ECONOMIA APPLICATA Π - LEZIONE 11-1

Titolo nota ~~13/12/2016~~ 13/1/20

SOSTITUIBILITÀ TRA FATTORI PRODUTTIVI ($n = 2$)

$$\sigma = \frac{d\left(\ell^*/a^*\right) / d\left(\frac{p_a}{p_\ell}\right)}{\left(\ell^*/a^*\right) / \left(\frac{p_a}{p_\ell}\right)}$$

COBB-DOUGLAS : $\sigma = 1$

CES : $\sigma = \frac{1}{1+\rho}$

SOSTITUIBILITÀ TRA FATTORI PRODUTTIVI $(n>2)$

$$\overline{\sigma}_{ij} = \frac{d(x_j/x_i)/d(w_i/w_j)}{(x_j/x_i)/(w_i/w_j)}$$

DOVE $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

TALE ESPRESSIONE NON È PIÙ VALIDA NEL CASO $n>2$, PERCHÉ IGNORA LA PRESENZA DEGLI ALTRI $n-2$ FATTORI PRODUTTIVI NELLA FUNZIONE DI PRODUZIONE

NECESSITÀ DI GENERALIZZARE L'ESPRESSIONE DI CUI SOPRA.

$\Downarrow$

ELASTICITÀ DI SOSTITUZIONE "PARZIALE" (ALLEN / UZAWA)

$$\boxed{\sigma_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{x_i x_j} \cdot f' x}$$

, DOVE $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$f = \begin{pmatrix} \partial f / \partial x_1 \\ \partial f / \partial x_2 \\ \vdots \\ \partial f / \partial x_n \end{pmatrix}$$

E γ_{ij} È L'ELEMENTO (i,j) DELL'INVERSA DELLA $\underbrace{\text{MATRICE HESSIANA}}_{n \times n}$ RIFERITA A $f(x_1, \dots x_n)$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f(\cdot)}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \\ \vdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & & \\ & & \ddots & \\ & - & & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

COMMENTI

1) NEL CASO IN CUI $n=2$, SI PUÒ DIMOSTRARE CHE $\sigma_{ij}=\sigma$
2) $\sigma_{ij}>0$ (x_i E x_j SOSTITUTI)
3) $\sigma_{ij}<0$ (x_i E x_j COMPLEMENTI)

ELASTICITÀ DI SOSTITUZIONE PARZIALE È RILEVANTE NEL LAVORO EMPIRICO, IN CUI SI CONSIDERANO TECNOLOGIE A $n > 2$ FATTORI PRODUTTIVI.

ES. TECNOLOGIA KLEM

K — CAPITALE

L — LAVORO

E — ENERGIA

M $\longrightarrow$ MATERIALS (INPUT INTERMEDI) SEMILAVORATI

ELASTICITÀ DI SOSTITUZIONE PARZIALE E FUNZIONE DI COSTO

$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ FUNZIONE DI PRODUZIONE

$C = C(w_1, w_2, \dots, w_n, y)$ FUNZIONE DI COSTO "REGOLARE"

PER OTTENERE LE DOMANDE OTTIMALI DEI FATTORI PRODUTTIVI x_i, $i = 1 \dots n$, BISOGNA RISOLVERE IL PROBLEMA:

$$\min_{x_1, \dots x_n} \sum_i w_i x_i \, , \text{ SOGGETTO A } y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ALTERNATIVAMENTE (ED EQUIVALENTEMENTE) LE DOMANDE OTTIMALI DEI FATTORI PRODUTTIVI x_i SI POSSONO OTTENERE UTILIZZANDO LA RELAZIONE DI DUALITÀ TRA FUNZIONE DI PRODUZIONE E FUNZIONE DI COSTO (REGOLARE)

LEMMA DI SHEPHARD : $x_i = \dfrac{\partial C(\cdot)}{\partial w_i} \equiv C_i$

DOMANDA OTTIMALE

IN EQUILIBRIO : $\frac{\partial f}{\partial x_i} = w_i$ (PRODOTTO MARGINALE = COSTO MARGINALE)

