Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

3 Luglio 2019

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce.
Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.
Puoi utilizzare solo i fogli protocollo consegnati durante lo svolgimento della prova.
Al termine della prova devi riconsegnare *tutti e solo* i fogli ricevuti.
Immediatamente dopo la consegna, su ciascun foglio protocollo scrivi in modo chiaro e leggibile a penna indelebile il tuo nome, cognome e numero di matricola.
I fogli recanti una qualsiasi correzione o cancellazione nei dati identificativi dello studente non verranno valutati a meno di non richiederne l'immediata sostituzione.

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$.

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - 6\,x^2 + 24\,x$$

(a) (1 punto) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione.

Soluzione:
La funzione è definita per ogni $x \in \mathcal{R}$.

(b) (1 punto) Identifica le eventuali simmetrie (funzione *pari* o *dispari*).

Soluzione:
La funzione non presenta simmetrie. Non è pari, poiché in generale:

$$f(-x) = -\frac{x^3}{2} - 6\,x^2 - 24\,x$$

è diverso da $f(x)$, e non è dispari, poiché in generale $f(x)$ è anche diverso da:

$$-f(-x) = \frac{x^3}{2} + 6\,x^2 + 24\,x$$

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

(c) (2 punti) Determina le *intersezioni con gli assi* e il *segno della funzione*, $f(x) \geq 0$. *Suggerimento*: esprimi la funzione come il prodotto di due funzioni:

$$f(x) = \frac{x}{2}\left(x^2 - 12\,x + 48\right)$$

Soluzione:
La funzione passa per l'origine degli assi essendo $f(0) = 0$. Inoltre non ha altre radici reali, poiché l'equazione quadratica $x^2 - 12\,x + 48 = 0$ ha discriminante minore di zero:

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \times 1 \times 48 = -48 < 0$$

Essendo poi la disequazione di secondo grado $x^2 - 12\,x + 48 > 0$ soddisfatta per ogni $x \in \mathcal{R}$, il segno di $f(x)$ sarà deciso dal segno del primo fattore, $x/2$. Quindi $f(x) > 0$ se e solo se $x > 0$.

(d) (2 punti) Calcola i *limiti* di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

Soluzione:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2} - 6\,x^2 + 24\,x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{2} = +\infty$$
$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{2} - 6\,x^2 + 24\,x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{2} = -\infty$$

(e) (2 punti) Calcola la *derivata prima* e determina i valori per cui $f(x)$ è *crescente/decrescente* studiando il segno di questa derivata.

Soluzione:

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^2 - 12x + 24$$

Si tratta di una funzione quadratica: l'equazione di una parabola convessa. Le radici reali dell'equazione associata sono:

$$x_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4 \times \frac{3}{2} \times 24}}{2 \times \frac{3}{2}} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 144}}{3} = 4$$

Il discriminante è nullo e quindi l'equazione ha due soluzioni reali coincidenti.
La derivata prima è sempre positiva e assume valore zero in corrispondenza di $x = 4$, pertanto $f(x)$ è sempre crescente e $x = 4$ è un punto stazionario.

(f) (2 punti) Calcola la *derivata seconda* di $f(x)$ e determina la *concavità/convessità* di $f(x)$ e gli eventuali *punti di flesso* studiando il segno della derivata seconda.

Soluzione:

$$f''(x) = -12 + 3\,x$$

Si tratta di una funzione lineare: l'equazione di una retta inclinata positivamente (coefficiente angolare: 3) e intercetta negativa (-12).

La disequazione $f''(x) > 0$ è soddisfatta nell'intervallo $x \in (4, +\infty)$ e $f''(4) = 0$. $f(x)$ sarà quindi convessa, essendo $f''(x) > 0$, per $x > 4$ e concava per $x < 4$.

