Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

18 Settembre 2019

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce.
Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.
Puoi utilizzare solo i fogli protocollo consegnati durante lo svolgimento della prova.
Al termine della prova devi riconsegnare *tutti e solo* i fogli ricevuti.
Immediatamente dopo la consegna, su ciascun foglio protocollo scrivi in modo chiaro e leggibile a penna indelebile il tuo nome, cognome e numero di matricola.
I fogli recanti una qualsiasi correzione o cancellazione nei dati identificativi dello studente non verranno valutati a meno di non richiederne l'immediata sostituzione.

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$.

$$f(x) = \sqrt{2x} - x^2$$

(a) (1 punto) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione.

Soluzione:
La funzione è data dalla differenza tra due funzioni potenza. Poiché la x compare sotto radice quadrata, sarà definita in $\mathcal{R}$ solo per quei valori di x che restituiscono un radicando non negativo, per cui:

$$2x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq 0$$

La funzione è pertanto definita $\forall\, x \in \mathcal{R} : x \geq 0$.

(b) (3 punti) Determina le *intersezioni con gli assi* e il *segno della funzione*, $f(x) \geq 0$.

Soluzione:

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Per studiare il segno consideriamo la corrispondente disequazione irrazionale:

$$\sqrt{2x} - x^2 \geq 0$$

che in forma normale diventa:

$$\sqrt{2x} \geq x^2$$

Essendo la radice con indice pari, risolvendo si ha:

$$\begin{cases} x^2 \geq 0 \\ 2x \geq \left(x^2\right)^2 \end{cases} \cup \begin{cases} x^2 < 0 \\ 2x \geq 0 \end{cases}$$

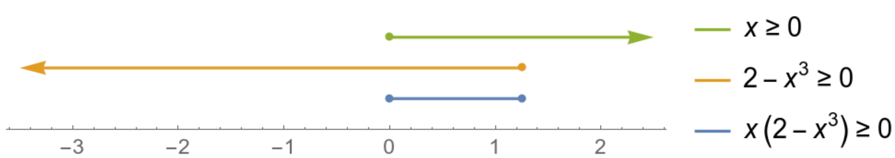
Poiché x^2 non è mai negativo, il secondo sistema non ha soluzioni, mentre il primo sistema si riduce a:

$$2x \geq x^4$$

da cui:

$$x(2 - x^3) \geq 0$$

Studiando separatamente il segno di ciascun fattore e applicando la regola dei segni otteniamo: $0 \leq x \leq \sqrt[3]{2}$



Per cui la funzione: i) non è definita per $x < 0$; ii) passa per l'origine degli assi; iii) interseca l'asse delle ascisse anche in $x = \sqrt[3]{2} \approx 1.26$; iv) restituisce valori strettamente positivi nell'intervallo $0 < x < \sqrt[3]{2}$ e strettamente negativi nell'intervallo $x > \sqrt[3]{2}$.

(c) (2 punti) Calcola i *limiti* di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

Soluzione:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{2x} - x^2\right) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \cdot \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{x^3}} - 1\right) = +\infty \cdot (-1) = -\infty$$

Il limite per $x \to -\infty$ non esiste non essendo la funzione definita per $x < 0$.

(d) (2 punti) Calcola la *derivata prima* e determina i valori per cui $f(x)$ è *crescente/decrescente* studiando il segno di questa derivata.

Soluzione:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}} - 2x = \frac{1 - 2\sqrt{2\,x^3}}{\sqrt{2x}}$$

Nel campo di esistenza di $f(x)$ (escluso 0, per cui la derivata non è definita) il denominatore è sempre positivo, per cui il segno di $f'(x)$ è deciso dal numeratore:

$$\begin{aligned} 1 - 2\sqrt{2\,x^3} &\geq 0 \\ \sqrt{2\,x^3} &\leq \frac{1}{2} \\ x^3 &\leq \frac{1}{8} \\ x &\leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

sotto la condizione di esistenza $x > 0$.

Pertanto, $f(x)$ è strettamente crescente per $x \in (0, 1/2)$ e strettamente decrescente per $x \in (1/2, +\infty)$. $x = 1/2$ è un punto stazionario di massimo assoluto.

(e) (2 punti) Determina la *concavità/convessità* di $f(x)$.

Soluzione:

Essendo $\sqrt{2x}$ e $-x^2$ due funzioni globalmente concave negli insiemi di definizione, $f(x)$ è globalmente concava essendo il risultato della somma di queste due funzioni.

