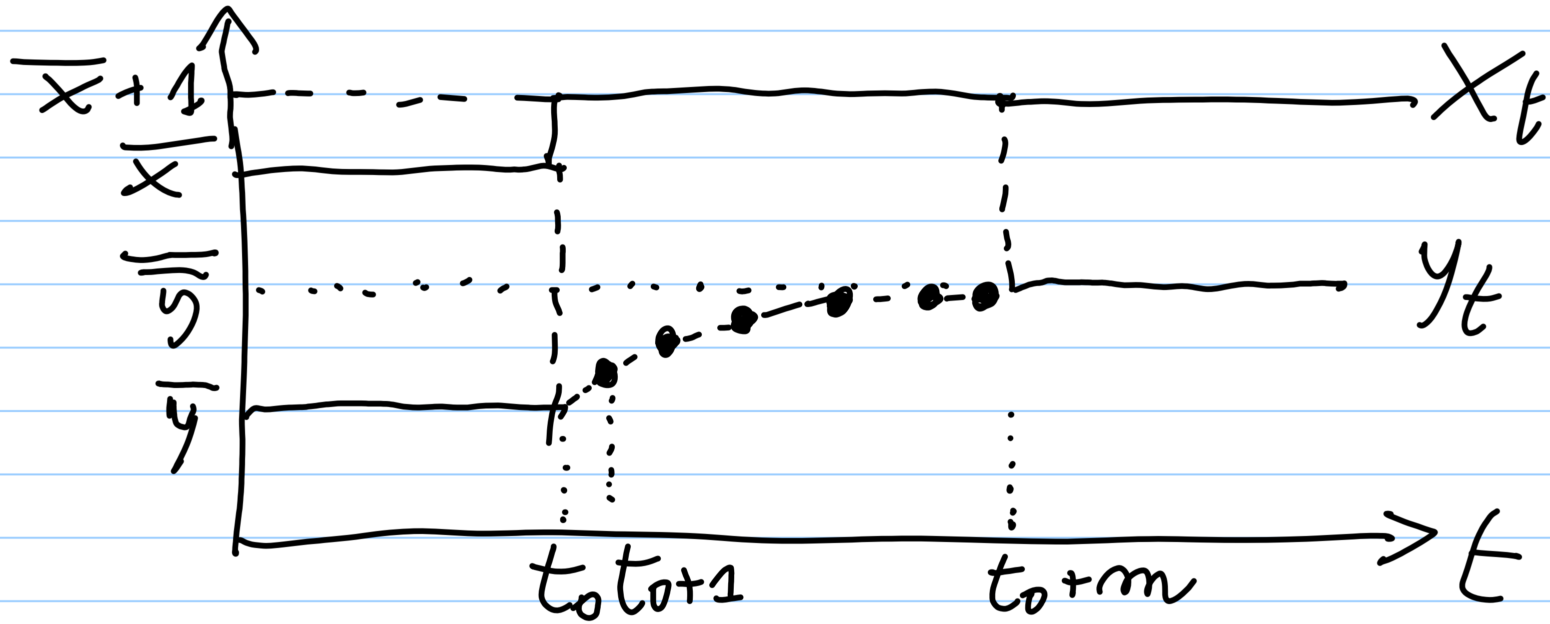
$\Downarrow$

IL LIVELLO DI y_t DOPO K PERIODI È DATO DALLA SOMMA PARZIALE $\beta_0 + \beta_1 + \dots + \beta_K$

IPOTIZZANDO CHE I PARAMETRI β_j ABBIANO IL SEGUENTE ANDAMENTO AL VARIARE DI j :



LA IRF DI y_t SARÀ COME SEGUE:



IN QUESTO CASO (SHOCK PERMANENTE)
DISTINGUIAMO TRA :

