Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

18 Febbraio 2019

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce.
Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.
Puoi utilizzare solo i fogli protocollo consegnati durante lo svolgimento della prova.
Al termine della prova devi riconsegnare *tutti e solo* i fogli ricevuti.
Immediatamente dopo la consegna, su ciascun foglio protocollo scrivi in modo chiaro e leggibile a penna indelebile il tuo nome, cognome e numero di matricola.
I fogli recanti una qualsiasi correzione o cancellazione nei dati identificativi dello studente non verranno valutati a meno di non richiederne l'immediata sostituzione.

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$.

$$f(x) = \frac{2x}{x+1}$$

(a) (4 punti) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione, gli *asintoti orizzontali* e *verticali* e disegnane il *grafico.*

Soluzione:
La funzione è definita per ogni valore reale di x che non rende nullo il denominatore, per cui l'insieme di definizione risulta $\mathcal{R}\backslash\{-1\}$.
La funzione appartiene alla classe delle funzioni omografiche, rappresentate nel piano da iperboli equilatere. In questo caso il centro di simmetria dell'iperbole ha coordinate $(-1, 2)$. L'asintoto verticale è quindi la retta $x = -1$, essendo:

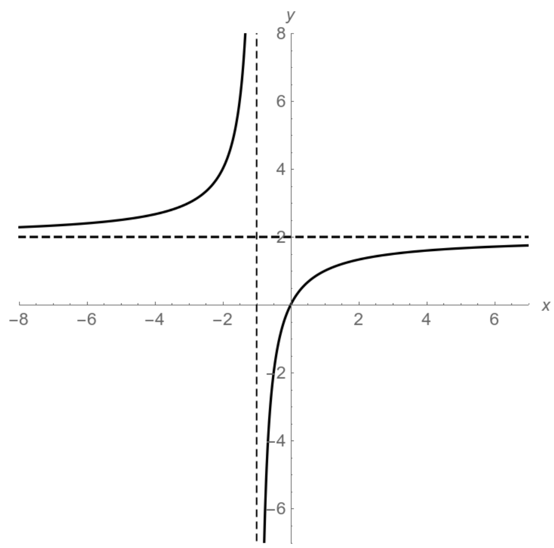
$$\begin{aligned}\lim_{x\to -1^+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x\to -1^-} f(x) &= -\infty\end{aligned}$$

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

mentre quello orizzontale è la retta $y = 2$, avendosi:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2$$

L'iperbole passa per l'origine degli assi essendo $f(0) = 0$.
Il grafico è il seguente:



(b) (3 punti) Calcola i valori di x per cui i valori restituiti da $f(x)$ siano minori o uguali a 4:

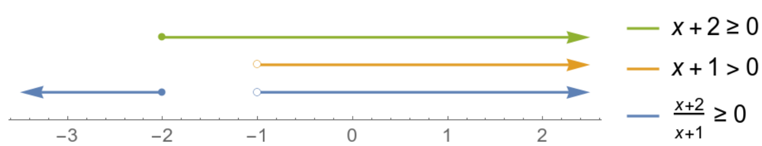
$$f(x) = \frac{2x}{x+1} \leq 4$$

e individua l'insieme delle soluzioni nel grafico al punto precedente.

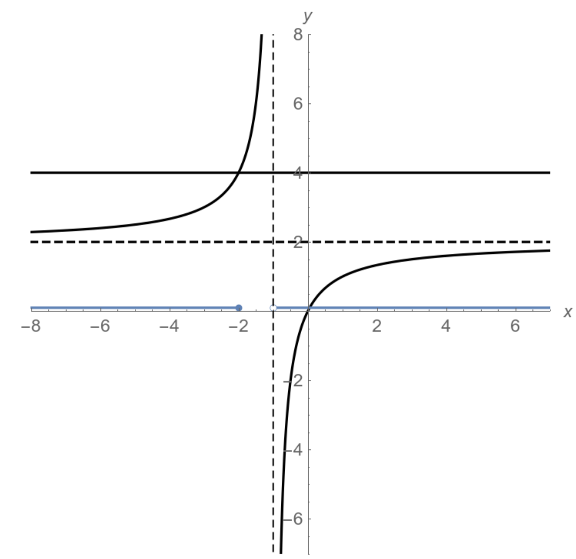
Soluzione:
Questa è una disequazione fratta (o frazionaria). La condizione di esistenza è $x \neq -1$.
Riducendo alla forma normale la disequazione si ottiene:

