FOGLIO 6

1

(a) $$y' = \frac{e^{x-y}}{1+e^x}$$

Usando la notazione $y' = \frac{dy}{dx}$, diventa

$$e^y\,dy = \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

$$\int e^y\,dy = \int \frac{e^x}{1+e^x}\,dx$$

$$e^y = \ln(1+e^x) + C \qquad \text{per } C \in \mathbb{R}.$$

$$y(x) = \ln(\ln(1+e^x) + C) \quad ✓$$

(b) $xy' + y = 3x^3 - 1$ per $x > 0$

$$\frac{d}{dx}(xy) = 3x^3 - 1$$

Chiamo $z(x) := x \cdot y(x) \Rightarrow z' = 3x^3 - 1$

Usando la notazione $z' = \frac{dz}{dx}$, diventa

$$dz = (3x^3 - 1)\,dx$$

$$\int dz = \int (3x^3 - 1)\,dx$$

$$z(x) = \frac{3}{4}x^4 - x + C \qquad \text{per } C \in \mathbb{R}$$

$$y(x) = \frac{1}{x} \cdot z(x) = \frac{3}{4}x^3 - 1 + \frac{C}{x}. \quad ✓$$

(c) $y' = \frac{1}{y}\left(t + \frac{y^2}{t}\right)$

$$t \cdot \frac{y'}{t} = \frac{t}{y} + \frac{y}{t}$$

Chiamo $z(t) := \frac{y(t)}{t} \Rightarrow z'(t) = \frac{y'(t) \cdot t - y(t)}{t^2} = \frac{y'(t)}{t} - \frac{y(t)}{t^2}$

$\Rightarrow t \cdot z' + \cancel{z} = \frac{1}{z} + \cancel{z}$ e uso la notaz. $z'(t) = \frac{dz}{dt}$:

$$z\,dz = \frac{dt}{t}$$

$$\frac{z^2}{\cancel{2}} = 2\ln(t) + C$$

$z(t) = \pm\sqrt{2\ln(t) + C}$ per $C \in \mathbb{R}$

$$y(t) = t \cdot z(t) = \pm t \cdot \sqrt{2\ln(t) + C}$$

✓

(d) $y^{(iv)} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = \underbrace{x}_{1^\circ \text{ grado}} e^x$ $\quad e^x = e^{1 \cdot x}$

Sol. omogenea: $P_{car}(t) = t^4 - 2t^3 + 2t^2 - 2t + t =$

$= (t^4 - t^3) - (t^3 - t^2) + (t^2 - t) - (t - 1) =$

$= (t-1)[t^3 - t^2 + t - 1] =$

$= (t-1)^2 (t^2 + 1) \stackrel{!}{=} 0$ $\to t = 1,\ M_1 = 2$; $\to t = \pm i,\ M_{\pm i} = 1$

molteplicità

$$y_0(x) = Ae^x + Bxe^x + C\cos(x) + D\sin(x)$$

Sol. partic: $x^{2} \underbrace{(Ex + F)}_{\text{generico polinomio di } 1^\circ \text{ grado}} e^x$

MOLTEPLICITÀ DELLA RADICE DEL POLINOMIO CARATTERISTICO (P_{car}) CHE COMPARE ~~xxxxxx~~ COME COEFFICIENTE DI "x" IN "e^x" NELL' EQUAZIONE ORIGINARIA.
IN QUESTO CASO ABBIAMO

$$e^x = e^{1 \cdot x}$$

DUNQUE LA RADICE CERCATA DI P_{car} È 1, ED HA MOLTEPLICITÀ $\mu = 2$.

