

Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

3 Luglio 2019

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso. Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce. Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti. Puoi utilizzare solo i fogli protocollo consegnati durante lo svolgimento della prova. Al termine della prova devi riconsegnare *tutti e solo* i fogli ricevuti. Immediatamente dopo la consegna, su ciascun foglio protocollo scrivi in modo chiaro e leggibile a penna indelebile il tuo nome, cognome e numero di matricola. *I fogli recanti una qualsiasi correzione o cancellazione nei dati identificativi dello studente non verranno valutati a meno di non richiederne l'immediata sostituzione.*

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$.

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - 6x^2 + 24x$$

- (a) (1 punto) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione.
- (b) (1 punto) Identifica le eventuali simmetrie (funzione *pari* o *dispari*).
- (c) (2 punti) Determina le *intersezioni con gli assi* e il *segno della funzione*, $f(x) \geq 0$.
Suggerimento: esprimi la funzione come il prodotto di due funzioni:

$$f(x) = \frac{x}{2} (x^2 - 12x + 48)$$

- (d) (2 punti) Calcola i *limiti* di $f(x)$ per $x \rightarrow +\infty$ e $x \rightarrow -\infty$.
- (e) (2 punti) Calcola la *derivata prima* e determina i valori per cui $f(x)$ è *crescente/decrescente* studiando il segno di questa derivata.
- (f) (2 punti) Calcola la *derivata seconda* di $f(x)$ e determina la *concavità/convessità* di $f(x)$ e gli eventuali *punti di flesso* studiando il segno della derivata seconda.
- (g) (2 punti) Calcola gli *estremi superiore e inferiore* di $f(x)$.

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

(h) (2 punti) Disegna il *grafico* della funzione $f(x)$.

2. *Esercizio/Problema.* Considera (ancora) la funzione:

$$f(x) = \frac{x^3}{2} - 6x^2 + 24x$$

e supponi sia una funzione che descrive i costi totali della tua impresa (in termini di migliaia di euro l'anno) in corrispondenza di ciascuna quantità prodotta x (in termini di migliaia di unità l'anno). Stai attualmente producendo 8 mila unità all'anno ($x = 8$)

- (a) (2 punti) Utilizzando lo *sviluppo di Taylor al primo ordine* con centro $x_0 = 8$, calcola la funzione di costo lineare (la retta) che approssima meglio la funzione di costo effettiva al livello di produzione corrente.
- (b) (2 punti) Calcola l'aumento dei costi prodotto dall'aumento di mille unità – il livello di produzione passa da 8 a 9 mila unità l'anno ($\Delta x = 1$) – se la funzione di costo viene assunta lineare attorno al livello di produzione corrente. Qual è invece l'aumento effettivo?
- (c) (2 punti) Calcola l'equazione della retta passante per l'origine degli assi e che assume valore $f(8)$ quando $x = 8$. Secondo te qual è l'interpretazione economica del coefficiente di questa retta?

3. (2 punti) *Problema:* Assumi la seguente funzione di costo lineare:

$$C(x) = f + c \cdot x$$

dove f e c sono due parametri strettamente positivi che misurano, rispettivamente, i *costi fissi* e i *costi variabili unitari*, mentre x sono le unità prodotte. Assumi altresì che il *prezzo* p di vendita di ogni unità sia dato e costante, per cui la funzione dei ricavi è:

$$R(x) = p \cdot x$$

Sapendo che il profitto è dato dalla differenza tra ricavi e costi, calcola il *punto di pareggio*, cioè il numero di unità prodotte in corrispondenza del quale il profitto è nullo. Quale sono le condizioni che devono essere soddisfatte perché tale livello di produzione sia strettamente positivo? Come cambia questo livello se i costi fissi f aumentano?

4. *Problema.* Alla terza votazione per l'elezione del Rettore nel 2019 all'Università di Milano-Bicocca al terzo turno i due candidati che hanno ottenuto a larga maggioranza il maggior numero di voti (e sono poi andati al ballottaggio) sono stati Giovanna Iannantuoni e Paolo Cherubini. Il Rettore è eletto sia dal personale docente e ricercatore (e dai rappresentanti degli studenti) sia dal personale tecnico-amministrativo, tuttavia il voto di questi ultimi è computato in ragione del 15% (ciascun voto dei tecnici/amministrativi vale 0,15 nella somma totale dei voti). Compulsando il verbale della votazione, scopri che Iannantuoni è risultata prima con 424,9 voti assegnati, mentre a Cherubini sono stati assegnati 388,45 voti. Scopri anche che i voti assegnati a Iannantuoni in base alle schede relative al personale docente e ricercatore e agli studenti sono stati 403, mentre il numero complessivo dei tecnici-amministrativi che ha espresso voti validi per uno dei due candidati è stato 469.

- (a) (2 punti) Calcola il numero complessivo di docenti e ricercatori (e rappresentanti degli studenti) che ha espresso voti validi per uno dei due candidati.

- (b) (2 punti) Calcola la probabilità di estrarre una scheda contenente il nome di Cherubini pescando a caso da un'urna contenente tutti i voti validi a favore di uno dei due candidati espressi da: i) il personale tecnico-amministrativo; ii) il personale docente e ricercatore (e rappresentanti degli studenti); iii) tutto il personale (e rappresentanti degli studenti) senza distinzioni.
- (c) (2 punti) Se il peso assegnato al voto dei tecnici-amministrativi fosse stato diverso (minore o maggiore del 15%), l'esito finale sarebbe potuto essere diverso? Se sì, quale sarebbe dovuto essere il peso minimo/massimo necessario perché questo accadesse?
- (d) (2 punti) Calcola la probabilità che due schede estratte a caso dall'urna contenente tutti i voti validi a favore di Cherubini o Iannantuoni espressi dal personale tecnico-amministrativo contengano entrambe il nome Cherubini.

Esercizio/Problema:	1	2	3	4	Totale
Punti:	14	6	2	8	30
Punteggio:					