GEOMETRIA SIMPLETTICA

docente: Roberto Paoletti

I semestre

GEOMETRIA SIMPLETTICA

1. $\mathbb{R}^{2n} = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p})\}$

GEOMETRIA SIMPLETTICA

1. $\mathbb{R}^{2n} = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p})\}$
2. $\omega_0 : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$:

$$\omega_0 \left(\begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{p}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{p}_2 \end{pmatrix} \right) := \mathbf{q}_1^t\, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1^t\, \mathbf{q}_2$$

Quindi

$$M_{\mathcal{C}}(\omega_0) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

GEOMETRIA SIMPLETTICA

1. $\mathbb{R}^{2n} = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p})\}$
2. $\omega_0 : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$:

$$\omega_0 \left(\begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{p}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{p}_2 \end{pmatrix} \right) := \mathbf{q}_1^t \, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1^t \, \mathbf{q}_2$$

   Quindi

$$M_{\mathcal{C}}(\omega_0) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

3. ω_0 non-degenere e antisimmetrica;

GEOMETRIA SIMPLETTICA

1. $\mathbb{R}^{2n} = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p})\}$
2. $\omega_0 : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$:

$$\omega_0 \left(\begin{pmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{p}_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{q}_2 \\ \mathbf{p}_2 \end{pmatrix} \right) := \mathbf{q}_1^t \, \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1^t \, \mathbf{q}_2$$

Quindi

$$M_{\mathcal{C}}(\omega_0) = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

3. ω_0 non-degenere e antisimmetrica;
4. ω_0 induce un isomorfismo

$$\mathbb{R}^{2n} \cong (\mathbb{R}^{2n})^\vee, \quad v \mapsto \omega_0(v, \cdot).$$

1. Usiamo $\mathbb{R}^{2n} \cong T_p\mathbb{R}^{2n}$ per interpretare Ω_0 come una 2-forma differenziale:

$$\omega_0 = \mathrm{d}\mathbf{q} \wedge \mathrm{d}\mathbf{p} = \sum_j \mathrm{d}q_j \wedge \mathrm{d}p_j \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n});$$

1. Usiamo $\mathbb{R}^{2n} \cong T_p\mathbb{R}^{2n}$ per interpretare Ω_0 come una 2-forma differenziale:

$$\omega_0 = \mathrm{d}\mathbf{q} \wedge \mathrm{d}\mathbf{p} = \sum_j \mathrm{d}q_j \wedge \mathrm{d}p_j \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n});$$

2. $\mathrm{d}\omega_0 = 0$;

1. Usiamo $\mathbb{R}^{2n} \cong T_p\mathbb{R}^{2n}$ per interpretare Ω_0 come una 2-forma differenziale:

$$\omega_0 = \mathrm{d}\mathbf{q} \wedge \mathrm{d}\mathbf{p} = \sum_j \mathrm{d}q_j \wedge \mathrm{d}p_j \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n});$$

2. $\mathrm{d}\omega_0 = 0$;
3. $\omega_0(p) : T_p\mathbb{R}^{2n} \times T_p\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ non degenere $\forall\, p = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$;

1. Usiamo $\mathbb{R}^{2n} \cong T_p\mathbb{R}^{2n}$ per interpretare Ω_0 come una 2-forma differenziale:

$$\omega_0 = \mathrm{d}\mathbf{q} \wedge \mathrm{d}\mathbf{p} = \sum_j \mathrm{d}q_j \wedge \mathrm{d}p_j \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n});$$

2. $\mathrm{d}\omega_0 = 0$;
3. $\omega_0(p) : T_p\mathbb{R}^{2n} \times T_p\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ non degenere $\forall\, p = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$;
4. per ogni $\lambda \in T_p^{\vee}\mathbb{R}^{2n}$ $\exists !\ v \in T_p\mathbb{R}^{2n}$ tale che

$$\lambda = \iota(v)\,\omega_0(p);$$

1. Usiamo $\mathbb{R}^{2n} \cong T_p\mathbb{R}^{2n}$ per interpretare Ω_0 come una 2-forma differenziale:

$$\omega_0 = \mathrm{d}\mathbf{q} \wedge \mathrm{d}\mathbf{p} = \sum_j \mathrm{d}q_j \wedge \mathrm{d}p_j \in \Omega^2(\mathbb{R}^{2n});$$

2. $\mathrm{d}\omega_0 = 0$;
3. $\omega_0(p) : T_p\mathbb{R}^{2n} \times T_p\mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}$ non degenere $\forall\, p = (\mathbf{q}, \mathbf{p})$;
4. per ogni $\lambda \in T_p^\vee\mathbb{R}^{2n}$ $\exists!\ v \in T_p\mathbb{R}^{2n}$ tale che

$$\lambda = \iota(v)\,\omega_0(p);$$

5. isomorfismo

$$v \in T_p\mathbb{R}^{2n} \to \iota(v)\,\omega_0(p) \in T_p^\vee\mathbb{R}^{2n}.$$

