Esercizi sul capitolo: "Natura della luce e leggi dell'ottica geometrica"

1) $\lambda_v = 628$ nm $\quad n=1.53 \quad \lambda_n=? \quad v=? \quad \nu_n=?$

Dalle leggi dell'elettromagnetismo:
nel passaggio tra due mezzi la frequenza ν di un'onda e.m. non cambia. La velocità di propagazione v è invece $v=\frac{c}{n}$

Inoltre $\lambda_n \nu = v$

Nel vuoto: $\lambda_v \cdot \nu = c \Rightarrow \nu = \frac{c}{\lambda_v} \simeq \frac{3\cdot10^8}{632.8\cdot10^{-9}} \simeq 4.74\cdot10^{14}$ Hz

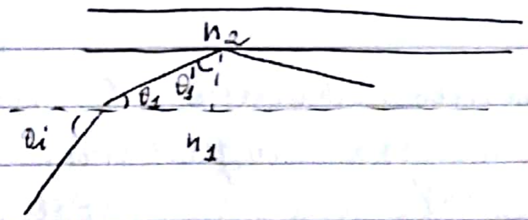
$v = \frac{c}{n} = \frac{3\cdot10^8}{1.53} \simeq 1.96\cdot10^8$ m/s

Inoltre:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_n\nu = \frac{c}{n}\\ \lambda_v \nu = c\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\lambda_n}{\lambda_v} = \frac{1}{n};\quad \lambda_n = \frac{\lambda_v}{n} \simeq 413.6 \text{ nm}$$

2) Nel passaggio tra aria e vetro, per la legge di Snell

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_1} = n_1$$



$$\rightarrow \sin\theta_1 = \frac{\sin\theta_i}{n_1}$$

Per avere riflessione totale nel passaggio tra n_1 ed n_2 bisogna avere (al limite)

$$\frac{\sin\theta_1'}{\sin(\pi/2)} = \frac{n_2}{n_1} \Rightarrow \sin\theta_1' = \frac{n_2}{n_1}$$

Poiché $\theta'_1 = \pi/2 - \theta_1$

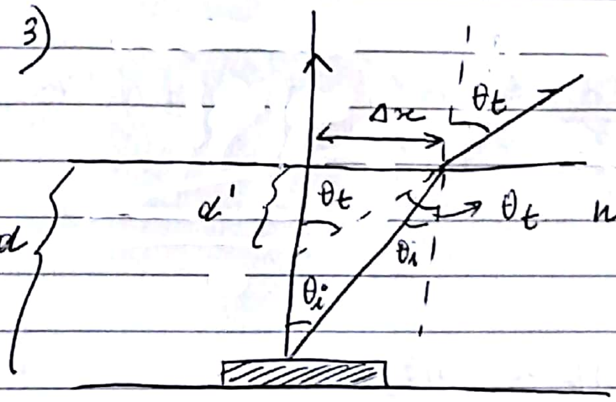
$$\operatorname{sen}\left(\pi/2 - \theta_1\right) = n_2/n_1$$

$$\cos\theta_1 = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\theta_1} = n_2/n_1 \quad \text{con} \quad \operatorname{sen}\theta_1 = \frac{\operatorname{sen}\theta_i}{n_1}$$

Quindi

$$\sqrt{1 - \frac{\operatorname{sen}^2\theta_i}{n^2_1}} = \frac{n_2}{n_1}\,; \qquad n_1^2 - \operatorname{sen}^2\theta_i = n_2^2\,; \qquad \boxed{\operatorname{sen}^2\theta_i = n_1^2 - n_2^2}$$

3)



(disegno esagerato)

Per la legge di Snell

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_i}{\operatorname{sen}\theta_t} = \frac{1}{n}$$