MOLTIPLICATORE DI <u>LUNGO PERIODO</u> :

$$\sum_{j=0}^{m} \beta_j$$

MOLTIPLICATORE <u>DI IMPATTO</u> : β_0

GENERALIZZAZIONE : $m \to \infty$

$$y_t = \alpha + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j X_{t-j} + v_t$$

DOVE, PER IPOTESI, $\sum_j \beta_j < \infty$,

CIOÈ $\beta_j \to 0$ PER $j \to \infty$

IN QUESTO NUOVO CONTESTO

DEFINIAMO :

$$\underline{\text{MEAN LAG}} = \frac{\sum_j j\,\beta_j}{\sum_j \beta_j}$$

j → LAG j-ESIMO

$\frac{\beta_j}{\sum_j \beta_j}$ → PESO RELATIVO DEL LAG j-ESIMO

MEDIAN LAG = N° DI PERIODI NECESSARI AFFINCHÉ L'AGGIUSTAMENTO DI Y_t AL SUO NUOVO LIVELLO DI LUNGO PERIODO SIA REALIZZATO PER METÀ (MEDIAN)

<u>PROBLEMA</u> = ANCHE SE m È FINITO, m PUÒ ESSERE COMUNQUE MOLTO GRANDE.

COME RIDURRE m?

<u>SOLUZIONE</u> = ESPRIMERE β_j IN FUNZIONE DI <u>POCHI</u> PARAMETRI.

ES. SOLUZIONE DI KOYCK:

$$\beta_j = \lambda^j \beta \quad , \quad j = 0, 1, \ldots$$

$$0 < \lambda < 1$$

$$y_t = \alpha + \beta x_t + \beta\lambda x_{t-1} + \beta\lambda^2 x_{t-2} + \dots$$
$$= \alpha + \beta\left(x_t + \lambda x_{t-1} + \lambda^2 x_{t-2} + \dots\right)$$

MOLTIPLICATORE DI IMPATTO : β

MOLTIPLICATORE DI LUNGO PERIODO : $\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j = \beta \sum_j \lambda^j =$
(SHOCK PERMANENTE)
$$= \beta \cdot \frac{1}{1-\lambda}$$

$$\text{MEAN LAG} = \frac{\sum_j j\beta_j}{\sum_j \beta_j} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

<u>PROVA</u> :

$$\frac{\sum_j j\beta_j}{\sum_j \beta_j} = \frac{\beta \sum_j j\lambda^j}{\beta \sum_j \lambda^j} \qquad \sum_j j\lambda^j \equiv S$$

$$S = \sum_j j\lambda^j = \lambda + 2\lambda^2 + 3\lambda^3 + 4\lambda^4 + \cdots$$

$$\lambda S = \lambda^2 + 2\lambda^3 + 3\lambda^4 + 4\lambda^5 + \dots$$

$$S - \lambda S = \lambda + 2\lambda^2 + 3\lambda^3 + 4\lambda^4 + \dots - \lambda^2 - 2\lambda^3 - 3\lambda^4 - 4\lambda^5 -$$

$$= \lambda + \lambda^2 + \lambda^3 + \lambda^4 + \dots$$

QUINDI:

$$S - \lambda S = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$ (SERIE GEOMETRICA)

DA CUI :

$$(1-\lambda) S = \frac{\lambda}{1-\lambda} \Rightarrow S = \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}$$

CONCLUDENDO :

$$\frac{\sum_j j \, \beta_j}{\sum_j \beta_j} = \frac{\beta S}{\beta \sum_j \lambda^j} = \frac{\beta \cdot \frac{\lambda}{(1-\lambda)^2}}{\beta \frac{1}{1-\lambda}} = \frac{\lambda}{1-\lambda}$$

IL PROBLEMA RIMANE !!

INFATTI, PUR AVENDO ESPRESSO I PARAMETRI β_j COME FUNZIONE DEI SOLI PARAMETRI β E λ, CIONONDIMENO IL N° DI RITARDI DI X RESTA TROPPO ELEVATO !!

