Metodi Matematici per l'Analisi Economica
Controllo Ottimo

Docente: Andrea Calogero
8 CFU
1^0 semestre

Metodi Matematici per l'Analisi Economica
Ottimizzazione e Analisi Convessa

Docente: Rita Pini
8 CFU
2^0 semestre

Metodi Matematici per l'Analisi Economica
Ottimizzazione e Analisi Convessa

"Prezzi ombra"

Primo scenario:
$C(x)$ è il costo sostenuto se si adotta la strategia x, mentre $v_i(x) \leq 0$ rappresenta un vincolo su risorse, lavoro, magazzini, oppure un vincolo di tipo legislativo:

$$c_1 = \min_{x \in D} C(x) \qquad \text{sub } v_i(x) \leq 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \qquad D \subset \mathbb{R}^n$$

Secondo scenario:
I vincoli possono essere violati, e il costo unitario per unità di violazione del vincolo i-esimo è $\lambda_i \geq 0$:

$$c_2(\lambda) = \min_{x \in D} \left(C(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i v_i(x) \right)$$

È sempre $c_1 \geq c_2(\lambda)$.

Se, per certi valori di λ, si ha $c_1 = c_2(\lambda)$, significa che non c'è vantaggio nella violazione dei vincoli. I valori λ_i sono detti "prezzi ombra".

Il modello di Markowitz

Un decisore deve investire una unità di capitale distribuendola su n titoli rischiosi di cui sono noti

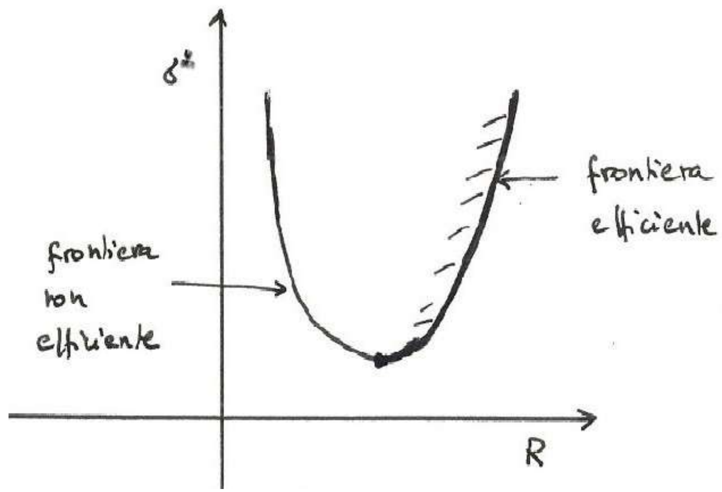
- il rendimento medio $r = (r_1, \dots, r_n)$, con r_i rendimento i-esimo titolo
- la matrice varianza-covarianza $V = [v_{i,j}]_{i,j=1,\dots n}$ degli n titoli.

Sia $x = (x_1, \dots, x_n)$ un portafoglio, ove x_i rappresenta il capitale investito nell'i-esimo titolo. Il suo rendimento atteso sarà

$$\langle x, r \rangle.$$

Obiettivo dell'investitore è ottenere un rendimento atteso R fissato, con il minimo rischio:

$$\begin{cases} \min\limits_{x \in \mathbb{R}^n} \sigma^2(x) = x^T V x \\ \langle x, r \rangle = R \\ \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases}$$



Battaglia dei sessi

Un ragazzo e una ragazza stanno decidendo se passare il venerdì sera al cinema (C) o a teatro (T). Il ragazzo preferisce il cinema, la ragazza il teatro, ma in ogni caso entrambi preferiscono passare il tempo insieme. Il “piacere” che ciascuno ha nelle varie alternative è riportato in una tabella

		Ragazza	
		C	T
Ragazzo	C	$3, 1$	$0, 0$
	T	$0, 0$	$1, 3$

- Quale sarà la situazione di equilibrio?
- Se ci sono 100 ragazzi e 100 ragazze nella stessa situazione, quale sarà la percentuale di ragazzi e ragazze che faranno una certa scelta, in condizioni di equilibrio?

