Matematica
Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

Gennaio 2019

> **Istruzioni**: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
> Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce.
> Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.
> Puoi utilizzare solo i fogli protocollo consegnati durante lo svolgimento della prova.
> Al termine della prova devi riconsegnare *tutti e solo* i fogli ricevuti.
> Immediatamente dopo la consegna, su ciascun foglio protocollo scrivi in modo chiaro e leggibile a penna indelebile il tuo nome, cognome e numero di matricola.
> *I fogli recanti una qualsiasi correzione o cancellazione nei dati identificativi dello studente non verranno valutati a meno di non richiederne l'immediata sostituzione.*

1. *Esercizio.*

   (a) (3 punti) Risolvi la seguente *disequazione irrazionale*:

$$100\sqrt{x} > 200\,x$$

Soluzione La forma normale della disequazione è:

$$\sqrt{x} > 2\,x$$

La radice ha indice pari, per cui le soluzioni sono individuate dall'unione di due sistemi:

$$\begin{cases} 2\,x \geq 0 \\ x > (2x)^2 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} 2\,x < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ 4x^2 - x < 0 \end{cases} \quad \cup \quad \begin{cases} x < 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Il secondo sistema non ha soluzioni, per cui la disequazione è soddisfatta per quei valori di x non negativi ($x \geq 0$) tali per cui:

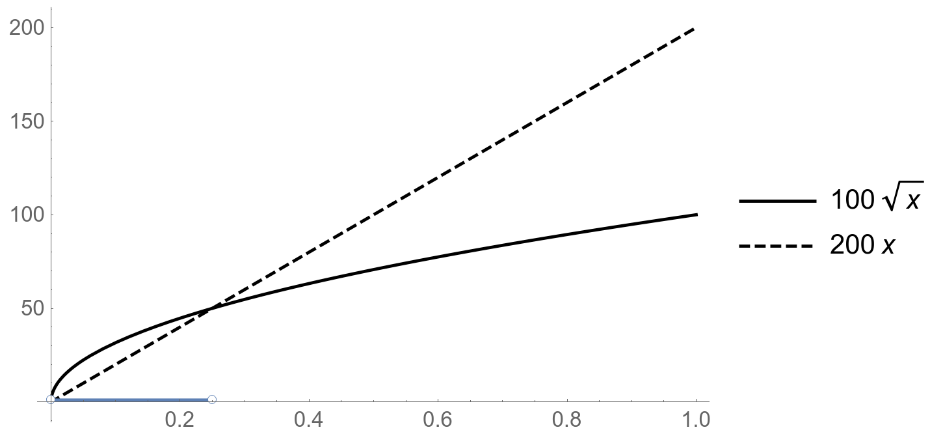
$$x(4x-1)<0$$

cioè $x \in (0, 1/4)$.

(b) (2 punti) Disegna su uno stesso piano cartesiano i *grafici* delle seguenti funzioni sull'intervallo chiuso e limitato $x \in [0,1]$ e individua nel grafico l'insieme delle soluzioni della disequazione risolta al punto precedente:

$$y = 200\,x$$
$$y = 100\,\sqrt{x}$$

Soluzione



2. *Esercizio/Problema.* Immagina di gestire un'impresa che ha due reparti e di dover decidere come distribuire i lavoratori tra questi due reparti. Sai che il numero di unità che in ognuno di questi reparti si può produrre ogni mese è una data funzione della frazione di persone che ci lavora. In particolare, sai che il numero di unità prodotte nel primo reparto è dato da:

$$g(x) = 100\,\sqrt{x}$$

dove $x \in [0,1]$ è la frazione di lavoratori che opera nel primo reparto, mentre il numero di unità prodotte nel secondo reparto risulta pari a:

$$h(x) = 200\,(1-x)$$

dove $(1-x)$ è la frazione di lavoratori impiegata nel secondo reparto.

Es. se $1/4$ dei lavoratori lavora nel primo reparto vuol dire che i restanti $3/4$ sono impiegati nel secondo reparto. In tal caso si avrà $x = 1/4 = 0,25$ e $1-x = 3/4 = 0,75$.

La produzione totale dell'impresa sarà pertanto data dalla seguente funzione $f : [0,1] \subseteq \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

dove $x \in [0,1]$ è la frazione di lavoratori impiegati nel primo reparto.

(a) (2 punti) Determina il *segno della funzione* f nell'insieme di definizione $[0,1]$, il valore che la funzione f assume in corrispondenza degli *estremi* di tale insieme e l'*intercetta* con l'asse delle ordinate.