Sol. generale: $y(t) = Ae^x + Bxe^x + C\cos(x) + D\sin(x) + x^2(Ex+F)e^x$

(2) $\begin{cases} y' = y\,tg(t) + (y(t))^2 \cos(t) - \dfrac{1}{\cos t} \\ y(0) = \dfrac{5}{3} \end{cases}$

con sol. partic. $\tilde{y}(t) = -\dfrac{1}{\cos(t)}$

Sol. omogenea: $y_0' = y_0\,tg(t) + y_0^2 \cos(t)$

BERNOULLI: $y'(t) = P(t)\,y(t) + Q(t)\,(y(t))^\alpha$

$z(t) := (y(t))^{1-\alpha}$

$z'(t) = (1-\alpha)(y(t))^{-\alpha}\, y'(t) =$

$= (1-\alpha)\,P(t)\,z(t) + (1-\alpha)\,Q(t)$

QUI HO $\alpha = 2$, $P(t) = tg(t)$, $Q(t) = \cos(t)$.

$z(t) := (y_0(t))^{1-2} = (y_0(t))^{-1}$

$z'(t) = -tg(t)\cdot z(t) - \cos(t)$.

$z'(t) = a(t)\,z(t) + b(t)$

$\Downarrow$

$z(t) = \left[\int b(t)\, e^{-\int a(t)dt}\, dt + k\right] e^{\int a(t)dt}$

$z(t) = \left(\int (-\cos t)\, e^{-\int(-tg t)dt}\, dt + k\right) e^{\int(-tg t)\,dt} =$

$\int tg(t) = -\ln|\cos t| + c$

$= \left(\int (-\cos t)\, \underbrace{e^{-\ln(\cos t)}}_{= e^{\ln(\cos t)^{-1}} = (\cos t)^{-1}}\, dt + k\right) e^{\ln(\cos t)} =$

$= \left(\int (-1)\, dt + k\right)(\cos t) = (k-t)\cos t$.

$y_0(t) = (z(t))^{-1} = \dfrac{1}{(k-t)\cos t}$

Sol. generale: $y(t) = y_0(t) + \tilde{y}(t) = \dfrac{1}{\cos(t)}\left[\dfrac{1}{k-t} - 1\right]$.

Impongo $y(0) \overset{!}{=} \dfrac{5}{3}$:

$\dfrac{5}{3} \overset{!}{=} \dfrac{1}{1}\cdot\left[\dfrac{1}{k} - 1\right] \Leftrightarrow \dfrac{5}{3} + 1 = \dfrac{1}{k} \Leftrightarrow k = \dfrac{3}{8}$

$\Rightarrow y(t) = \dfrac{1}{\cos(t)}\left[\dfrac{1}{\frac{3}{8} - t} - 1\right] = \dfrac{1}{\cos(t)} \cdot \dfrac{5+8t}{3-8t}$

③ $\begin{cases} y' = \dfrac{\cos x}{my} \\ y(\pi/2) = 2 \end{cases}$ $f_m :=$ sol. di questo probl. Cauchy

Con la notazione $y' = \dfrac{dy}{dx}$: $\displaystyle\int y\,dy = \frac{1}{m}\int \cos x\,dx$

$$y^2(x) = \frac{2}{m}\sin x + C_m$$

$$y(x) = \sqrt{\frac{2}{m}\sin x + C_m} \leftarrow$$

[HO SCELTO LA RADICE POSITIVA, PERCHE' IN $\pi/2$ DEVE ESSERE 2 ($\Rightarrow >0$).]

Impongo $y\left(\frac{\pi}{2}\right) \overset{!}{=} 2$:

$$2 = \sqrt{\frac{2}{m}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C_m} \iff 4 = \frac{2}{m} + C_m$$

$$\iff C'_m = 4 - \frac{2}{m}$$

$$\Rightarrow f_m(x) = \sqrt{\frac{2}{m}(\sin x - 1) + 4}$$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $\displaystyle\lim_{m\to+\infty} f_m(x) = 2$

$$\lim_{m\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_m(x) - 2| =$$

$$= \lim_{m\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left| \underbrace{\sqrt{\frac{2}{m}\underbrace{(\sin x - 1)}_{\leq 0} + 4}}_{\leq 2} - 2 \right| =$$

$$= \lim_{m\to+\infty} \sup_{x\in\mathbb{R}} \left(2 - \sqrt{\frac{2}{m}\underbrace{(\sin x - 1)}_{-2\leq} + 4}\right) \leq$$

$$\leq \lim_{m\to+\infty} \cancel{\sup_{x\in\mathbb{R}}} \left(2 - \sqrt{\frac{2}{m}(-2) + 4}\right) = 0$$

Quindi $f_m \xrightarrow[m\to+\infty]{} 2$ uniformemente su $\mathbb{R}$.