1. globalmente, ω_0 induce isomorfismo

$$V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n}) \mapsto \iota(V)\,\omega_0 \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n}).$$

1. globalmente, ω_0 induce isomorfismo

$$V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n}) \mapsto \iota(V)\,\omega_0 \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n}).$$

2. $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ha differenziale

$$\mathrm{d}f = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j}\,\mathrm{d}q_j + \sum_j \frac{\partial f}{\partial p_j}\,\mathrm{d}p_j;$$

1. globalmente, ω_0 induce isomorfismo
$$V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n}) \mapsto \iota(V)\,\omega_0 \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n}).$$
2. $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ha differenziale
$$\mathrm{d}f = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j}\,\mathrm{d}q_j + \sum_j \frac{\partial f}{\partial p_j}\,\mathrm{d}p_j;$$
3. Il campo vettoriale hamiltoniano di f (rispetto a ω_0) è definito da
$$\iota(v_f)\,\omega_0 = \mathrm{d}f.$$

1. globalmente, ω_0 induce isomorfismo
$$V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n}) \mapsto \iota(V)\,\omega_0 \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n}).$$
2. $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ha differenziale
$$\mathrm{d}f = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j}\,\mathrm{d}q_j + \sum_j \frac{\partial f}{\partial p_j}\,\mathrm{d}p_j;$$
3. Il campo vettoriale hamiltoniano di f (rispetto a ω_0) è definito da
$$\iota(\upsilon_f)\,\omega_0 = \mathrm{d}f.$$
4. $$\upsilon_f = \sum_j \frac{\partial f}{\partial p_j}\,\frac{\partial}{\partial q_j} - \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j}\,\frac{\partial}{\partial p_j};$$

1. globalmente, ω_0 induce isomorfismo
$$V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n}) \mapsto \iota(V)\,\omega_0 \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n}).$$
2. $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ha differenziale
$$\mathrm{d}f = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j}\,\mathrm{d}q_j + \sum_j \frac{\partial f}{\partial p_j}\,\mathrm{d}p_j;$$
3. Il campo vettoriale hamiltoniano di f (rispetto a ω_0) è definito da
$$\iota(\upsilon_f)\,\omega_0 = \mathrm{d}f.$$
4. $$\upsilon_f = \sum_j \frac{\partial f}{\partial p_j}\,\frac{\partial}{\partial q_j} - \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j}\,\frac{\partial}{\partial p_j};$$
5. il flusso di υ_f è dato da
$$\dot{q}_j = \frac{\partial f}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial f}{\partial q_j}$$
(equazioni di Hamilton);

1. globalmente, ω_0 induce isomorfismo
$$V \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^{2n}) \mapsto \iota(V)\,\omega_0 \in \Omega^1(\mathbb{R}^{2n}).$$
2. $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ ha differenziale
$$\mathrm{d}f = \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j}\,\mathrm{d}q_j + \sum_j \frac{\partial f}{\partial p_j}\,\mathrm{d}p_j;$$
3. Il campo vettoriale hamiltoniano di f (rispetto a ω_0) è definito da
$$\iota(v_f)\,\omega_0 = \mathrm{d}f.$$
4. $$v_f = \sum_j \frac{\partial f}{\partial p_j}\,\frac{\partial}{\partial q_j} - \sum_j \frac{\partial f}{\partial q_j}\,\frac{\partial}{\partial p_j};$$
5. il flusso di v_f è dato da
$$\dot{q}_j = \frac{\partial f}{\partial p_j}, \quad \dot{p}_j = -\frac{\partial f}{\partial q_j}$$
(equazioni di Hamilton);
6. ϕ^t preserva ω_0 ($L_V(\omega) = 0$) e quindi il volume di un aperto;

1. varietà simplettica: (M, ω) con:
    - $\omega \in Z^2(M)$ ossia $\mathrm{d}\omega = 0$;
    - ω_p non degenere per ogni p;

1. varietà simplettica: (M, ω) con:
   - $\omega \in Z^2(M)$ ossia $\mathrm{d}\omega = 0$;
   - ω_p non degenere per ogni p;
2. isomorfismo

$$V \in \mathfrak{X}(M) \to \iota(V)\,\omega \in \Omega^1(M);$$

1. varietà simplettica: (M, ω) con:
   - $\omega \in Z^2(M)$ ossia $\mathrm{d}\omega = 0$;
   - ω_p non degenere per ogni p;
2. isomorfismo

$$V \in \mathfrak{X}(M) \to \iota(V)\,\omega \in \Omega^1(M);$$

3. $\mathrm{d}\omega = 0$ implica:

$$L_V(\omega) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \iota(V)\,\omega = \mathrm{d}f \quad \text{localmente.}$$

   (campo vettoriale localmente hamiltoniano).