Soluzione Essendo $g(x) \geq 0 \; \forall x \geq 0$ e $h(x) \geq 0$ se $x \leq 1$, essendo f la somma di queste due funzioni, si avrà $f(x) \geq 0$ per ogni $x \in [0, 1]$.
Agli estremi dell'intervallo considerato la funzione assumerà i seguenti valori:

$$\begin{aligned} f(0) &= 100\sqrt{0} + 200\,(1-0) = 200 \\ f(1) &= 100\sqrt{1} + 200\,(1-1) = 100 \end{aligned}$$

L'intercetta verticale è $f(0) = 200$.

(b) (1 punto) Determina gli eventuali *punti di discontinuità* di f nell'intervallo $[0, 1]$.

Soluzione Essendo la somma di funzioni elementari ed essendo queste continue nell'insieme di definizione, f è continua.

(c) (2 punti) Calcola le *derivate prime* delle funzioni $g(x)$, $h(x)$ e $f(x)$.

Soluzione

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{100}{2\sqrt{x}} = \frac{50}{\sqrt{x}} \\ h'(x) &= -200 \\ f'(x) &= g'(x) + h'(x) = \frac{50}{\sqrt{x}} - 200 \end{aligned}$$

(d) (2 punti) Studia il *segno della derivata* di f, $f'(x)$, e individua gli eventuali *punti stazionari* di f.

Soluzione

$$\begin{aligned} \frac{50}{\sqrt{x}} - 200 &\geq 0 \\ \frac{50 - 200\sqrt{x}}{\sqrt{x}} &\geq 0 \end{aligned}$$

La derivata prima è definita per ogni $x > 0$. Il segno è deciso dal numeratore:

$$\begin{aligned} 50 - 200\sqrt{x} &\geq 0 \\ \sqrt{x} &\leq \frac{1}{4} \\ x &\leq \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16} = 0,0625 \end{aligned}$$

Punto stazionario di f è il punto $x_0 = 1/16$ in cui $f'(x_0) = 0$.[1]

(e) (2 punti) Determina la *concavità/convessità* di f.

[1]Essendo $f'(x) = g'(x) + h'(x)$, un punto è stazionario se e solo se $g'(x) = -h'(x)$. La produzione non cambia al margine se l'aumento di produzione conseguito nel primo reparto dovuto allo spostamento di lavoratori dal secondo al primo reparto è uguale alla diminuzione di produzione nel secondo reparto generato da questo spostamento.

Soluzione Essendo la somma di funzioni globalmente concave, f è globalmente concava.[2]

(f) (2 punti) Individua gli eventuali *punti di massimo* e *minimo assoluto* di $f(x)$ nell'insieme di definizione.

Soluzione Essendo f una funzione continua nell'intervallo chiuso e limitato $[0, 1]$, per il teorema di Weierstrass assumerà un valore massimo e uno minimo. I punti di massimo/minimo assoluto saranno i valori di x corrispondenti a tali valori.

Dallo studio del segno della derivata prima sappiamo che la funzione è strettamente crescente per $x \in [0, 1/16)$ e strettamente decrescente per $x > 1/16$. $x = 1/16$ è pertanto un punto di massimo e:

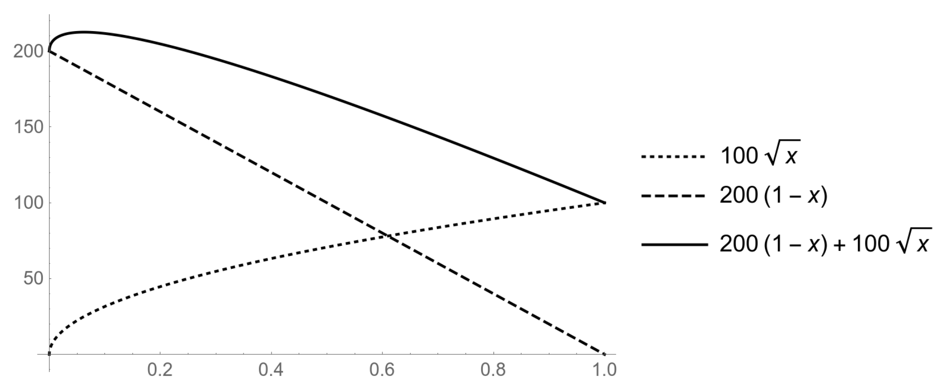
$$\max f(x) = f(1/16) = 100\sqrt{\frac{1}{16}} + 200\left(1 - \frac{1}{16}\right) = \frac{100}{4} + 25 \cdot \frac{15}{2} = \frac{425}{2} = 212,5$$

Poiché la funzione è strettamente crescente nell'intervallo $x \in [0, 1/16)$ ed avendosi $f(0) = 200$, mentre è strettamente decrescente nell'intervallo $x \in (1/16, 1]$ ed essendo $f(1) = 100 < 200$, $x = 1$ è un punto di minimo e:

$$\min f(x) = f(1) = 100$$

(g) (2 punti) Disegna su uno stesso piano cartesiano i *grafici* delle funzioni $g(x)$, $h(x)$ e $f(x)$ sull'intervallo $x \in [0, 1]$. Alla luce di quanto scoperto studiando la funzione f, che cosa puoi concludere riguardo il problema di determinare la miglior distribuzione dei lavoratori tra i due reparti?