$$\frac{2x}{x+1} - 4 \leq 0 \qquad \frac{2x-4x-4}{x+1} \leq 0 \qquad \frac{x+2}{x+1} \geq 0$$

Studiando separatamente il segno di numeratore e denominatore ed applicando la regola dei segni, si ottiene l'insieme delle soluzioni.



La disequazione è soddisfatta per ogni $x \in (-\infty, -2] \cup (-1, +\infty)$. La figura sotto mostra l'insieme delle soluzioni individuate nel grafico precedente.



(c) (3 punti) Definisci la funzione $|f(x)|$ e disegnane il grafico.

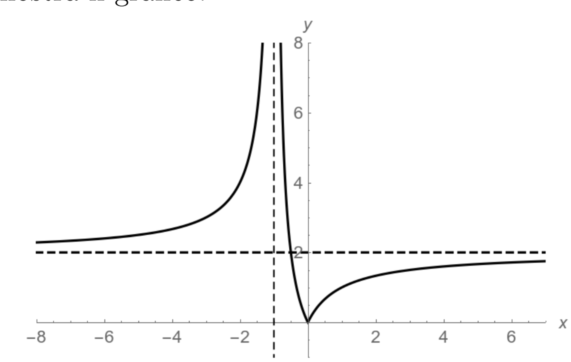
Soluzione:
La funzione $|f(x)|$ è data da:

$$|f(x)| = \begin{cases} \frac{2x}{x+1} & \text{se } \frac{2x}{x+1} \geq 0 \\ -\frac{2x}{x+1} & \text{se } \frac{2x}{x+1} < 0 \end{cases}$$

da cui:

$$|f(x)| = \begin{cases} \frac{2x}{x+1} & \text{se } x \in (-\infty, -1) \cup [0, +\infty) \\ -\frac{2x}{x+1} & \text{se } x \in (-1, 0) \end{cases}$$

La figura sotto ne mostra il grafico.



(d) (4 punti) Considerando la funzione definita al punto precedente, risolvi la seguente *disequazione con valore assoluto*:

$$|f(x)| \leq 4$$

Soluzione:
La disequazione con valore assoluto avrà soluzioni per quei valori di x che soddisfano:

$$-4 \leq \frac{2x}{x+1} \leq 4$$

$$\begin{cases} \frac{2x}{x+1} \geq -4 \\ \frac{2x}{x+1} \leq 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3x+2}{x+1} \geq 0 \\ \frac{x+2}{x+1} \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x < -1 \vee x \geq -2/3 \\ x \leq -2 \vee x > -1 \end{cases}$$

le soluzioni sono pertanto $x \in (-\infty, -2] \cup [-2/3, +\infty)$.

2. (3 punti) *Esercizio.* Determina *minimo*, *massimo*, *estremi superiori*, *estremi inferiori*, *punti interni*, *punti di accumulazione*, *punti di frontiera* e *punti isolati* del seguente insieme:

$$A = \{x \in \mathcal{R} : -1 < x < 2,\, x \neq 0\}$$

Soluzione:
Risultando dall'unione di due intervalli, l'insieme non ha punti isolati.

L'insieme non ha un minimo e un massimo e:

$$\inf A = -1 \qquad\qquad \sup A = 2$$

L'insieme è aperto, contenendo tutti i suoi punti interni: $x \in (-1, 0) \cup (0, 2)$.

I punti di accumulazione sono i punti appartenenti all'intervallo $[-1, 2]$.