(ANALOGAMENTE, UN' ALTRA MAGGIORAZIONE POSSIBILE E':

$$2 - \sqrt{\frac{2}{m}(\sin x - 1) + 4} = \frac{\cancel{4} - \frac{2}{m}(\sin x - 1) - \cancel{4}}{2 + \sqrt{\frac{2}{m}(\sin x - 1) + 4}} \quad \text{(RAZIONALIZZAZIONE)}$$

$$\leq \frac{\frac{2}{m}}{2 + \sqrt{-\frac{4}{m} + 4}} \xrightarrow{m\to+\infty} 0 \text{ .}$$

(4) $\begin{cases} 9x^2y'' - 12xy' - 8y = 40x - 14x^2 \\ y(1) = a \\ y'(1) = b \end{cases}$

(a) considero $x>0$, perchè cerco soluzioni locali (in un intorno di $x_0 = 1$).
Dalla teoria, esiste una e una soluzione locale $y_{a,b}$.

omogenea: $9x^2y'' - 12xy' - 8y = 0$ TIPO EULERO

Essendo $x>0$, pongo

$$x = e^t \qquad (t = \ln x)$$

e definisco

$$z(t) := y(e^t).$$

Allora

$$\begin{cases} z'(t) = y'(e^t)e^t = y'x \\ z''(t) = y''(e^t)e^{2t} + y'(e^t)e^t \overset{!}{=} y''x^2 + y'x. \end{cases}$$

$$9z'' - 21z' - 8z = 0$$

$$9t^2 - 21t - 8 = 0 \iff t = \frac{8}{3} \vee t = -\frac{1}{3}$$

$$\left(\begin{array}{l} \Delta = 21^2 + 9\cdot 8\cdot 4 = 441 + 288 = 729 = 27^2 \\ t_{1,2} = \dfrac{21 \pm 27}{9\cdot 2} = \begin{cases} 8/3 \\ -1/3 \end{cases} \end{array} \right)$$

Sol. della omogenea
$\downarrow$
$$y(x) = y(e^t) = z(t) = Ae^{8/3\,t} + Be^{-1/3\,t} = Ax^{8/3} + Bx^{-1/3}$$

particolare: Essendo il "termine noto" $40x - 14x^2$, mi aspetto che una soluzione particolare sia della forma

$$\bar{y}(x) := ax^2 + bx$$

con $a, b \in \mathbb{R}$ da determinare.
Ora $\bar{y}'(x) = 2ax + b$, $\bar{y}''(x) = 2a$.

Impongo

$$9x^2\bar{y}'' - 12x\bar{y}' - 8\bar{y} \overset{!}{=} 40x - 14x^2$$

ossia

$$9x^2(2a) - 12x(2ax+b) - 8(ax^2+bx) = 40x - 14x^2$$

$$x^2(18a - 24a - 8a) + x(-12b - 8b) = 40x - 14x^2$$

$$-14ax^2 - 20bx = 40x - 14x^2$$

$\Rightarrow$ $a = 1$, $b = -2$. Quindi

$$\bar{y}(x) = -2x + x^2 \text{ è sol. particolare.}$$

La sol. generale è

$$y(x) = Ax^{8/3} + Bx^{-1/3} - 2x + x^2.$$

Impongo

$$\begin{cases} a \overset{!}{=} y(1) = A + B - 2 + 1 = A + B - 1 \\ b \overset{!}{=} y'(1) = \frac{8}{3}A - \frac{1}{3}B - \cancel{2} + \cancel{2} \leftrightarrow 3b = 8A - B \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 9A - 3b - 1 \\ B = 8A - 3b \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \dfrac{a + 3b + 1}{9} = \dfrac{a}{9} + \dfrac{b}{3} + \dfrac{1}{9} \\ B = \dfrac{8}{9}a - \dfrac{b}{3} + \dfrac{8}{9} \end{cases}$$

(b) y è (per il momento) definita per $x > 0$.