SOLUZIONE:

ANCORA KOYCK, CON LA SEGUENTE TRASFORMAZIONE:

$$y_t = \alpha + \beta(X_t + \lambda X_{t-1} + \lambda^2 X_{t-2} + \ldots\ldots)$$

$$y_{t-1} = \alpha + \beta(X_{t-1} + \lambda X_{t-2} + \lambda^2 X_{t-3} + \ldots)$$

$$\lambda y_{t-1} = \lambda\alpha + \beta(\lambda X_{t-1} + \lambda^2 X_{t-2} + \lambda^3 X_{t-3} + \ldots)$$

QUASI-DIFFERENZA:

$$y_t - \lambda y_{t-1} = \alpha + \beta\left(x_t + \lambda x_{t-1} + \lambda^2 x_{t-2} + \dots +\right)$$
$$- \lambda\alpha - \beta\left(\lambda x_{t-1} + \lambda^2 x_{t-2} + \lambda^3 x_{t-3} + \dots\right)$$
$$= \alpha(1-\lambda) + \beta x_t$$

DA CUI:

$$\boxed{y_t = \alpha(1-\lambda) + \beta x_t + \lambda y_{t-1}} \quad ARDL(1,0)$$

MOLTIPLICATORE D'IMPATTO : $\frac{\partial y_t}{\partial x_t} = \beta$

MOLTIPLICATORE DI LUNGO PERIODO : DALLA SOLUZIONE DI STATO STAZIONARIO

$$y^* = \alpha(1-\lambda) + \beta x^* + \lambda y^*$$

$$(1-\lambda) y^* = \alpha(1-\lambda) + \beta x^* \longrightarrow y^* = \alpha + \frac{\beta}{1-\lambda} x^*$$

$$\frac{dy^*}{dx^*} = \frac{\beta}{1-\lambda}$$

GIUSTIFICAZIONI TEORICHE DEI MODELLI DINAMICI

I) AGGIUSTAMENTO PARZIALE

y_t^* = LIVELLO DESIDERATO / OTTIMALE DI y_t

FRIZIONI / RITARDI / COSTI IMPEDISCONO A y_t DI RAGGIUNGERE y_t^* IN UN SOLO PERIODO TEMPORALE

DEFINIAMO :

$y_t^* - y_{t-1}$ = VARIAZIONE "DESIDERATA", CIOÈ RICHIESTA PER RAGGIUNGERE IL LIVELLO y_t^* PARTENDO DA y_{t-1}.

LA VARIAZIONE "REALE" DI y_t È SOLO UNA FRAZIONE DELLA VARIAZIONE "DESIDERATA", E CIOÈ :

$$y_t - y_{t-1} = (1-\gamma)(y_t^* - y_{t-1}) \quad , \quad 0 < \gamma < 1$$

DA CUI: $y_t = (1-\gamma)\, y_t^* + \gamma\, y_{t-1}$

SE $\gamma \to 0$, ALLORA $y_t \to y_t^*$ (AGGIUSTAMENTO "RAPIDO")

SE $\gamma \to 1$, ALLORA $y_t \to y_{t-1}$ (AGGIUSTAMENTO "LENTO")

VISTO CHE y_t^* È IN GENERE NON OSSERVATA,
È RAGIONEVOLE IPOTIZZARE CHE y_t^* DIPENDA DA X_t:

$$y_t^* = \alpha + \beta X_t$$

DA CUI:

$$y_t = (1-\gamma)(\alpha + \beta X_t) + \gamma y_{t-1} =$$

$$\boxed{y_t = \alpha(1-\gamma) + \beta(1-\gamma) X_t + \gamma y_{t-1}}$$ (ANALOGO A ADL(1,0))

