Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

5 Giugno 2019

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce.
Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.
Puoi utilizzare solo i fogli protocollo consegnati durante lo svolgimento della prova.
Al termine della prova devi riconsegnare *tutti e solo* i fogli ricevuti.
Immediatamente dopo la consegna, su ciascun foglio protocollo scrivi in modo chiaro e leggibile a penna indelebile il tuo nome, cognome e numero di matricola.
I fogli recanti una qualsiasi correzione o cancellazione nei dati identificativi dello studente non verranno valutati a meno di non richiederne l'immediata sostituzione.

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$.

$$f(x) = 2x^{-2}$$

   (a) (1 punto) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione.

   Soluzione:
   Riscriviamo la funzione come segue:

$$f(x) = \frac{2}{x^2}$$

   La funzione è definita per ogni valore reale di x che non rende nullo il denominatore, per cui l'insieme di definizione risulta $\mathcal{R}\backslash\{0\}$.

   (b) (1 punto) Identifica le eventuali simmetrie, cioè funzione *pari* o *dispari*.

   Soluzione:

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

La funzione è pari, e quindi simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, essendo:

$$f(x) = \frac{2}{x^2} = \frac{2}{(-x)^2} = f(-x)$$

(c) (1 punto) Determina il segno della funzione studiando la disequazione $f(x) > 0$.

Soluzione:
La disequazione è sempre soddisfatta (la funzione restituisce sempre valori strettamente positivi) essendo il segno deciso dal denominatore x^2 ed essendo questo sempre positivo (fatta esclusione per $x = 0$ per cui comunque la funzione non è definita).

(d) (1 punto) Identifica gli *asintoti orizzontali* e *verticali*.

Soluzione:
L'asintoto verticale è la retta $x = 0$, essendo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= +\infty \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) &= +\infty \end{aligned}$$

mentre quello orizzontale è la retta $y = 0$, avendosi:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} f(x) = 0$$

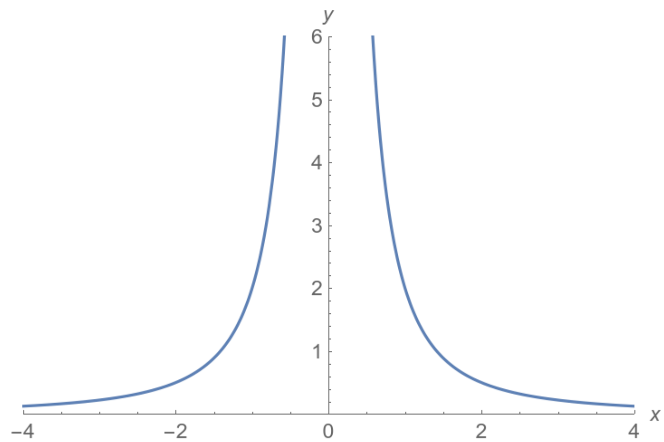
(e) (2 punti) Calcola la *derivata prima* e la *derivata seconda*.

Soluzione:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{4}{x^3} \\ f''(x) &= \frac{12}{x^4} \end{aligned}$$

(f) (2 punti) Studia il segno delle derivate e disegna il *grafico* della funzione $f(x)$.

Soluzione:
Il segno della derivata prima è contrario a quello del denominatore, per cui sarà $f'(x) < 0$ per $x > 0$ e $f'(x) > 0$ per $x < 0$. La funzione è quindi monotona decrescente (crescente) per $x > 0$ ($x < 0$).
La derivata seconda è sempre positiva per ogni $x \neq 0$, per cui la funzione è convessa.
Il grafico è mostrato sotto.



(g) (1 punto) La funzione $f(x)$ è un esempio di funzione invariante di scala, cioè tale che il rapporto tra $f(\alpha x)$ (con $\alpha > 0$) e $f(x)$ non dipende dal valore di x. Mostra in particolare che questo è vero se $\alpha = 2$: calcola il rapporto tra $f(2x)$ e $f(x)$ e mostra che è costante.

Soluzione:

$$\frac{f(2x)}{f(x)} = \frac{2(2x)^{-2}}{2x^{-2}} = \frac{2^{-2}x^{-2}}{x^{-2}} = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

2. *Esercizio.* Considera la seguente *funzione quadratica*:

$$f(x) = \alpha\, x^2 + \beta\,(1-x)^2 + 2\,\gamma\, x(1-x)$$

dove α, β e γ sono tre parametri strettamente positivi e tali che $\alpha + \beta - 2\,\gamma > 0$.