Per estenderla a $x = 0$ (in modo C^2)

deve essere $B = 0$ (essendo $\lim_{x \to 0^+} x^{-1/3} = +\infty$):

$$\frac{8}{9}a - \frac{b}{3} + \frac{8}{9} = 0$$

ossia $8a - 3b + 8 = 0$.

Ripetendo analogamente quanto visto per $x>0$ anche per $x<0$, poniamo

$$\begin{cases} x := -e^t \\ z(t) := y(-e^t) \end{cases}$$

(*) Si trova di nuovo

$$y(x) = Ax^{8/3} + Bx^{-1/3} - 2x + x^2.$$

Quindi la funzione con cui voglio estendere la y originaria (definita solo per $x \geq 0$, finora) è la stessa $y(x) = Ax^{8/3} - 2x + x^2$.

Resta quindi il problema di "incollare bene" ($\mathcal{C}^2$) le due soluzioni a destra e sinistra di $x=0$.

- $\lim_{x \to 0^\pm} y(x) = \lim_{x\to 0^\pm} (Ax^{8/3} - 2x + x^2) = 0$

  quindi y è $\mathcal{C}^0$ in $x=0$, $y(0)=0$.

- $\lim_{x \to 0^\pm} y'(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \left(\frac{8}{3}Ax^{5/3} - 2 + 2x\right) = -2$

  quindi y è $\mathcal{C}^1$ in $x=0$, $y'(0) = -2$.

- $\lim_{x \to 0^\pm} y''(x) = \lim_{x\to 0^\pm} \left(\frac{8}{3}\cdot\frac{5}{3}Ax^{2/3} + 2\right) = 2$

  quindi y è $\mathcal{C}^2$ in $x=0$, $y''(0) = 2$.

Perciò, affinché y sia definita su tutto $\mathbb{R}$, basta (e serve) che sia

$$B = \frac{8}{9}a - \frac{b}{3} + \frac{8}{9} = 0$$

ossia $8a - 3b + 8 = 0$ ✓

(c) La soluzione generale del problema (come visto al punto (a)) è

$$y(x) = Ax^{8/3} + Bx^{-1/3} - 2x + x^2$$

quindi, volendo guardare vicino a $x=0$, dobbiamo chiedere $B=0$ (cfr. punto (b)).
Dunque
$$y(x) = Ax^{8/3} - 2x + x^2.$$

$$\Rightarrow y(0) = 0.$$

Imponiamo
$$c \overset{!}{=} y'(0) = \left(\frac{8}{3}Ax^{5/3} - 2 + 2x\right)\Big|_{x=0} = -2.$$

Per $c = -2$ la soluzione cercata è ogni
$$y(x) = Ax^{8/3} - 2x + x^2$$

per $A \in \mathbb{R}$.

Per $c \neq -18$ la soluzione <u>non</u> esiste.

(SE SIETE INTERESSATI)
(*) La soluzione particolare è la stessa, mentre dobbiamo vedere cosa succede a quella della omogenea (perché è lì che abbiamo usato $x>0$).
Qui ho $x<0 \Rightarrow$ pongo $x = -e^t$, $z(t) = y(-e^t)$
Allora
$$\begin{cases} z'(t) = y'(-e^t)(-e^t) = y'x \\ z''(t) = y''(-e^t)(-e^t)^2 + y'(-e^t)(-e^t) = \\ \quad = y''x^2 + y'x. \end{cases}$$

Quindi ho lo stesso problema che avevo per $x>0$. Quindi
$$y(x) = y(-e^t) = z(t) = Ae^{8/3 t} + Be^{-1/3 t} =$$
$$= A(-e^t)^{8/3} - B(-e^t)^{-1/3 t} = Ax^{8/3} - Bx^{-1/3}.$$

Essendo $A, B \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie, posso sostituire "$-B$" con "B" e ritrovo $y(x) = Ax^{8/3} + Bx^{-1/3}$.