Questo può essere mostrato anche calcolando la derivata seconda:

$$f''(x) = -2 - \frac{1}{2\sqrt{2x^3}}$$

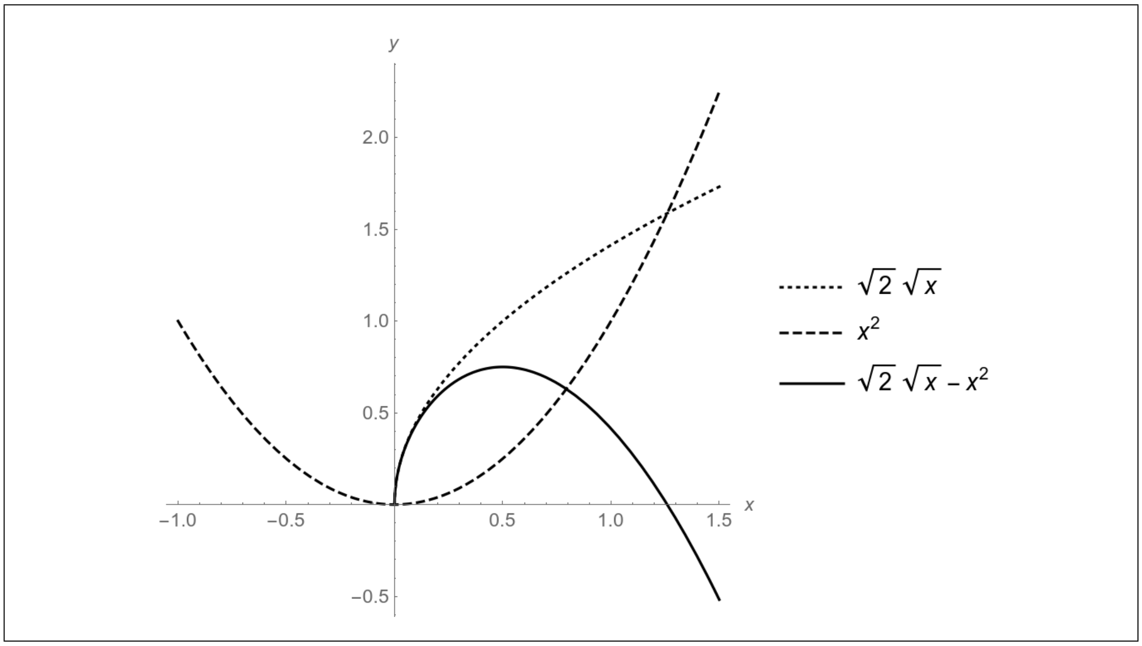
e notando che restituisce valori negativi per $x > 0$.

(f) (2 punti) Disegna i *grafici* delle funzioni:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{2x} \\ h(x) &= x^2 \\ f(x) &= \sqrt{2x} - x^2 \end{aligned}$$

nello stesso piano cartesiano.

Soluzione:



2. *Problema.* Supponi di avere dieci amici stretti e di dover scegliere tra questi le persone da invitare al tuo compleanno.

   (a) (2 punti) Supponendo di voler invitare almeno due amici, qual è il numero delle opzioni che hai di fronte?

   Soluzione:

   Se potessi invitare anche solo un amico oppure nessun amico, il numero delle scelte sarebbe pari alla cardinalità dell'insieme delle parti (o insieme potenza) dell'insieme degli amici A, cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi (propri e impropri) dell'insieme A:

   $$P(A) = 2^{10} = \sum_{i=0}^{10} C_{10,i}$$

   dove $C_{10,i}$ sono le combinazioni semplici di 10 oggetti di classe i (con $i = 0, 1, \dots 10$). Supponendo di voler invitare almeno due amici, da quelli sopra devo escludere l'insieme vuoto e i 10 sottoinsiemi composti da un solo elemento. Per cui il numero delle scelte che ho di fronte è pari a:

   $$2^{10} - 11 = \sum_{i=2}^{10} C_{10,i} = 1013$$

   (b) (2 punti) Supponi di voler invitare almeno due amici ma, avendo la casa piccola, non puoi invitare più di otto amici. Qual è il numero delle opzioni che hai di fronte in tal caso?

Soluzione:
In tal caso dal numero sopra dovrò sottrarre ulteriori 11 scelte: l'invito di tutti e dieci gli amici e le 10 scelte relative all'invito di 9 dei 10 amici, per cui:

$$2^{10} - 2 \times 11 = \sum_{i=2}^{8} C_{10,i} = 1002$$

3. *Problema*:

(a) (2 punti) Il vestito che desideri è venduto a 160 euro. Un amico ti dice che il prezzo è aumentato del 28% rispetto a 8 anni fa. Qual era il prezzo del vestito 8 anni fa?

Soluzione:

$$\begin{aligned} 1,28\,x &= 160 \\ x &= \frac{160}{1,28} = 125 \end{aligned}$$

Il vestito otto anni fa era venduto a 125 euro.

(b) (3 punti) Supponendo che ogni anno il prezzo del vestito sia aumentato di una percentuale costante, qual è stato il tasso di crescita annuale del prezzo?

Soluzione:
Il tasso di crescita annuale del prezzo x è ottenuto risolvendo la seguente equazione:

$$\begin{aligned} (1+x)^8 &= 1,28 \\ 1+x &= \sqrt[8]{1,28} \\ x &= \sqrt[8]{1,28} - 1 \approx 0,0313 \end{aligned}$$

Il tasso di crescita annuale che genera un aumento del 28% in 8 anni è il 3,13% circa.