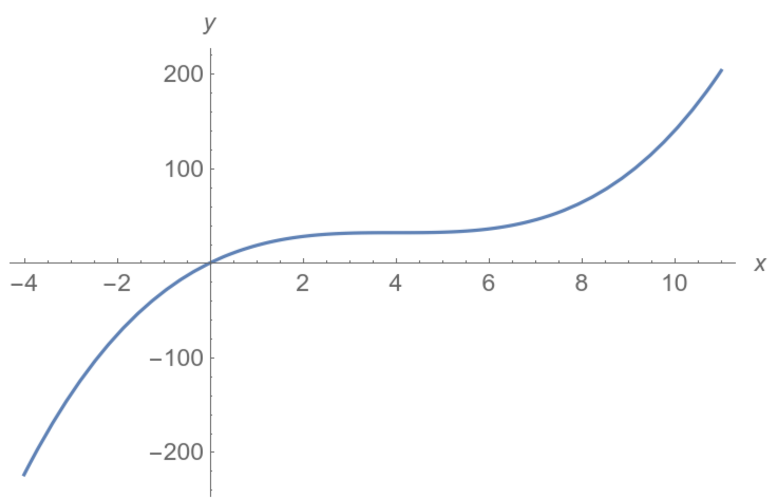
$x = 4$ è un punto di flesso di $f(x)$. Si tratta di un flesso a tangente orizzontale essendo il punto di flesso un punto stazionario.

(g) (2 punti) Calcola gli *estremi superiore* e *inferiore* di $f(x)$.

Soluzione:
Poiché $f(x)$ è illimitata superiormente e inferiormente, l'estremo superiore è $+\infty$ e quello inferiore $-\infty$.

(h) (2 punti) Disegna il *grafico* della funzione $f(x)$.

Soluzione:



2. *Esercizio/Problema.* Considera (ancora) la funzione:

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - 6\,x^2 + 24\,x$$

e supponi sia una funzione che descrive i costi totali della tua impresa (in termini di migliaia di euro l'anno) in corrispondenza di ciascuna quantità prodotta x (in termini di migliaia di unità l'anno). Stai attualmente producendo 8 mila unità all'anno ($x = 8$)

(a) (2 punti) Utilizzando lo *sviluppo di Taylor al primo ordine* con centro $x_0 = 8$, calcola la funzione di costo lineare (la retta) che approssima meglio la funzione di costo effettiva al livello di produzione corrente.

Soluzione:
Applicando lo sviluppo in serie di Taylor al primo ordine con centro $x_0 = 8$ si ottiene:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(8) + f'(8)(x - 8)$$

Essendo:

$$f(8) = \frac{8^3}{2} - 6 \times 8^2 + 24 \times 8 = 256 - 384 + 192 = 64$$

e:

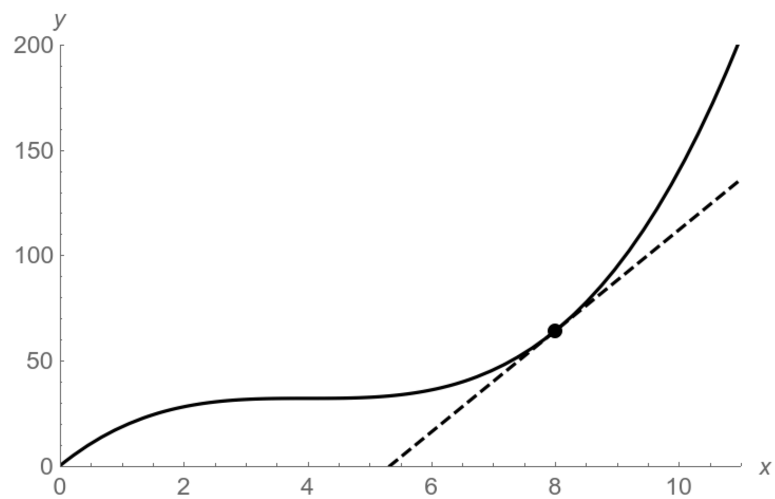
$$f'(x) = \frac{3}{2}\,x^2 - 12\,x + 24$$

da cui:

$$f'(8) = \frac{3}{2} \times 8^2 - 12 \times 8 + 24 = 24$$

la funzione di costo lineare che approssima meglio i costi effettivi al livello di produzione corrente è:

$$c(x) = 64 + 24\,(x - 8) = -128 + 24\,x$$



(b) (2 punti) Calcola l'aumento dei costi prodotto dall'aumento di mille unità – il livello di produzione passa da 8 a 9 mila unità l'anno ($\Delta x = 1$) – se la funzione di costo viene assunta lineare attorno al livello di produzione corrente. Qual è invece l'aumento effettivo?