(5) $\begin{cases} y' + \dfrac{y}{x} + x^4 \sqrt{y} = 0 \\ y(x_0) = a \end{cases}$ (PC)

(a) $x_0 \in (0, +\infty)$, $a \in (0, +\infty)$.

Posto $f(x,y) := -\dfrac{y}{x} - x^4 \sqrt{y}$

si ha $f \in \mathcal{C}^1((0,+\infty) \times (0,+\infty))$

quindi (PC) ammette una e una sola soluzione locale y_a.

Come nell'esercizio 2, e' una Bernoulli:

$$z(x) := (y(x))^{1-1/2} = \sqrt{y(x)}$$

$$z' = \frac{1}{2} y^{-1/2} y' = -\frac{z}{2x} - \frac{x^4}{2}$$

$$z(x) = \left[\int \left(-\frac{x^4}{2}\right) e^{-\int(-\frac{1}{2x})\,dx} dx + c\right] e^{\int(-\frac{1}{2x})\,dx} =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\int x^4 e^{\frac{1}{2}\ln x} dx + c\right] e^{-\frac{1}{2}\ln x} =$$

$$= \left[-\frac{1}{2}\int x^4 x^{1/2} dx + c\right] x^{-1/2} =$$

$$= \left[-\frac{1}{2} \cdot \frac{x^{11/2}}{11/2} + c\right] x^{-1/2} = \left(-\frac{x^{11/2}}{11} + c\right)\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$y(x) = (z(x))^2 = \left(-\frac{x^{11/2}}{11} + c\right)^2 \frac{1}{x} \to \text{sol. generale}$$

Impongo $a \doteq y(1) = \left(-\frac{1}{11} + c\right)^2$

$$\Leftrightarrow \sqrt{a} = -\frac{1}{11} + c \Leftrightarrow c = \sqrt{a} + \frac{1}{11}.$$

Quindi

$$y_a(x) = \left(-\frac{x^{11/2}}{11} + \sqrt{a} + \frac{1}{11}\right)^2 \frac{1}{x}.$$

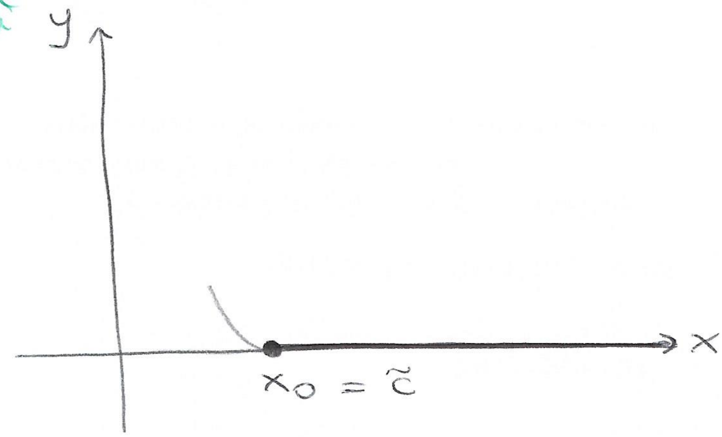
✓

(b) $a = 0$, $x_0 \in (0, +\infty)$

La soluz. generale dell'eq. diff. è

c_1 dipenderà da x_0

$$y(x) = \left(-\frac{x^{11/2}}{11} + c_1\right)^2 \frac{1}{x}$$



ed è definita dove $z(x) > 0$ (essendo $z(x) = \sqrt{y(x)}$) quindi dove

$$-\frac{x^{11/2}}{11} + c_1 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x < (11 c_1)^{2/11} =: \tilde{c}.$$

Impongo $0 \overset{!}{=} y(x_0) \leftrightarrow z(x_0) = 0 \leftrightarrow x_0 = \tilde{c}$.

Essendo

$$y' = -\frac{y}{x} - x^4\sqrt{y} \underset{\begin{cases} x > 0 \\ y \geq 0 \end{cases}}{\leq} 0$$

allora y è decrescente in x, da cui $y(x) = 0 \quad \forall x \geq x_0$. Dunque posso estendere la soluzione trovata a

$$\tilde{y}(x) := \begin{cases} y(x) & \text{se } x \in (0, x_0] \\ 0 & \text{se } x \in (x_0, +\infty). \end{cases}$$

Tuttavia, la funzione identicamente nulla è anch'essa soluzione di (PC), quindi per $x < x_0$ abbiamo due soluzioni distinte ($\tilde{y}$ e la funzione identicamente nulla) che si raccordano in $x = x_0$ e coincidono per $x \geq x_0$.