(a) (3 punti) Esprimi nella *forma normale* la funzione quadratica e determina se la funzione è *concava* o *convessa.*

Soluzione:

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha\, x^2 + \beta\,(1 + x^2 - 2x) + 2\,\gamma\,(x - x^2) \\ &= \alpha\, x^2 + \beta + \beta x^2 - 2\,\beta\, x + 2\gamma\, x - 2\gamma\, x^2 \\ &= (\alpha + \beta - 2\gamma)x^2 + 2(\gamma - \beta)x + \beta \end{aligned}$$

Ricordando che la forma normale è $f(x) = a\, x^2 + b\, x + c$, in questo caso si ha:

$$\begin{aligned} a &= \alpha + \beta - 2\gamma \\ b &= 2(\gamma - \beta) \\ c &= \beta \end{aligned}$$

Essendo per ipotesi $\alpha + \beta - 2\,\gamma > 0$ in questo caso $a > 0$ e la funzione è convessa: il grafico della funzione è una parabola convessa.

(b) (2 punti) Individua i *punti stazionari* e determina se trattasi di *massimi*, *minimi* o *punti di flesso.*

Soluzione:
Essendo una funzione quadratica, l'unico punto stazionario è il vertice della parabola, la cui ascissa è data da:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 2(\alpha+\beta-2\gamma)x + 2(\gamma-\beta) &= 0 \\ x &= \frac{\beta-\gamma}{\alpha+\beta-2\gamma} \end{aligned}$$

Essendo la funzione globalmente convessa, questo è un punto di minimo assoluto.

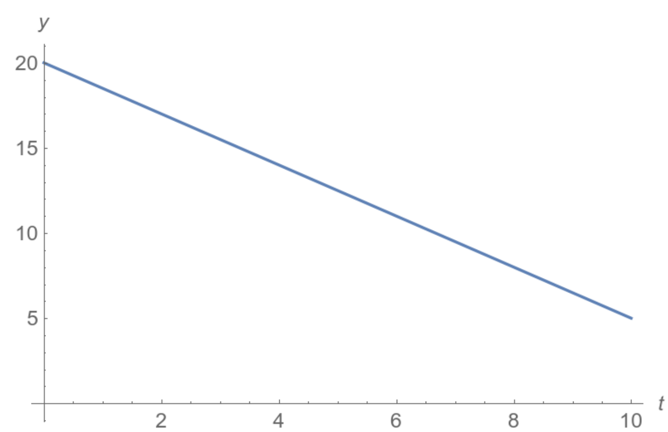
3. *Problema*: Considera l'acquisto di un bene durevole che ha un valore iniziale pari a $y_0 = 20$ (mila euro) e che al termine della sua vita utile pari a $T = 10$ (anni) mantiene un valore residuo pari a $y_T = 5$ (mila euro). Supponi che, negli anni intercorrenti tra quello iniziale (0) e quello finale (T), il bene perda ogni anno una quota costante della differenza tra il valore iniziale e quello residuo ($y_0 - y_T$) (*deprezzamento lineare*).

   (a) (3 punti) Determina la funzione che descrive il valore del bene y (in migliaia di euro) in funzione del tempo t (in anni) e disegnane il grafico. (*Suggerimento*: determina l'equazione della retta passante per i due punti $(0, y_0)$ e (T, y_T) nel piano cartesiano con asse delle ascisse t e asse delle ordinate y.)

Soluzione:
Considerati i due punti $(0, y_0) = (0, 20)$ e $(T, y_T) = (10, 5)$, l'equazione della retta passante per questi due punti è data da:

$$y = y_0 + \frac{y_T - y_0}{T}\,t = 20 - \frac{15}{10}\,t$$

Il grafico è mostrato sotto.



   (b) (3 punti) Supponi ora che il valore residuo al termine della vita utile sia nullo ($y_T = 0$). Determina la funzione che associa il tempo trascorso dall'acquisto t al deprezzamento cumulato $D(t)$, dove questo è dato dalla differenza tra valore iniziale y_0 e valore corrente

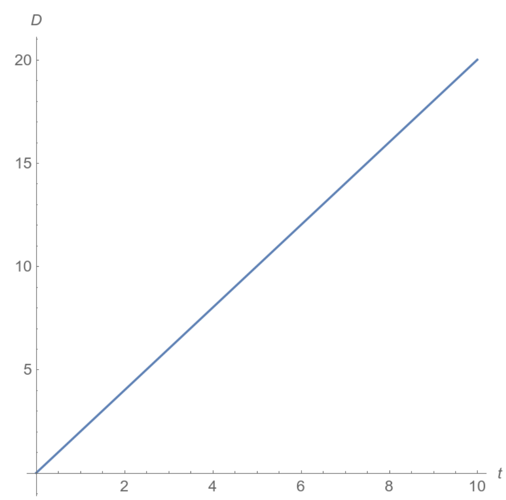
$y(t)$ del bene, e disegnane il grafico. A quanto ammonta il deprezzamento annuale, cioè la perdita di valore che avviene annualmente, che è per assunzione costante?