Soluzione:
L'aumento approssimato è dato semplicemente dalla derivata della funzione in $x_0 = 8$: $f'(8) = 24$ mila euro. L'aumento effettivo è invece pari a:

$$f(9) - f(8) = 94,5 - 64 = 30,5$$

Si commette quindi un errore per difetto pari a 6,5 mila euro (= 30,5 - 24).

(c) (2 punti) Calcola l'equazione della retta passante per l'origine degli assi e che assume valore $f(8)$ quando $x = 8$. Secondo te qual è l'interpretazione economica del coefficiente di questa retta?

Soluzione:

$$y = \frac{f(8)}{8}x = \frac{64}{8}x = 8\,x$$

Essendo pari al rapporto tra costi totali e quantità prodotta, il coefficiente angolare rappresenta il costo unitario (o medio) di produzione.

Al livello di produzione attuale (8 mila unità), ogni unità prodotta costa in media 8 euro.

3. (2 punti) *Problema*: Assumi la seguente funzione di costo lineare:

$$C(x) = f + c \cdot x$$

dove f e c sono due parametri strettamente positivi che misurano, rispettivamente, i *costi fissi* e i *costi variabili unitari*, mentre x sono le unità prodotte. Assumi altresì che il *prezzo* p di vendita di ogni unità sia dato e costante, per cui la funzione dei ricavi è:

$$R(x) = p \cdot x$$

Sapendo che il profitto è dato dalla differenza tra ricavi e costi, calcola il *punto di pareggio*, cioè il numero di unità prodotte in corrispondenza del quale il profitto è nullo. Quale sono le condizioni che devono essere soddisfatte perché tale livello di produzione sia strettamente positivo? Come cambia questo livello se i costi fissi f aumentano?

Soluzione:

Indicando con P i profitti abbiamo:

$$P(x) = R(x) - C(x) = p \cdot x - (f + c \cdot x) = (p - c) \cdot x - f$$

da cui:

$$(p - c) \cdot x_0 - f = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = \frac{f}{p - c}$$

Affinché $x_0 > 0$, poiché $f > 0$, deve aversi $p > c$ (il prezzo deve essere maggiore del costo unitario). All'aumentare dei costi fissi aumenta il numero minimo di unità da produrre per andare in pareggio.

4. *Problema.* Alla terza votazione per l'elezione del Rettore nel 2019 all'Università di Milano-Bicocca al terzo turno i due candidati che hanno ottenuto a larga maggioranza il maggior numero di voti (e sono poi andati al ballottaggio) sono stati Giovanna Iannantuoni e Paolo Cherubini. Il Rettore è eletto sia dal personale docente e ricercatore (e dai rappresentanti degli studenti) sia dal personale tecnico-amministrativo, tuttavia il voto di questi ultimi è computato in ragione del 15% (ciascun voto dei tecnici/amministrativi vale 0,15 nella somma totale dei voti). Compulsando il verbale della votazione, scopri che Iannantuoni è risultata prima con 424,9 voti assegnati, mentre a Cherubini sono stati assegnati 388,45 voti. Scopri anche che i voti assegnati a Iannantuoni in base alle schede relative al personale docente e ricercatore e agli studenti sono stati 403, mentre il numero complessivo dei tecnici-amministrativi che ha espresso voti validi per uno dei due candidati è stato 469.

(a) (2 punti) Calcola il numero complessivo di docenti e ricercatori (e rappresentanti degli studenti) che ha espresso voti validi per uno dei due candidati.