Abbiamo trovato così due soluzioni di (PC), perciò ne esistono almeno due. Dunque <u>non</u> c'è unicità. ✓

(c) Come visto nel punto (b), y_a è definita solo per $x < (11c)^{2/11} = (11\sqrt{a}+1)^{2/11} =: \tilde{c}$.

Essendo

$$\begin{cases} \lim_{x \to \tilde{c}} y_a(x) = 0 \\ \lim_{x \to \tilde{c}} y_a'(x) = 0 \end{cases}$$

allora posso prolungare y_a in $\tilde{c}$ ponendo $y_a(\tilde{c}) := 0$.

Inoltre, essendo la funzione identicamente nulla soluzione generale dell'eq. diff., posso prolungare ulteriormente y_a a

$$\tilde{y}_a(x) := \begin{cases} y_a(x) & \text{se } x \in (0, \tilde{c}] \\ 0 & \text{se } x \in (\tilde{c}, +\infty). \end{cases}$$

Tale prolungamento è unico, perché deve essere

$$y' = -\frac{y}{x} - x^4\sqrt{y} \leq 0 \quad (\text{cfr. pto (b)}).$$

Ho quindi esteso y_a a tutto $(0, +\infty)$. ∎

⑥ $\begin{cases} x' = 3x - 2y + e^t \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$

(a) $\begin{cases} x' = 3x - 2y \\ y' = 2x - 2y \end{cases}$

$$x'' = 3x' - 2y' = 3x' - 2(2x - 2y) =$$
$$= 3x' - 4x - 2(x' - 3x) = x' + 2x$$
$$x'' - x' - 2x = 0$$
$$\lambda^2 - \lambda - 2 = 0 \iff (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0 \quad \begin{array}{l} \nearrow \lambda_1 = -1 \\ \searrow \lambda_2 = 2 \end{array}$$
$$x(t) = A e^{-t} + B e^{2t}$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}\left[x' - 3x\right](t) = -\frac{1}{2}\left[-Ae^{-t} + 2Be^{2t} - 3Ae^{-t} - 3Be^{2t}\right] =$$
$$= 2Ae^{-t} + \frac{B}{2}e^{2t}. \quad ✓$$

(b) $$x'' = 3x' - 2y' + e^t = 3x' - 2(2x - 2y) + e^t =$$
$$= 3x' - 4x - 2(x' - 3x - e^t) + e^t =$$
$$= x' + 2x + 3e^t$$

La sol. dell'omogenea associata è quella del punto (a), quindi resta da trovare la sol. particolare: sarà della forma $\bar{x}(t) = t^{0}\alpha e^{1t}$.

0 è la molteplicità (come radice del polinomio caratteristico) di 1

$\alpha \in \mathbb{R}$ è un generico polinomio di grado zero, perché il "termine noto" è $e^t = t^0 e^t$

$$0 \overset{!}{=} \bar{x}'' - \bar{x}' - 2\bar{x} - 3e^t =$$
$$= \cancel{\alpha e^t} - \cancel{\alpha e^t} - 2\alpha e^t - 3e^t \Rightarrow \alpha = -\frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow x(t) = Ae^{-t} + Be^{2t} - \frac{3}{2}e^t.$$

$$y(t) = -\frac{1}{2}\left[x'(t) - 3x(t) - e^t\right] =$$
$$= -\frac{1}{2}\left[-Ae^{-t} + 2Be^{2t} - \frac{3}{2}e^t - 3Ae^{-t} - 3Be^{2t} + \frac{9}{2}e^t - e^t\right] =$$
$$= 2Ae^{-t} + \frac{B}{2}e^{2t} - e^t$$
✓