LA CORRISPONDENZA CON IL MODELLO DINAMICO CON INFINITI RITARDI È FACILE DA VERIFICARE:

$$y_t = \alpha(1-\gamma) + \beta(1-\gamma)x_t + \gamma y_{t-1}$$

$$y_{t-1} = \alpha(1-\gamma) + \beta(1-\gamma)x_{t-1} + \gamma y_{t-2}$$

$$y_{t-2} = \alpha(1-\gamma) + \beta(1-\gamma)x_{t-2} + \gamma y_{t-3}$$

$$\vdots$$

ATTRAVERSO SOSTITUZIONI RICORSIVE, TENENDO CONTO CHE $\gamma^m X_{t-m} \to 0$ PER $m \to \infty$, VISTO CHE $0 < \gamma < 1$, SI OTTIENE:

$$y_t = \alpha(1-\gamma)\sum_{j=0}^{\infty} \gamma^j + \beta(1-\gamma)\sum_{j=0}^{\infty} \gamma^j X_{t-j} =$$

$$= \alpha + \beta(1-\gamma)\sum_{j=0}^{\infty} \gamma^j X_{t-j}$$

N.B. AL SOLITO, MEAN LAG $= \gamma/(1-\gamma)$

DOMANDA: QUANTI PERIODI SONO NECESSARI PER COMPLETARE LA PROPORZIONE p DELL'AGGIUSTAMENTO DESIDERATO?

DOPO 1 PERIODO, $(1-\gamma)$ DELL'AGGIUSTAMENTO DESIDERATO È COMPLETATO; γ È ANCORA DA COMPLETARE

DOPO 2 PERIODI, $(1-\gamma)+(1-\gamma)\gamma = 1-\gamma^2$ DELL'AGGIUSTAMENTO DESIDERATO È COMPLETATO ; $\gamma \cdot \gamma = \gamma^2$ È ANCORA DA COMPLETARE

⋮

DOPO n PERIODI, $1-\gamma^n$ DELL'AGGIUSTAMENTO DESIDERATO È COMPLETATO.

PROPORZIONE DEL <u>GAP</u>

DEFINIAMO: $p = 1-\gamma^{n}$ N° DI PERIODI

DA CUI: $\gamma^{n} = 1-p$

$$\log(\gamma^{n}) = \log(1-p)$$

$$n \log\gamma = \log(1-p)$$

N° DI PERIODI

$$n = \frac{\log(1-p)}{\log\gamma} \qquad (*)$$

PROPORZIONE DEL GAP

LA (*) RESTITUISCE IL <u>MEDIAN LAG</u> SE $p = 50\%$

II) FUNZIONE DI COSTO QUADRATICA

$$C_t = \alpha_1 \underbrace{(y_t - y_t^*)^2}_{\substack{\text{DISEQUILIBRIUM COSTS} \\ \text{(UNDERSHOOTING VS OVERSHOOTING)}}} + \alpha_2 \underbrace{(y_t - y_{t-1})^2}_{\substack{\text{ADJUSTMENT COSTS} \\ \text{(DOWNWARD VS UPWARD ADJ)}}}$$

MINIMIZZAZIONE DEI COSTI :

$$\frac{\partial C_t}{\partial y_t} = 0 \qquad (\text{FOC})$$

$$\Downarrow$$

$$2a_1(y_t - y_t^*) + 2a_2(y_t - y_{t-1}) = 0$$

DA CUI : $$y_t = \underbrace{\frac{a_1}{a_1+a_2}}_{1-\gamma} y_t^* + \underbrace{\frac{a_2}{a_1+a_2}}_{\gamma} y_{t-1}$$

$$y_t = (1-\gamma)y_t^* + \gamma y_{t-1}$$

$\pm y_{t-1}$ (RHS)

$$y_t - y_{t-1} = (1-\gamma) y_t^* + \gamma y_{t-1} - y_{t-1}$$

$$= (1-\gamma) y_t^* - (1-\gamma) y_{t-1}$$

(SCHEMA/MODELLO DI AGGIUSTAMENTO PARZIALE)