Geometria differenziale A.A. 20/21 (secondo semestre)

Prerequisiti:

- Algebra lineare e multilineare
- Calcolo differenziale in più variabili
- Nozioni di base sulle varietà differenziabili

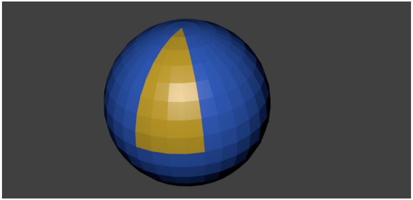
Argomenti:

- Metriche riemanniane
- Curvatura
- Connessioni
- Gruppi di Lie

Testo:

J. Lee, Riemannian Manifolds. An Introduction to Curvature. Springer, 1997.

Curvatura



Data una sfera di raggio r, sia T un settore di semisfera con angolo al vertice α:

- $\text{area}(T) = \alpha r^2$
- gli angoli di T sono $\alpha_1 = \alpha_2 = \pi/2, \alpha_3 = \alpha$
- $\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3-\pi}{\text{area}(T)} = \frac{1}{r^2}$.

Più in generale, per una superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ in $p \in S$ è

$$K(p) = \lim_{\text{area}(T)\to 0} \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi}{\text{area}(T)}.$$

dove T varia tra i triangoli geodetici che contengono p.

Metriche riemanniane

Una varietà riemanniana (M, g) è una varietà differenziabile tale che su ogni $T_x M$ è assegnato un prodotto scalare definito positivo. Possiamo definire:

- gli angoli tra due vettori

$$\cos\theta = \frac{\langle v, w\rangle}{\|v\|\,\|w\|}$$

- le lunghezze delle curve $\gamma \colon [0,1] \to M$,

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\, dt$$

- le geodetiche $\simeq$ curve di lunghezza minima tra due punti
- le aree di una regione

$$\rightsquigarrow \boxed{\text{curvatura}}$$

Gruppi di Lie

Un gruppo di Lie è una varietà G munita di una struttura di gruppo per cui le operazioni

$$G \times G \to G, \quad (g, h) \mapsto gh,$$

$$G \to G, \quad g \mapsto g^{-1}$$

sono C^∞.

- il gruppo di isometrie di una varietà riemanniana è un gruppo di Lie, per esempio per S^2 è il gruppo delle matrici ortogonali $O(3)$.
- data una varietà, per trovare una metrica con determinate proprietà di curvatura (ad es. Einstein) occorre risolvere una PDE. Se si impone invarianza per gruppo di Lie, si può ottenere ODE o equazione algebrica
- l'olonomia è un gruppo di Lie, per esempio per S^2 è $SO(2)$.

Geometria complessa A.A. 21/22 (secondo semestre)

È un corso sulle varietà complesse che si tiene ad anni alterni. Per ulteriori informazioni si fa riferimento alla pagina elearning.

Chi fosse interessato e non è studente unimib può contattarmi per email.