I punti di frontiera sono i punti $x \in \{-1, 0, 2\}$.

3. *Problema*: Supponi che i costi totali (c) che la tua impresa affronta siano determinati dalla seguente funzione della quantità prodotta:

$$c(x) = 10\, x^2$$

dove la quantità prodotta, x, è espressa in migliaia di unità e i costi totali sono espressi in migliaia di euro. Ipotizza di riuscire a vendere ogni unità prodotta a un prezzo pari a 20 euro, per cui i ricavi totali sono dati dalla seguente funzione della quantità prodotta:

$$r(x) = 20\, x$$

(a) (3 punti) Sapendo che i profitti sono dati dalla differenza tra ricavi e costi, deriva la funzione di profitto, che lega i profitti (p) alla quantità prodotta (x), e determina i livelli di produzione x in corrispondenza dei quali l'impresa non è in perdita (il profitto è positivo o nullo).

Soluzione:
La funzione di profitto è data da:

$$p(x) = r(x) - c(x) = 20x - 10\,x^2$$

I livelli di produzione associati a profitti positivi sono quelli che soddisfano la seguente disequazione di secondo grado:

$$\begin{aligned} 20x - 10\,x^2 &\geq 0 \\ x(2-x) &\geq 0 \end{aligned}$$

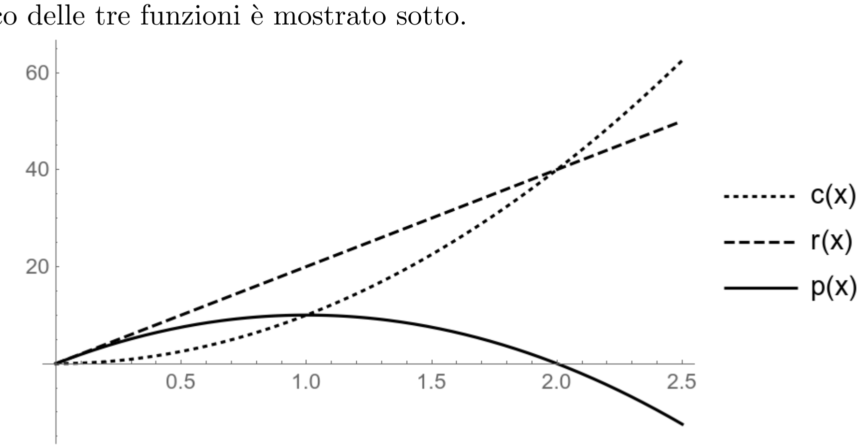
Trattandosi di livelli di produzione, si ha necessariamente $x \geq 0$ e la disequazione è soddisfatta per $x \in [0,2]$: per non andare in perdita l'impresa deve produrre non più di duemila unità.

(b) (4 punti) Calcola le *derivate prime* e *seconde* delle funzioni di costo, $c(x)$, ricavo, $r(x)$, e profitto, $p(x)$, e disegna il *grafico* delle tre funzioni su uno stesso piano cartesiano.

Soluzione:
La funzione di costo è una funzione quadratica, il cui grafico è una parabola convessa con vertice nell'origine degli assi.
La funzione dei ricavi è una funzione lineare con inclinazione positiva (coefficiente angolare pari a 20) e intercetta nell'origine degli assi.
La funzione di profitto è una funzione quadratica, il cui grafico è una parabola concava con intercetta nell'origine degli assi, vertice nel punto $(1,10)$. Gli zeri della funzione, calcolati al punto precedente, sono $x_1 = 0$ e $x_2 = 2$.
Le derivate prime e seconde sono uguali a:

$$\begin{aligned} c'(x) &= 20x & c''(x) &= 20 \\ r'(x) &= 20 & r''(x) &= 0 \\ p'(x) &= 20 - 20x & p''(x) &= -20 \end{aligned}$$

Il grafico delle tre funzioni è mostrato sotto.