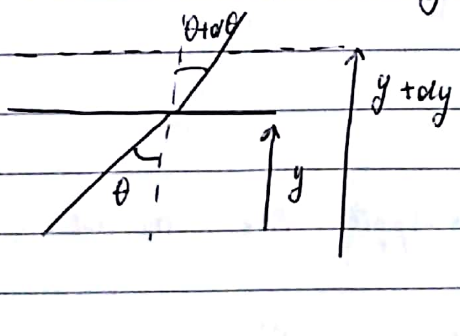
Poiché $\theta_i, \theta_t \ll 1 \Rightarrow \operatorname{sen}\theta_i \approx tg\theta_i \quad \operatorname{sen}\theta_t \approx tg\theta_t$

Inoltre $\Delta x = d\,tg\theta_i \approx d\operatorname{sen}\theta_i = \dfrac{d\operatorname{sen}\theta_t}{n}$

Dalla figura

$$d' = \frac{\Delta x}{tg\theta_t} \approx \frac{\Delta x}{\operatorname{sen}\theta_t} = \frac{d\,\cancel{\operatorname{sen}\theta_t}}{n\,\cancel{\operatorname{sen}\theta_t}} = \frac{d}{n}$$

4) Possiamo dividere l'altezza h in tanti strati di altezza infinitesima dy.



Applicando la legge di Snell per il passaggio del raggio tra lo strato ad y e ad $y+dy$

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}(\theta + d\theta)} = \frac{n(y+dy)}{n(y)}$$

con θ: angolo di incidenza all'altezza y

e $\quad u(y) = u_0(1+ay)$

da cui

$$u(y+dy) = u_0(1+ay+ady) = u(y) + au_0 dy$$

Inoltre $\quad \operatorname{sen}(\theta + d\theta) = \operatorname{sen}\theta\cos(d\theta) + \cos\theta\operatorname{sen}(d\theta)$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ d\theta \ll 1}}{\approx} \operatorname{sen}\theta + d\theta\cos\theta$$

Quindi

$$\frac{\operatorname{sen}\theta}{\operatorname{sen}\theta + d\theta\cos\theta} = \frac{u(y) + au_0 dy}{u(y)}$$

che si riscrive

$$\frac{1}{1+\frac{d\theta}{tg\theta}} = 1 + \frac{a\,dy}{1+ay}$$

Poiché $\quad \frac{d\theta}{tg\theta} \ll 1 \qquad \frac{1}{1+d\theta/tg\theta} \approx 1 - d\theta/tg\theta$

Segue

$$\cancel{1} - d\theta/tg\theta = \cancel{1} + \frac{a\,dy}{1+ay}$$

Integrando membro a membro, con gli estremi suggeriti dalla figura

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{d\theta}{tg\theta} = -\int_0^h \frac{a\,dy}{1+ay}$$

$$\ln|\operatorname{sen}\theta|\Big|_{\pi/2}^{\theta} = -\ln|1+ay|\Big|_0^h$$

cioè

$$\ln|\operatorname{sen}\theta| = \ln\left(\frac{1}{1+ay}\right) \rightarrow \boxed{\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{1+ay}}$$

Questa formula fornisce l'angolo di incidenza, ad altezza y)

per un raggio che abbia angolo di incidenza pari a $\pi/2$ all'altezza del suolo.

Se $y = h$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{1+ah}$$

La figura suggerisce che $\operatorname{sen}\theta = \frac{d}{\sqrt{h^2+d^2}}$

ovvero

$$\frac{1}{1+ah} = \frac{d}{\sqrt{h^2+d^2}}$$ da cui si determina d.

Osserviamo che: $ah \ll 1 \Rightarrow \frac{1}{1+ah} \simeq 1 - ah$

Ci aspettiamo poi, $h \ll d$: $\frac{1}{\sqrt{h^2+d^2}} = \frac{1}{d}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{h}{d}\right)^2}}$

$$\simeq \frac{1}{d}\left(1 - \frac{1}{2}\frac{h^2}{d^2}\right)$$

Quindi:

$$\cancel{1} - a\cancel{h} \simeq \cancel{1} - \frac{h^{\cancel{2}}}{2d^2};$$

$$d \simeq \sqrt{\frac{h}{2a}} \simeq 753\ m$$