$\Downarrow$

IN EQUILIBRIO : $f = w$

↳ VETTORE DEI PREZZI DEI FATTORI

$\Downarrow$

$f'x = w'x = C(\cdot)$ FUNZIONE DI COSTO

$$\sigma_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{x_i \cdot x_j} \quad f'x = \frac{\gamma_{ij}}{C_i \, C_j} \cdot C$$

CARATTERIZZAZIONE DI γ_{ij}

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} = w_j$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}(w_j)$$

IN EQUILIBRIO

$$\left[\begin{array}{l} x_i = x_i(w, y \quad) \\ \Downarrow \\ w_i = x_i^{-1} \end{array} \right]$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial w_j}{\partial x_i}$$

$$\underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right)^{-1}}_{\gamma_{ij}} = \frac{\partial x_i}{\partial w_j}$$

LEMMA DI SHEPHARD

$$\frac{\partial}{\partial w_j}(x_i) = \frac{\partial}{\partial w_j}\left(\underbrace{\frac{\partial C(\cdot)}{\partial w_i}}_{= C_i}\right) = \frac{\partial^2 C(\cdot)}{\partial w_i \partial w_j} = C_{ij}$$

CONCLUDENDO:

$$\sigma_{ij} = \frac{\gamma_{ij}}{x_i \cdot x_j} \cdot f'x = \frac{\gamma_{ij}}{C_i \cdot C_j} \cdot \overset{C}{w'x} = \frac{C_{ij} \cdot C}{C_i \cdot C_j}$$

<u>RELAZIONE TRA ELASTICITÀ DI SOSTITUZIONE ED ELASTICITÀ DI PREZZO</u>

$$(\text{INCROCIATA})\ \varepsilon_{ij} = \overset{C_{ij}}{\frac{\partial x_i}{\partial w_j}} \cdot \frac{w_j}{x_i} = C_{ij} \cdot \frac{w_j}{x_i} \cdot \frac{x_j}{x_j} \cdot \frac{C}{C}$$

FACTOR/INPUT (SHARE)

$$\varepsilon_{ij} = C_{ij} \cdot \underbrace{\frac{w_j}{x_i} \cdot \frac{x_j}{x_j} \cdot \frac{C}{C}}_{S_j} = S_j \cdot \sigma_{ij}$$

$x_i = C_i$, $x_j = C_j$

V. LEMMA DI SHEPHARD

DOVE $S_j \equiv \frac{w_j x_j}{C}$ = QUOTA DI COSTI IMPUTABILI AL FATTORE PRODUTTIVO j

FORME FUNZIONALI FLESSIBILI (FFF)

- RAPPRESENTAZIONI PIÙ GENERALI, RISPETTO A COBB-DOUGLAS E CES, DELLA TECNOLOGIA DELL'IMPRESA.
- ATTENZIONE RIVOLTA ALLA FUNZIONE DI COSTO DUALE ALLA TECNOLOGIA
- FUNZIONE DI COSTO "REGOLARE", CIOÈ:

(i) MONOTONICAMENTE NON DECRESCENTE NEI PREZZI DEI FATTORI (w)

(ii) STRETTAMENTE QUASI CONCAVA NEI PREZZI DEI FATTORI (w)

$\Downarrow$ TALI PROPRIETÀ NON VENGONO IMPOSTE SU $C(\cdot)$, MA, TIPICAMENTE, VENGONO VERIFICATE <u>EX-POST</u> (DOPO LA <u>STIMA</u>)

DEFINIZIONE DI FFF = DATA UNA FUNZIONE DI COSTO $C(w,y)$, UNA FFF È UN'APPROSSIMAZIONE DI $C(w,y)$ ARRESTATA <u>AL SECONDO ORDINE</u>

LA FFF LEONTIEF GENERALIZZATA (LG)