(c) (2 punti) Determina la quantità che massimizza il profitto e il profitto massimo ottenibile dall'impresa.

Soluzione:
Essendo la funzione di profitto una funzione quadratica globalmente concava, il punto di massimo assoluto (la quantità che massimizza il profitto) è l'ascissa del vertice, che è l'unico punto stazionario:

$$\begin{aligned} p'(x) = r'(x) - c'(x) &= 0 \\ r'(x) &= c'(x) \\ 20 &= 20x \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Il profitto massimo, pari a 10 mila euro, è quello ottenibile producendo mille unità.

4. (2 punti) *Problema.* Immagina di possedere 30 vestiti e 15 paia di scarpe e di dover scegliere 5 vestiti e 3 paia di scarpe da mettere in valigia prima di partire per un viaggio. Se dedichi un secondo del tuo tempo a vagliare ognuna delle possibilità a tua disposizione, quanto tempo impiegherai?

Soluzione:
Il numero di possibili scelte è dato dal prodotto tra le combinazioni semplici di 30 oggetti di classe 5 (i vestiti) e quelle di 15 oggetti di classe 3 (le scarpe):

$$C_{30,5} \cdot C_{15,3} = \binom{30}{5} \cdot \binom{15}{3} = \frac{30!}{5!(30-5)!} \cdot \frac{15!}{3!(15-3)!} = \frac{30!}{5!\,25!} \cdot \frac{15!}{3!\,12!} = 64\,840\,230$$

Dedicando un secondo ad ognuna di queste possibilità si impiegheranno quasi 65 milioni di secondi. Considerando che una giornata è composta da 86 400 secondi ($= 24 \times 60 \times 60$), stiamo parlando di più di 750 giorni.

5. (2 punti) *Problema.* Supponi che in un determinato sistema economico la popolazione al tempo t sia data dalla seguente funzione:

$$p(t) = p_0\, \mathrm{e}^{g \cdot t}$$

dove e è il numero di Nepero (o Eulero) e p_0 e g sono parametri strettamente positivi che indicano, rispettivamente, la popolazione iniziale e il tasso di crescita.

Ipotizza anche che il reddito al tempo t sia:

$$y(t) = y_0\, \mathrm{e}^{2g \cdot t}$$

dove $y_0 = p_0/2$ rappresenta il reddito iniziale.

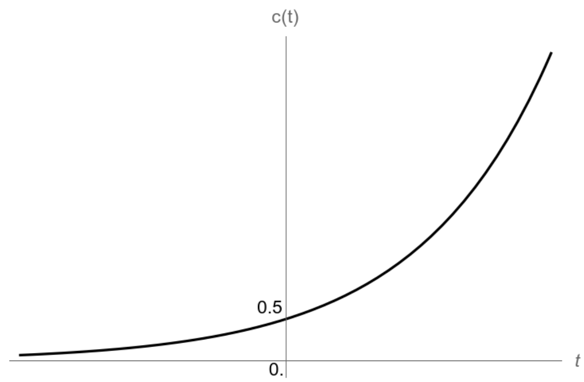
Determina la funzione del reddito pro-capite, dato dal rapporto tra reddito e popolazione, e disegnane un grafico qualitativo.

Soluzione:

Indicando con $c(t)$ la funzione del reddito pro-capite, si ha:

$$c(t) = \frac{y(t)}{p(t)} = \frac{y_0\,\mathrm{e}^{2g\cdot t}}{p_0\,\mathrm{e}^{g\cdot t}} = \frac{\frac{p_0}{2}}{p_0}\mathrm{e}^{(2-1)g\cdot t} = \frac{\mathrm{e}^{g\cdot t}}{2}$$

Si tratta di una funzione esponenziale con base maggiore di uno, esponente positivo e intercetta con l'asse delle ordinate pari a $1/2$. Il grafico è mostrato sotto.



Esercizio/Problema:	1	2	3	4	5	Totale
Punti:	14	3	9	2	2	30
Punteggio:						