PROGRAMMA

- Introduzione ai problemi di ottimizzazione: esempi in ambito economico.
- Ottimizzazione: estensioni del teorema di Weierstrass, principio variazionale di Ekeland.
- Teoremi dell'alternativa (Motzkin, Farkas).
- Analisi convessa: teoremi di Carathéodory, di Minkowski, di separazione. Regolarità delle funzioni convesse. Ottimizzazione convessa.
- Programmazione non lineare. Coni tangenti e teorema di Lyusternik. Teorema di Fritz-John. Moltiplicatori, funzione valore e "prezzi ombra".
- Dualità lagrangiana: teorema di dualità debole, forte.
- Giochi strategici ed equilibrio di Nash. Teorema di punto fisso di Kakutani. Esistenza di equilibrio.
- Giochi a due giocatori a somma zero: valore di un gioco. Strategie miste in giochi finiti.

Metodi Matematici per l'Analisi Economica
Controllo Ottimo

A model of optimal consumption

Consider an investor who, at time $t = 0$, is endowed with an initial capital $x(0) = x_0 > 0$. At any time he and his heirs decide about their rate of consumption $c(t) \geq 0$. Thus the capital stock evolves according to

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = rx(t) - c(t)$$

where $r > 0$ is a given and fixed rate of return. The investor's time utility for consuming at rate $c(t)$ is $U(c(t))$. The investor's problem is to find a consumption plain so as to maximize his discounted utility

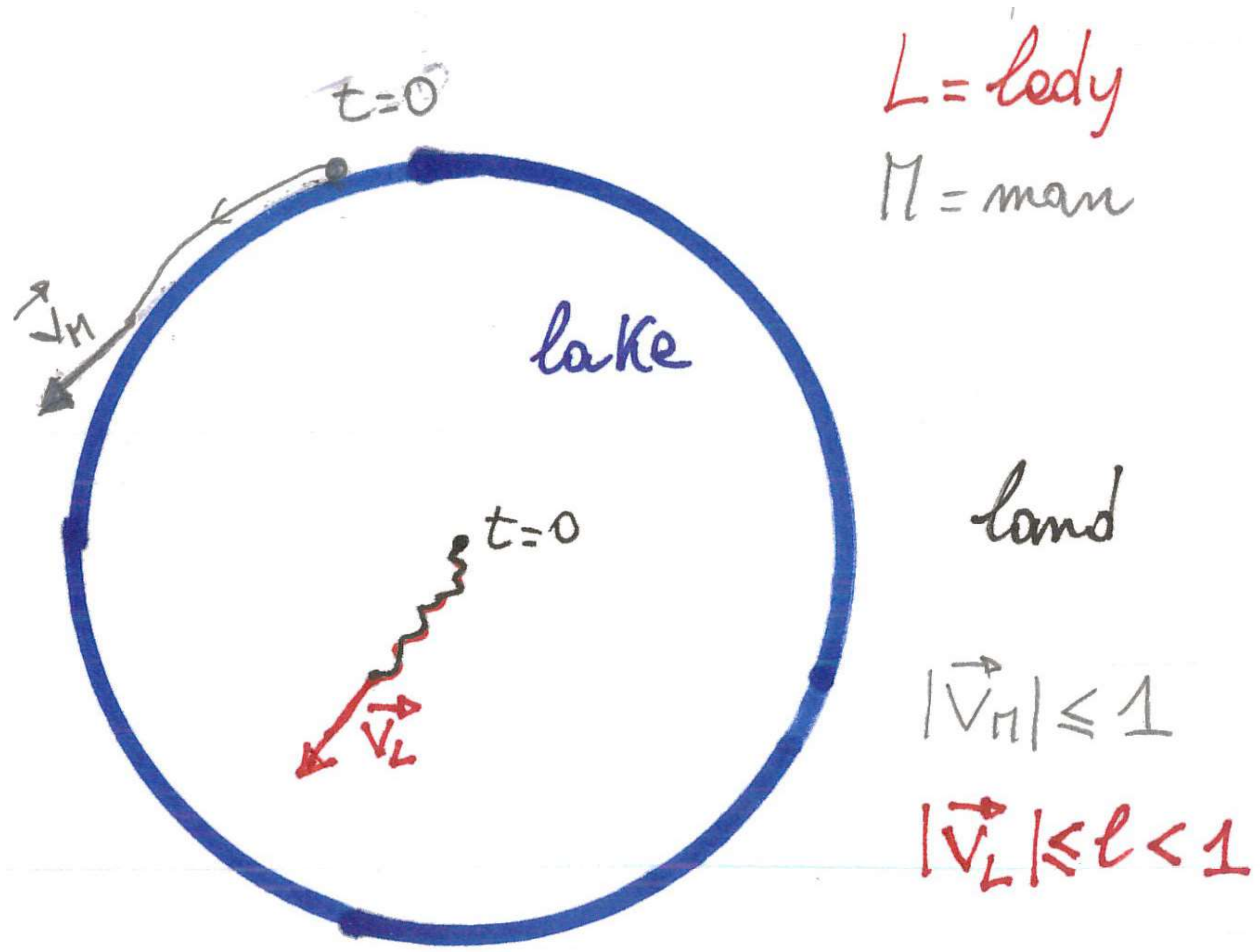
$$\int_0^\infty e^{-\delta t} U(c(t))dt$$