1. varietà simplettica: (M, ω) con:
   - $\omega \in Z^2(M)$ ossia $\mathrm{d}\omega = 0$;
   - ω_p non degenere per ogni p;
2. isomorfismo

$$V \in \mathfrak{X}(M) \to \iota(V)\,\omega \in \Omega^1(M);$$

3. $\mathrm{d}\omega = 0$ implica:

$$L_V(\omega) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \iota(V)\,\omega = \mathrm{d}f \quad \text{localmente.}$$

   (campo vettoriale localmente hamiltoniano).
4. localmente,

$$(M, \omega) \sim (\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$$

   (coordinate di Darboux)

Esempi:

- M varietà differenziale (spazio delle configurazioni),

$$T^*M \quad \text{fibrato cotangente} \quad \omega_{can} = \mathrm{d}\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} = -\mathrm{d}\lambda_{can}$$

(forma simplettica canonica). (T^*M, ω_{can}) = 'spazio delle fasi' associato alo spazio delle configurazioni M.

Esempi:

- M varietà differenziale (spazio delle configurazioni),

$$T^*M \quad \text{fibrato cotangente} \quad \omega_{can} = \mathrm{d}\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} = -\mathrm{d}\lambda_{can}$$

  (forma simplettica canonica). (T^*M, ω_{can}) = 'spazio delle fasi' associato alo spazio delle configurazioni M.
- Se $g : T^*M \to \mathbb{R}$ metrica Riemanniana,

$$v_g = \text{campo vettoriale geodetico}, \quad \phi^t = \text{flusso geodetico}.$$

Esempi:

- M varietà differenziale (spazio delle configurazioni),

$$T^*M \quad \text{fibrato cotangente} \quad \omega_{can} = \mathrm{d}\mathbf{p} \wedge \mathbf{q} = -\mathrm{d}\lambda_{can}$$

  (forma simplettica canonica). (T^*M, ω_{can}) = 'spazio delle fasi' associato alo spazio delle configurazioni M.
- Se $g : T^*M \to \mathbb{R}$ metrica Riemanniana,

$$v_g = \text{campo vettoriale geodetico}, \quad \phi^t = \text{flusso geodetico}.$$

- Se G = gruppo di Lie compatto, $\mathfrak{g}^\vee$ co-algebra di Lie di G. G agisce su $\mathfrak{g}^\vee$ (azione coaggiunta). Le orbite coaggiunte

$$\mathcal{O} \subset \mathfrak{g}^\vee$$

  hanno una struttura simplettica (Kostant-Kirillov) strettamente legata alle rappresentazioni irriducibili di G.

- Se un gruppo di Lie G agisce su (M, ω) (trasformazioni canoniche, sistema dinamico con simmetrie) spesso esiste una **mappa momento** (azioni hamiltoniana):

  $$\Phi : M \to \mathfrak{g}^\vee;$$

  Usando le orbite coaggiunte si possono costruire nuove varietà simplettiche (riduzioni) che sono dei 'quozienti' rispetto all'azione di G (sistemi dinamici ridotti).

- Se un gruppo di Lie G agisce su (M, ω) (trasformazioni canoniche, sistema dinamico con simmetrie) spesso esiste una **mappa momento** (azioni hamiltoniana):

$$\Phi : M \to \mathfrak{g}^\vee;$$

  Usando le orbite coaggiunte si possono costruire nuove varietà simplettiche (riduzioni) che sono dei 'quozienti' rispetto all'azione di G (sistemi dinamici ridotti).

- In Geometria Complessa, $\mathbb{P}^n$ ha una struttura simplettica privilegiata (Fubini-Study)

$$\omega_{FS} = \frac{\imath}{2\pi} \partial\overline{\partial} \ln\left(1 + \|Z\|^2\right)$$

  così che ogni varietà proiettiva ha una *struttura di Kähler* (struttura simplettica compatibile con la struttura di varietà complessa).

- Se un gruppo di Lie G agisce su (M, ω) (trasformazioni canoniche, sistema dinamico con simmetrie) spesso esiste una **mappa momento** (azioni hamiltoniana):

$$\Phi : M \to \mathfrak{g}^\vee;$$

  Usando le orbite coaggiunte si possono costruire nuove varietà simplettiche (riduzioni) che sono dei 'quozienti' rispetto all'azione di G (sistemi dinamici ridotti).
- In Geometria Complessa, $\mathbb{P}^n$ ha una struttura simplettica privilegiata (Fubini-Study)

$$\omega_{FS} = \frac{\imath}{2\pi} \partial\overline{\partial} \ln \left(1 + \|Z\|^2\right)$$

  così che ogni varietà proiettiva ha una *struttura di Kähler* (struttura simplettica compatibile con la struttura di varietà complessa).
- In Analisi, la teoria simbolica degli operatori psudodifferenziali e di Fourier si basa sulla geometria simplettica dello spazio cotangente T^*M.