

MATEMATICA ELEMENTARE

Docente: G. Travaglini
giancarlo.travaglini@unimib.it

Dipartimento di Matematica e Applicazioni

LAUREA MAGISTRALE IN MATEMATICA
2020-21, II SEMESTRE

MATEMATICA ELEMENTARE

È un corso elementare di Geometria e Teoria dei Numeri, con attenzione agli aspetti didattici e ai collegamenti con altri argomenti della Matematica.

Prerequisiti: i primi due anni della laurea triennale in Matematica.

Programma sintetico

- 1 Poliedri, teorema di Minkowski-Weyl e programmazione lineare.
- 2 Paradosso di Simpson, approssimazione diofantea e teorema di Hurwitz.
- 3 Problema delle monete, funzioni generatrici e teorema di Schur.
- 4 Terne pitagoriche, geometria dei numeri e teorema di Lagrange.
- 5 Legge di Benford, teoria di Weyl e teorema di Borel.
- 6 Somme di Riemann, formula di Eulero-Maclaurin e metodo Monte Carlo.

Appendice. Linguaggio matematico e studio della Matematica.

Ogni capitolo è diviso in due parti:

la Parte A consiste di una lezione che può essere svolta in una classe quarta o quinta della Scuola Superiore;

la Parte B è un approfondimento adeguato al livello di una Laurea Magistrale in Matematica.

Bibliografia.

- 1) M. Beck, S. Robins, *Computing the continuous discretely. Integer-point enumeration in polyhedra*. Springer (2015).
- 2) M. Bramanti, G. Travaglini, *Studying Mathematics: The Beauty, the Toil and the Method*, Springer (2018).
- 3) J. Sally, P. Sally, *Roots to research. A vertical development of mathematical problems*. Amer. Math. Soc. (2007).
- 4) G. Travaglini, *Number Theory, Fourier Analysis and Geometric Discrepancy*, Cambridge Univ. Press (2014).
- 5) Appunti del docente.

Un esempio: il Capitolo 2

Parte A.

Dovete scegliere un ristorante e - ragionevolmente - decidete di tenere conto dei giudizi espressi in rete. Le alternative sono il “Ristorante Chiara” e il “Ristorante Simone”. Entrambi hanno avuto 40 recensioni, e i giudizi favorevoli sono riportati nella tabella seguente.

	Ristorante Chiara	Ristorante Simone
giudizi favorevoli degli uomini	$18/36 = 50\%$	$5/15 = 33,333\dots\%$
giudizi favorevoli delle donne	$4/4 = 100\%$	$20/25 = 80\%$

Quindi il Ristorante Chiara ottiene percentuali di giudizi più favorevoli sia tra gli uomini sia tra le donne.

Se però consideriamo il “dato aggregato”, cioè sommiamo i giudizi favorevoli ($18 + 4$ su 40 per Chiara e $5 + 20$ su 40 per Simone) otteniamo

	Ristorante Chiara	Ristorante Simone
giudizi favorevoli di tutti i clienti	$22/40 = 55\%$	$25/40 = 62,5\%$

Dunque, considerando i giudizi di tutti i clienti, vince Simone.

È tutto corretto, ma siamo entrati nel *Paradosso di Simpson*.

ParteB.

Il paradosso è legato a questa operazione tra frazioni, chiamata *Media di Farey*:

$$\left(\frac{18}{36}, \frac{4}{4}\right) \mapsto \frac{18+4}{36+4}.$$

La media di Farey è utile nello studio delle “frazioni semplificate” (ad esempio vediamo nella tabella che $4/7$ è la media di Farey di $1/2$ e $3/5$):

$\frac{0}{1}$																			$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$									$\frac{1}{2}$										$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$						$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$			$\frac{2}{3}$							$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$			$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$			$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$							$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$					$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{2}$		$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$		$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$				$\frac{1}{1}$
$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{7}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{7}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{7}$		$\frac{1}{1}$

$4/7$ è la frazione con minor denominatore tra quelle comprese tra $1/2$ e $3/5$, e questo è un fatto generale, importante nell'approssimazione diofantea (cioè lo studio della approssimazione dei numeri reali attraverso i numeri razionali).

Teorema

Siano h/k e h'/k' termini successivi in una delle righe della precedente tabella. Allora la media di Farey $(h + h') / (k + k')$ è la frazione con minor denominatore tra tutte quelle strettamente comprese tra h/k e h'/k' .

Dal teorema precedente si può dedurre il seguente risultato, abbastanza profondo, di approssimazione diofantea.

Teorema (Hurwitz)

Per ogni numero irrazionale α esistono infiniti interi positivi n, p tali che

$$\left| \alpha - \frac{p}{n} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} n^2} . \quad (1)$$

Il teorema di Hurwitz è il miglior raffinamento possibile del teorema di approssimazione di Dirichlet.