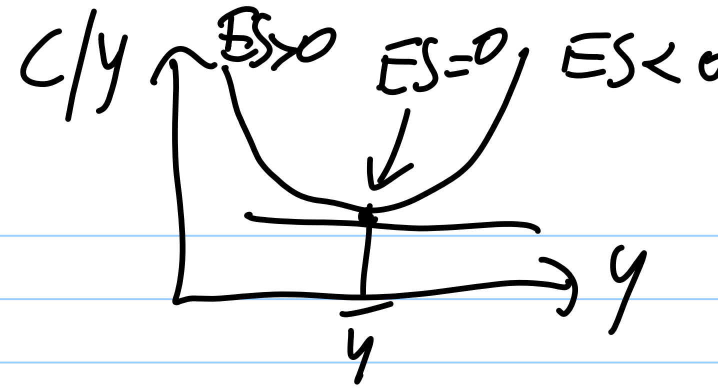
$$C = y\left[\sum_i \sum_j \alpha_{ij}(P_i P_j)^{1/2}\right], \text{ DOVE } i,j = 1 \ldots n$$

COSTI

PRODOTTO

PARAMETRI NON NOTI

PREZZI FATTORI



$$ES = RS - 1$$

ECONOMIE DI SCALA (COSTI MEDI)

RENDIMENTI DI SCALA (FUNZIONE DI PRODUZIONE)

$$\frac{C}{y} = \sum_i \sum_j \alpha_{ij} (P_i P_j)^{1/2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{C}{y}\right) = 0 \iff ES = 0 \iff RS = 1$$

IPOTESI DI SIMMETRIA DEI PARAMETRI d_{ij}, CIOÈ:

$$\boxed{d_{ij} = d_{ji}}, \forall i \neq j$$

EMPIRICAMENTE, È POSSIBILE STIMARE LA FUNZIONE DI COSTO LG OPPURE IL SISTEMA DI DOMANDE DI FATTORI OTTENIBILE UTILIZZANDO IL LEMMA DI SHEPHARD

$$C = y\left[\sum_i \sum_j \alpha_{ij} (p_i p_j)^{1/2}\right], \quad \alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \ \forall i,j$$

$$x_i = \frac{\partial C}{\partial p_i} = y \sum_j \alpha_{ij}\, p_i^{-1/2} p_j^{1/2} = y \sum_j \alpha_{ij} (p_j/p_i)^{1/2}$$

C_i

$$\frac{x_i}{y} = \sum_j \alpha_{ij} (p_j/p_i)^{1/2}$$

→ INTENSITÀ DEL FATTORE PRODUTTIVO i-ESIMO
(SIMILE A UN "COEFFICIENTE" INPUT-OUTPUT)

$i = 1, \ldots, n = 4$ (TECNOLOGIA KLEN)

$$\frac{x_i}{y} = \sum_j \alpha_{ij} \left(P_j / P_i\right)^{1/2}$$

$$\begin{cases} \dfrac{x_K}{y} = \alpha_{KK} \cancel{\left(\dfrac{P_K}{P_K}\right)^{1/2}} + \alpha_{KL}\left(\dfrac{P_L}{P_K}\right)^{1/2} + \alpha_{KE}\left(\dfrac{P_E}{P_K}\right)^{1/2} + \alpha_{Kn}\left(\dfrac{P_n}{P_K}\right)^{1/2} \\ \dfrac{x_L}{y} = \alpha_{LK}\left(P_K/P_L\right)^{1/2} + \alpha_{LL} + \alpha_{LE}\left(\dfrac{P_E}{P_L}\right)^{1/2} + \alpha_{Ln}\left(\dfrac{P_n}{P_E}\right)^{1/2} \\ \dfrac{x_E}{y} = \alpha_{EK}\left(\dfrac{P_K}{P_E}\right)^{1/2} + \alpha_{EL}\left(\dfrac{P_L}{P_E}\right)^{1/2} + \alpha_{EE}\left(\dfrac{P_E}{P_E}\right)^{1/2} + \alpha_{En}\left(\dfrac{P_n}{P_E}\right)^{1/2} \\ x_n/y = \alpha_{nK}\left(\dfrac{P_K}{P_n}\right)^{1/2} + \alpha_{nL}\left(\dfrac{P_L}{P_n}\right)^{1/2} + \alpha_{nE}\left(\dfrac{P_E}{P_n}\right)^{1/2} + \alpha_{nn} \end{cases}$$