Soluzione



[2]In alternativa, si può calcolare la derivata seconda e notare che $f''(0) < 0 \; \forall x > 0$:

$$f''(x) = -\frac{25}{\sqrt{x^3}}.$$

La distribuzione migliore è quella in cui 1/16 dei lavoratori è assegnato al primo reparto, mentre i restanti 15/16 sono assegnati al secondo reparto. In corrispondenza di questa distribuzione l'impresa produce 212,5 unità al mese. Qualsiasi altra distribuzione genera una produzione strettamente minore.

3. *Esercizio.* Considera un mazzo di carte da poker, in cui si hanno 13 carte – 2, 3, . . . , 10, J, Q, K, A (Asso) – per ognuno dei 4 semi ($\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit$), per un totale di 52 carte. Calcola:
   (a) (2 punti) il numero di tutti i modi in cui è possibile ordinare le carte.

   Soluzione Il numero di ordinamenti possibili è pari alle permutazioni di 52 oggetti:
$$P_{52} = 52! \approx 8,07 \times 10^{67}$$

   (b) (2 punti) il numero degli ordinamenti in cui sono divise per seme (le carte di uno stesso seme sono adiacenti).

   Soluzione Per ogni dato ordine dei semi, es. $\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamondsuit$, gli ordinamenti possibili delle carte divise per seme sono:
$$(P_{13})^4 = (13!)^4$$
   Essendo P_4 gli ordinamenti possibili dei semi, gli ordinamenti delle carte divise per seme sono in totale:
$$P_4(P_{13})^4 = 4!\,(13!)^4 \approx 3,6 \times 10^{40}$$

   (c) (2 punti) la probabilità che, partendo da un mazzo di carte scompigliato, mescolandole a caso si ritrovino divise per seme.

   Soluzione La probabilità sarà data dal rapporto tra casi favorevoli (calcolati al punto precedente) e casi possibili (calcolati al primo punto), per cui:
$$\Pr = \frac{P_4(P_{13})^4}{P_{52}} = \frac{4!\,(13!)^4}{52!} \approx 4,5 \times 10^{-28}$$
   meno di una possibilità su 45 quadriliardi (10^{27}).[3]

4. (2 punti) *Problema.* Il padre di Marco ora ha tre volte gli anni di Marco, ma tra dieci anni avrà due volte gli anni che avrà Marco. Quanti anni ha Marco ora?

[3] La probabilità è quindi "praticamente" nulla. Questo esempio può aiutare a comprendere più a fondo il secondo principio della termodinamica e il concetto di *entropia*. In linea teorica è possibile, partendo da un mazzo di carte "disordinato" (alta entropia) arrivare senza "lavoro utile" ad uno "ordinato" (bassa entropia); solo che la probabilità che questo accada è bassa. Molto più probabile è il caso opposto: ottenere un mazzo "disordinato" da uno "ordinato". In teoria tutti i processi fisici a livello atomico sono reversibili ed è quindi in accordo con le leggi della fisica che lo zucchero sciolto nel caffè si ricomponga in una zolletta, o che noi ringiovaniamo invece di invecchiare. Il problema è che la probabilità di un accadimento del genere è così bassa da poter essere trascurata.

Soluzione Indichiamo con x gli anni di Marco ora. Gli anni del padre ora sono $3x$. Gli anni del padre di Marco tra 10 anni, $3x + 10$, saranno 2 volte gli anni di Marco, $x + 10$, per cui:

$$\begin{aligned} 3x + 10 &= 2(x + 10) \\ 3x + 10 &= 2x + 20 \\ x &= 10 \end{aligned}$$

Marco ha 10 anni.

5. *Esercizio.* Calcola i seguenti *limiti*.

   (a) (2 punti) (*) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln x^2}{x}$

   Soluzione

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{x + 2\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1 = 1$$

   (b) (2 punti) (*) $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x}$

   Soluzione

   $$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \ln x \cdot \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = -\infty \cdot (+\infty) = -\infty$$