(c) $\begin{cases} 1 \overset{!}{=} x(1) = Ae^{-1} + Be^{2} - \frac{3}{2}e & (\mathrm{I}) \\ 1 \overset{!}{=} y(1) = 2Ae^{-1} + \frac{B}{2}e^{2} - e & (\mathrm{II}) \end{cases}$

$$\mathrm{II} - 2\mathrm{I} : -1 = \left(\frac{B}{2} - 2B\right)e^{2} + (3-1)e$$

$$\frac{3}{2}Be^{2} = 1 + 2e$$

$$B = \frac{2}{3}\frac{(1+2e)}{e^{2}} = \frac{2}{3e^{2}} + \frac{4}{3e}$$

$$\mathrm{I} : A = e\left[1 - Be^{2} + \frac{3}{2}e\right] = \left(1 - \frac{2}{3}\frac{1+2e}{\cancel{e^{2}}}\cancel{e^{2}} + \frac{3}{2}e\right)e =$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}e\right)e = \frac{1}{3}e + \frac{1}{6}e^{2}$$

$$\begin{cases} x(t) = \left(\frac{1}{3}e + \frac{1}{6}e^{2}\right)e^{-t} + \left(\frac{2}{3e^{2}} + \frac{4}{3e}\right)e^{2t} - \frac{3}{2}e^{t} \\ y(t) = \left(\frac{2}{3}e + \frac{1}{3}e^{2}\right)e^{-t} + \left(\frac{1}{3e^{2}} + \frac{2}{3e}\right)e^{2t} - e^{t} \end{cases}$$

$\blacksquare$

⑦ $\begin{cases} y'' + y = tg(t) \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

omogenea: $t^2 + 1 = 0 \iff t = \pm i$

$y(t) = A\cos(t) + B\sin(t)$

particolare: $\begin{cases} A'\cos(t) + B'\sin(t) = 0 & (I) \\ -A'\sin(t) + B'\cos(t) = tg(t) & (II) \end{cases}$

moltiplico (I) per "sin(t)", (II) per "cos(t)":

$$\begin{cases} A'\cos(t)\sin(t) + B'\sin^2(t) = 0 \\ -A'\cos(t)\sin(t) + B'\cos^2(t) = \sin(t) \end{cases}$$

(+)

$B' = \sin(t) \implies B(t) = -\cos(t)$

$\overset{(I)}{\implies} A' = -B'\dfrac{\sin(t)}{\cos(t)} = -\dfrac{\sin^2(t)}{\cos(t)}$

$$A(t) = -\int \frac{\sin^2(t)}{\cos(t)}\,dt = -\int \frac{\sin^2(t)}{1-\sin^2(t)} \cdot \cos(t)\,dt =$$

$$S := \sin(t) \quad = \sin(t) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}\right)$$

$$\left[\int \frac{s^2 - 1 + 1}{1-s^2}\,ds = -s + \int \frac{1}{1-s^2}\,ds = -s + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+s}\,ds + \frac{1}{2}\int \frac{1}{1-s}\,ds = = -s + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+s}{1-s}\right) + C \right]$$

$$y(t) = A\cos(t) + B\sin(t) + \cancel{\sin(t)\cos(t)} - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}\right)\cos(t) + - \cancel{\cos(t)\sin(t)} =$$

$$= A\cos(t) + B\sin(t) - \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)}\right)\cos(t).$$

$$y'(t) = -A\sin(t) + B\cos(t) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1-\sin t}{1+\sin t} \cdot \frac{\cos t(1-\sin t) + (1+\sin t)\cos(t)}{(1-\sin t)^2}\cos t + + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sin t}{1-\sin t}\right) \cdot \sin t$$

Impongo

$$\begin{cases} 0 \overset{!}{=} y(0) = A & \Rightarrow A = 0 \\ 0 \overset{!}{=} y'(0) = B - \frac{1}{2} \cdot \frac{1+1}{1} = B - 1 & \Rightarrow B = 1. \end{cases}$$

Dunque

$$y(t) = \sin(t) - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+\sin(t)}{1-\sin(t)} \right) \cdot \cos(t). \quad \blacksquare$$