N.B. I VINCOLI DI SIMMETRIA (ES $d_{KE} = d_{EK}$) INTRODUCONO RESTRIZIONI TRA EQUAZIONI DIVERSE $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ STIMA DI SISTEMA

N.B. IN ASSENZA DI VINCOLI DI SIMMETRIA, I PARAMETRI d_{ij} DA STIMARE SONO 16. CON VINCOLI DI SIMMETRIA, I PARAMETRI DA STIMARE SI RIDUCONO A 10.

$$x_i = C_i = \frac{\partial C}{\partial P_i} = y\left[\sum_j d_{ij}\left(P_j/P_i\right)^{1/2}\right]$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial P_j} = \frac{\partial^2 C}{\partial P_i \partial P_j} = C_{ij} = \frac{1}{2} y\, d_{ij}\, P_j^{-1/2} \cdot P_i^{-1/2} =$$

$$= \frac{1}{2} y\, d_{ij} \left(P_i P_j\right)^{-1/2}$$

AFFINCHÉ $C_{ij} = C_{ji}$, ALLORA $d_{ij} = d_{ji}$, $\forall\, i \neq j$

STIMATORE DI SISTEMA : SURE (RISTRETTO)

È UTILE RICORDARE CHE ESISTE ANCHE UNA VERSIONE ITERATA DELLO STIMATORE SURE (HA LE STESSE PROPRIETÀ DI UNO STIMATORE DI MASSIMA VEROSIMIGLIANZA)

SCRIVIAMO IL SISTEMA IN FORMA MATRICIALE : $X = P\delta + \underbrace{U}_{\text{errori}}$

VERSIONE EMPIRICA DELLA PRIMA EQUAZIONE DEL SISTEMA DI DOMANDE

ES. $$\left(\frac{x_K}{y}\right)_t = \alpha_{KK} + \alpha_{KL}\left(\frac{p_L}{p_K}\right)_t^{1/2} + \alpha_{KE}\left(\frac{p_E}{p_K}\right)_t^{1/2} + \alpha_{KM}\left(\frac{p_M}{p_K}\right)_t^{1/2} + u_{K_t}$$

$$t = 1 \ldots T$$

$\Downarrow$

SISTEMA: $X = P\delta + U, \quad E(UU') = \Omega$

$$\hat{\delta}_{SURE} = (P'\Omega^{-1}P)^{-1} P'\Omega^{-1} X$$

OLS SU EQUAZIONI SEPARATE $\rightarrow \hat{\Omega} \rightarrow \hat{\delta}_{FSURE} = (P'\hat{\Omega}^{-1}P)^{-1} P'\hat{\Omega}^{-1} X$ (NON ITERATO)

$$X = P\delta + U$$

$$\hat{\delta}_{FSURE} \rightarrow \hat{U} = X - P\hat{\delta}_{FSURE} \rightarrow \hat{\hat{\Omega}}$$

$$\hat{\hat{\Omega}} \rightarrow \hat{\hat{\delta}}_{FSURE} = \left(P'\hat{\hat{\Omega}}^{-1}P\right)^{-1}P'\hat{\hat{\Omega}}^{-1}X \rightarrow$$

$$\rightarrow \hat{\hat{U}} = X - P\hat{\hat{\delta}}_{FSURE} \rightarrow \hat{\hat{\hat{\Omega}}} \quad \underline{\underline{\text{ETC}}}$$

(<u>SURE ITERATO</u>)