Soluzione:
La funzione del valore corrente del bene con valore residuo nullo ($y_T = 0$) è:

$$y = y_0 - \frac{y_0}{T}\,t = 20 - 2\,t$$

Il deprezzamento cumulato $D(t)$ è pertanto dato da:

$$D = y_0 - \left(y_0 - \frac{y_0}{T}\,t\right) = \frac{y_0}{T}\,t = 2\,t$$



Il deprezzamento annuale è dato dalla derivata della funzione ed è pari al coefficiente angolare della retta: 2 (mila euro).

(c) (2 punti) Considera il caso analizzato al punto precedente e supponi che il deprezzamento annuale sia attualmente il 20% del deprezzamento cumulato, cioè il rapporto tra il deprezzamento annuale d e il deprezzamento cumulato D sia 0,2. Cosa puoi desumere da questo riguardo al numero di anni trascorsi dall'acquisto del bene? E rispetto alla vita utile residua del bene stesso?

Soluzione:
Indicando con d $(= y_0/T)$ il deprezzamento annuale (per costruzione costante), si ha:

$$D = d\,t$$

da cui:

$$t = \frac{D}{d} = \frac{1}{d/D} = \frac{1}{0,2} = 5$$

Sapendo che la vita utile è $T = 10$ anni, la vita residua è di 5 $(= 10 - 5)$ anni.

4. *Problema.* Immagina cinque amici in visita a Pisa davanti alla famosa torre pendente.

(a) (2 punti) Quante foto devono scattare se vogliono ritrarre tutte le possibili coppie di amici con la torre sullo sfondo?

Soluzione:
Il numero è pari alle combinazioni semplici di 5 oggetti di classe 2:

$$C_{5,2} = \binom{5}{2} = \frac{5!}{2!(5-2)!} = \frac{5 \times 4}{2} = 10$$

(b) (2 punti) Quante foto devono scattare se vogliono esaurire tutte le possibilità, considerando diverse due foto se differiscono rispetto al numero e all'identità dei soggetti ritratti, ma non per l'ordine in cui gli stessi compaiono. Vogliono cioè scattare tutte le possibili foto che ritraggono uno solo di loro, più tutte le foto con le coppie, ecc., assumendo che la foto in cui vengono ritratti tutti e cinque chiedano di scattarla a te, che li stai osservando pensieroso.

Soluzione:

$$\sum_{i=1}^{5} C_{5,i} = \sum_{i=1}^{5} \binom{5}{i} = 5 + 10 + 10 + 5 + 1 = 31$$

5. *Esercizio.* Calcola i seguenti limiti utilizzando se possibile e necessario i *teoremi di De l'Hôpital*:

(a) (2 punti) $\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x}$

Soluzione:
Per sostituzione si arriva alla forma di indecisione $0/0$, per cui è possibile applicare il (primo) teorema di De l'Hôpital:

$$\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{D\left[2^x - 1\right]}{D[x]} = \lim_{x \to 0} \frac{2^x \ln 2}{1} = 2^0 \ln 2 = \ln 2$$

(b) (2 punti) $\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x - 1}{x}$

Soluzione:
Per sostituzione si arriva alla forma di indecisione ∞/∞. Tuttavia può scriversi:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x - 1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2^x}{x} - \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x} - \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = +\infty - 0 = +\infty$$

dove

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2^x}{x} = +\infty$$

segue dal fatto che 2^x, essendo una funzione esponenziale, per $x \to +\infty$ è infinita di ordine superiore rispetto a x.

Alternativamente può applicarsi il (secondo) teorema di De l'Hôpital, giungendo allo stesso risultato:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x - 1}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{D\left[2^x - 1\right]}{D[x]} = \lim_{x\to+\infty} 2^x \ln 2 = +\infty$$

Esercizio/Problema:	1	2	3	4	5	Totale
Punti:	9	5	8	4	4	30
Punteggio:						