(c) (3 punti) Supponi che il prezzo sia sempre aumentato (e continuerà ad aumentare) del 4% ogni anno. Quanti anni sono necessari perché il prezzo del vestito quadruplichi? Quanti anni fa il prezzo era circa un quarto del prezzo attuale?

Soluzione:
Il numero di anni t necessari perché il prezzo quadruplichi è dato dalla soluzione della seguente equazione esponenziale:

$$\begin{aligned} (1+0,04)^t &= 4 \\ t &= \log_{1,04} 4 = \frac{\ln 4}{\ln 1,04} \approx 35,346 \end{aligned}$$

Il prezzo sarà 4 volte maggiore tra circa 35 anni.

In modo equivalente poteva notarsi che una crescita costante del 4% annuo porta al raddoppio della variabile ogni 70/4 anni circa, per cui, perché la somma quadruplichi, sono necessari $70/4 \times 2$ anni, ovvero 35 anni circa.

Essendo il tasso di crescita costante, da questo segue anche che 35 anni fa circa il prezzo era un quarto di quello attuale. Infatti:

$$\begin{aligned}(1+0,04)^t &= \frac{1}{4} \\ t &= \log_{1,04}\frac{1}{4} = \frac{-\ln 4}{\ln 1,04} \approx -35,346\end{aligned}$$

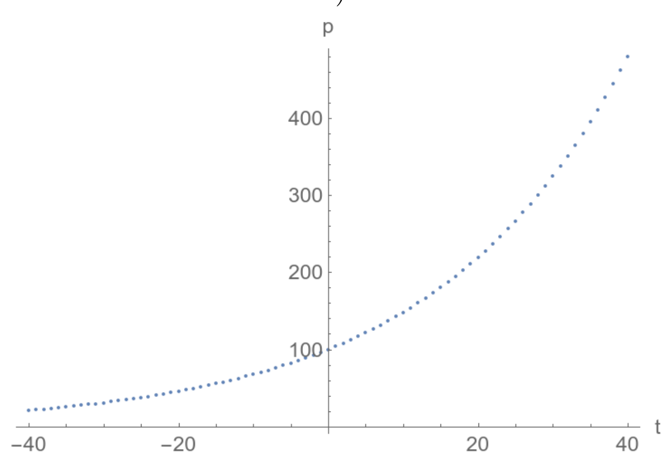
(d) (3 punti) Supponi che il prezzo attuale sia pari a 100 e che il prezzo sia sempre aumentato e continuerà ad aumentare del 4% ogni anno. Disegna un grafico qualitativo del prezzo del vestito p in funzione degli anni trascorsi t rispetto al periodo attuale.

Soluzione:

Si tratta di una *funzione esponenziale* con base maggiore di uno (1,04), e quindi strettamente crescente e convessa, e intercetta con l'asse delle ordinate pari a 100:

$$p = 100 \cdot 1,04^t$$

(di fatto, più propriamente una successione, essendo la funzione definita su $\mathcal{N}$ poiché il fenomeno è osservato a intervalli discreti).



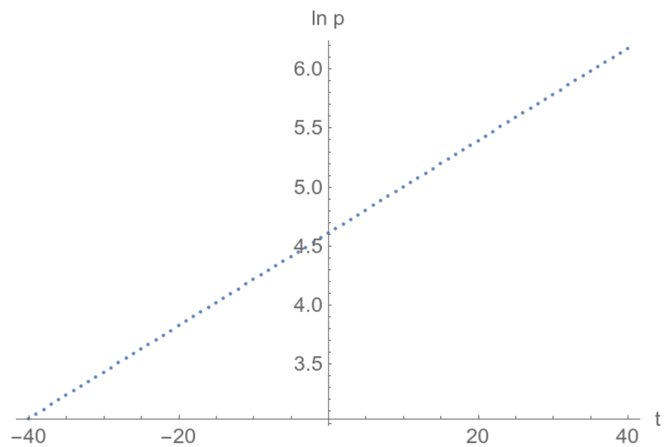
(e) (3 punti) Disegna il grafico di cui al punto precedente in *scala logaritmica*: sull'asse delle ordinate, invece di rappresentare il prezzo p, rappresenta il logaritmo naturale del prezzo, $\ln p$. Come cambia la forma del grafico?

Soluzione:

Poiché la funzione di partenza è esponenziale, la rappresentazione in scala logaritmica la trasforma in una funzione lineare il cui grafico è una retta. Si ha infatti:

$$\ln p = \ln(100 \cdot 1,04^t) = \ln 100 + (\ln 1,04) \cdot t \approx 4,6 + 0,04\,t$$

che è una funzione lineare in t con intercetta pari a $\ln 100$ ($\approx 4,6$) e coefficiente angolare pari a 0,04 (il tasso di crescita annuale).



Esercizio/Problema:	1	2	3	Totale
Punti:	12	4	14	30
Punteggio:				