

Matematica

Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

Gennaio 2019

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso. Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce. Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti. Puoi utilizzare solo i fogli protocollo consegnati durante lo svolgimento della prova. Al termine della prova devi riconsegnare *tutti e solo* i fogli ricevuti. Immediatamente dopo la consegna, su ciascun foglio protocollo scrivi in modo chiaro e leggibile a penna indelebile il tuo nome, cognome e numero di matricola. *I fogli recanti una qualsiasi correzione o cancellazione nei dati identificativi dello studente non verranno valutati a meno di non richiederne l'immediata sostituzione.*

1. *Esercizio.*

(a) (3 punti) Risolvi la seguente *disequazione irrazionale*:

$$100\sqrt{x} > 200x$$

(b) (2 punti) Disegna su uno stesso piano cartesiano i *grafici* delle seguenti funzioni sull'intervallo chiuso e limitato $x \in [0, 1]$ e individua nel grafico l'insieme delle soluzioni della disequazione risolta al punto precedente:

$$y = 200x$$
$$y = 100\sqrt{x}$$

2. *Esercizio/Problema.* Immagina di gestire un'impresa che ha due reparti e di dover decidere come distribuire i lavoratori tra questi due reparti. Sai che il numero di unità che in ognuno di questi reparti si può produrre ogni mese è una data funzione della frazione di persone che ci lavora. In particolare, sai che il numero di unità prodotte nel primo reparto è dato da:

$$g(x) = 100\sqrt{x}$$

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

dove $x \in [0, 1]$ è la frazione di lavoratori che opera nel primo reparto, mentre il numero di unità prodotte nel secondo reparto risulta pari a:

$$h(x) = 200(1 - x)$$

dove $(1 - x)$ è la frazione di lavoratori impiegata nel secondo reparto.

Es. se $1/4$ dei lavoratori lavora nel primo reparto vuol dire che i restanti $3/4$ sono impiegati nel secondo reparto. In tal caso si avrà $x = 1/4 = 0,25$ e $1 - x = 3/4 = 0,75$.

La produzione totale dell'impresa sarà pertanto data dalla seguente funzione $f : [0, 1] \subseteq \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

dove $x \in [0, 1]$ è la frazione di lavoratori impiegati nel primo reparto.

- (a) (2 punti) Determina il *segno della funzione* f nell'insieme di definizione $[0, 1]$, il valore che la funzione f assume in corrispondenza degli *estremi* di tale insieme e l'*intercetta* con l'asse delle ordinate.
 - (b) (1 punto) Determina gli eventuali *punti di discontinuità* di f nell'intervallo $[0, 1]$.
 - (c) (2 punti) Calcola le *derivate prime* delle funzioni $g(x)$, $h(x)$ e $f(x)$.
 - (d) (2 punti) Studia il *segno della derivata* di f , $f'(x)$, e individua gli eventuali *punti stazionari* di f .
 - (e) (2 punti) Determina la *concavità/convessità* di f .
 - (f) (2 punti) Individua gli eventuali *punti di massimo e minimo assoluto* di $f(x)$ nell'insieme di definizione.
 - (g) (2 punti) Disegna su uno stesso piano cartesiano i *grafici* delle funzioni $g(x)$, $h(x)$ e $f(x)$ sull'intervallo $x \in [0, 1]$. Alla luce di quanto scoperto studiando la funzione f , che cosa puoi concludere riguardo il problema di determinare la miglior distribuzione dei lavoratori tra i due reparti?
3. *Esercizio.* Considera un mazzo di carte da poker, in cui si hanno 13 carte $- 2, 3, \dots, 10, J, Q, K, A$ (Asso) $-$ per ognuno dei 4 semi ($\spadesuit, \clubsuit, \heartsuit, \diamond$), per un totale di 52 carte. Calcola:
- (a) (2 punti) il numero di tutti i modi in cui è possibile ordinare le carte.
 - (b) (2 punti) il numero degli ordinamenti in cui sono divise per seme (le carte di uno stesso seme sono adiacenti).
 - (c) (2 punti) la probabilità che, partendo da un mazzo di carte scompigliato, mescolandole a caso si ritrovino divise per seme.
4. (2 punti) *Problema.* Il padre di Marco ora ha tre volte gli anni di Marco, ma tra dieci anni avrà due volte gli anni che avrà Marco. Quanti anni ha Marco ora?
5. *Esercizio.* Calcola i seguenti *limiti*.
- (a) (2 punti) (*) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \ln x^2}{x}$
 - (b) (2 punti) (*) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x}$