Soluzione:
Sapendo che i voti assegnati a Iannantuoni sono stati 424,9, di cui 403 dal personale docente e ricercatore, e che i voti del personale tecnico-amministrativo sono computati in ragione del 15%, è possibile calcolare il numero dei tecnici-amministrativi che ha espresso voti validi per Iannantuoni:

$$403 + 0,15\, a_i = 424,9 \;\Rightarrow\; a_i = \frac{424,9 - 403}{0,15} = 146$$

Sapendo che il numero complessivo dei tecnici-amministrativi che ha espresso voti validi per uno dei due candidati è 469, i tecnici-amministrativi che hanno espresso voti validi per Cherubini sono stati:

$$a_c = a - a_i = 469 - 146 = 323$$

Il numero complessivo di docenti e ricercatori (e rappresentanti degli studenti) che ha espresso voti validi per Cherubini è quindi pari a:

$$d_c = 388,45 - 0,15 \times 323 = 340$$

Sommando questi a quelli che hanno votato per Iannantuoni si ottiene il numero cercato:

$$d = d_i + d_c = 403 + 340 = 743$$

(b) (2 punti) Calcola la probabilità di estrarre una scheda contenente il nome di Cherubini pescando a caso da un'urna contenente tutti i voti validi a favore di uno dei due candidati espressi da: i) il personale tecnico-amministrativo; ii) il personale docente e ricercatore (e rappresentanti degli studenti); iii) tutto il personale (e rappresentanti degli studenti) senza distinzioni.

Soluzione:
Facendo il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili, nel primo caso (personale tecnico-amministrativo) otteniamo:

$$p_{c\,|\,a} = \frac{a_c}{a} = \frac{323}{469} \approx 0,689$$

Nel secondo (personale docente e ricercatore), si ha:

$$p_{c\,|\,d} = \frac{d_c}{d} = \frac{340}{743} \approx 0,458$$

Nel terzo caso, infine, considerando tutto il personale senza distinguo, si ha:

$$p_c = \frac{a_c + d_c}{a + d} = \frac{323 + 340}{469 + 743} \approx 0,547$$

(c) (2 punti) Se il peso assegnato al voto dei tecnici-amministrativi fosse stato diverso (minore o maggiore del 15%), l'esito finale sarebbe potuto essere diverso? Se sì, quale sarebbe dovuto essere il peso minimo/massimo necessario perché questo accadesse?

Soluzione:
Poiché il voto degli amministrativi è andato in larga maggioranza a Cherubini, se il peso dato al voto del personale tecnico-amministrativo fosse stato maggiore, l'ordine sarebbe potuto essere invertito.
In particolare, sarebbe stato necessario il voto del personale tecnico-amministrativo fosse computato in ragione non inferiore al 36%, essendo:

$$\begin{aligned} 340 + 323\,w &> 403 + 146\,w \\ (323 - 146)\,w &> 403 - 340 \\ 177\,w &> 63 \\ w &> \frac{21}{59} \approx 0,3559 \end{aligned}$$

(d) (2 punti) Calcola la probabilità che due schede estratte a caso dall'urna contenente tutti i voti validi a favore di Cherubini o Iannantuoni espressi dal personale tecnico-amministrativo contengano entrambe il nome Cherubini.

Soluzione:
I casi possibili sono dati dalle disposizioni semplici di 469 oggetti (le schede presenti nell'urna) di classe 2 (le schede estratte):

$$D_{469,2} = \frac{469!}{(469-2)!} = 469 \times 468 = 219\,492$$

I casi favorevoli sono dati dalle disposizioni semplici di 323 oggetti (le schede contenenti il nome Cherubini) di classe 2 (le schede estratte):

$$D_{323,2} = \frac{323!}{(323-2)!} = 323 \times 322 = 104\,006$$

La probabilità che due schede estratte a caso dall'urna contengano entrambe il nome Cherubini è quindi pari a:

$$\Pr = \frac{D_{323,2}}{D_{469,2}} = \frac{323 \times 322}{469 \times 468} \approx 0,4738$$

Esercizio/Problema:	1	2	3	4	Totale
Punti:	14	6	2	8	30
Punteggio:					