where δ, with $\delta \geq r$, is a given discount rate, subject to the solvency constraint that the capital stock $x(t)$ must be positive for all $t \geq 0$ and such that vanishes at ∞. Then the problem is

$$\begin{cases} \max\limits_{c\in\mathcal{C}} \displaystyle\int_0^\infty e^{-\delta t} U(c(t))\,\mathrm{d}t \\ \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = rx(t) - c(t) \\ x(0) = x_0 > 0 \\ x(t) \geq 0 \\ \lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0 \\ \mathcal{C} = \{c : [0,\infty) \to [0,\infty),\ \text{measurable}\} \end{cases} \tag{1}$$

with $\delta \geq r \geq 0$ fixed constants.

The lady in the lake



A lady (E=Evader) is swimming in a circular lake with a constant speed $v_{Lady} = v_E < 1$; she can change the direction in which she swims instantaneously. A man

(P=Pursuer) is not a swimmer and he wishes to intercept the lady when she reaches the shore; he is in a side of the lake and can run along the perimeter with maximum speed $v_{Man} = v_P = 1$. He also can change his direction instantaneously. We assume that the lady and the man never get tired. E doesn't stay in the lake forever and she wishes to come out without being caught by the man; in the land, E can run faster than P. E's goal is to maximize the pay-off, which is the angular distance θ viewed from the center C of the lake, at the time E reaches to the store. P obviously wants minimize such pay-off.

.... we have the two-person zero-sum game

$$\begin{cases} \textit{Man (P)}: \ \min\limits_{u_1} |\theta(T)| \qquad\qquad \textit{Lady (E)}: \ \max\limits_{u_2} |\theta(T)| \\ |u_1| \le 1 \\ \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \dfrac{v_E \sin u_2}{r} - \dfrac{u_1}{R} \\ \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = v_E \cos u_2 \\ r(0) = 0, \ r(T) = R \end{cases}$$

PROGRAMMA:

Alcuni problemi introduttivi

1. IL CONTROLLO OTTIMO CON LA TECNICA VARIAZIONALE.

Il problema più semplice di controllo ottimo.

Problemi più generali: a tempo minimo, a orizzonte infinito.

Teoria (con dimostrazioni significative), esercizi e modelli.

2. IL CONTROLLO OTTIMO CON LA PROGRAMMAZIONE DINAMICA.

Il problema più semplice di controllo ottimo.

Problemi più generali: a orizzonte infinito.

Legami tra tecnica variazionale e Programmazione Dinamica.

Teoria (con dimostrazioni significative), esercizi e modelli.

3. TEORIA DEI GIOCHI DIFFERENZIALI.

Nozioni di equilibrio e di strategie.

Equilibrio di Nash. Equilibrio di Stackelberg. Giochi a somma zero.

Giochi di cattura ed evasione. Giochi di tipo.

Teoria (con dimostrazioni significative) e modelli.

Materiale didattico, programma, temi di esame tutto disponibile in rete.