Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

14 Gennaio 2020

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce.
Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.
Puoi utilizzare solo i fogli protocollo consegnati durante lo svolgimento della prova.
Al termine della prova devi riconsegnare *tutti e solo* i fogli ricevuti.
Immediatamente dopo la consegna, su ciascun foglio protocollo scrivi in modo chiaro e leggibile a penna indelebile il tuo nome, cognome e numero di matricola.
I fogli recanti una qualsiasi correzione o cancellazione nei dati identificativi dello studente non verranno valutati a meno di non richiederne l'immediata sostituzione.

1. *Problema/Esercizio*: Chiunque possiede un cane sente il bisogno di cercare l'equivalente della sua età con quella di un essere umano. Il criterio più diffuso è quello di moltiplicare l'età del cane per sette. L'età umana in anni è quindi data dalla seguente funzione lineare g dell'età del cane in anni:

$$y = g(x) = 7 \cdot x$$

   dove y è l'età umana in anni e x l'età del cane in anni. Così, per esempio, in base a tale funzione, se Fido ha 10 anni e 6 mesi (10,5), dovremo immaginarlo come un anziano di 73 anni e 6 mesi (73,5).

   Basandosi sulle modifiche nel tempo del DNA, più precisamente su un meccanismo epigenetico chiamato "metilazione", confrontando i dati di più di 100 labrador retriever tra 1 e 16 anni di età con i profili di metilazione provenienti da più di 300 esseri umani di età compresa tra 1 e 103 anni, in un recente studio un team di ricercatori (Wang *et al.*, bioRxiv, 2019) è giunto alla seguente funzione che calcola in modo molto più accurato questa equivalenza:

$$y = f(x) = 31 + 16 \cdot \ln x$$

   dove ln è il logaritmo naturale (il logaritmo base e, il numero di Nepero, o di Eulero) e, come sopra, y è l'età umana in anni e x l'età del cane in anni.

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

(a) (2 punti) Utilizzando la funzione f, calcola il corrispettivo in anni umani di un labrador a, rispettivamente, 3 mesi, 6 mesi, 1 anno, 9 anni e 12 anni di vita.

Soluzione:

$$\begin{aligned} f(0,25) &= 31 - 16 \cdot \ln 4 \approx 9 \\ f(0,5) &= 31 - 16 \cdot \ln 2 \approx 20 \\ f(1) &= 31 + 16 \cdot \ln 1 = 31 \\ f(9) &= 31 + 16 \cdot \ln 9 \approx 66 \\ f(12) &= 31 + 16 \cdot \ln 12 \approx 71 \end{aligned}$$

(b) (2 punti) Calcola il valore di x (l'età del cane) al di sotto del quale la funzione f restituisce valori negativi, dando luogo a risultati assurdi per l'età umana e risultando pertanto non utilizzabile.

Soluzione:
Per determinare tale valore dobbiamo risolvere la seguente disequazione logaritmica:

$$31 + 16 \cdot \ln x < 0$$

che, ricondotta alla forma normale, diventa:

$$\ln x < -31/16$$

da cui, notando che la base del logaritmo è maggiore di 1 (per cui il verso della disequazione non cambia) e applicando la definizione di logaritmo, si ha:

$$x < \mathrm{e}^{-31/16} \approx 0,144$$

Poiché un mese è 1/12 di anno, cioè 0,08 anni circa, approssimativamente sotto il mese e mezzo di vita del cane la formula restituisce valori negativi e non può essere utilizzata.

(c) (2 punti) Partendo da f, che è iniettiva nel suo insieme di definizione $(0, +\infty)$, determina la *funzione inversa* f^{-1}, che permette di determinare l'equivalente in anni "canini" degli anni di un uomo.

Soluzione:
Scrivo $x = f(y)$ ed esplicito rispetto a y ottenendo:

$$\begin{aligned} x &= 31 + 16 \cdot \ln y \\ 16 \cdot \ln y &= x - 31 \\ \ln y &= \frac{x - 31}{16} \\ y &= \mathrm{e}^{\frac{x-31}{16}} \end{aligned}$$

(d) (2 punti) Utilizzando la funzione f^{-1} calcolata al punto precedente, determina l'equivalente in anni canini dell'età di un uomo di 47 anni.

Soluzione:

$$f^{-1}(47) = \mathrm{e}^{\frac{47-31}{16}} = \mathrm{e} \approx 2,72$$

Un uomo di 47 anni ha un'età corrispondente a quella di un labrador di 2 anni e 9 mesi circa.

(e) (2 punti) Calcola le *derivate prime* delle funzioni g e f.

Soluzione:

$$\begin{aligned} g'(x) &= 7 \\ f'(x) &= \frac{16}{x} \end{aligned}$$

(f) (2 punti) Calcola le *derivate seconde* delle funzioni g e f.

Soluzione:

$$\begin{aligned} g''(x) &= 0 \\ f''(x) &= -\frac{16}{x^2} \end{aligned}$$

(g) (2 punti) Studiando il segno della derivata seconda di f, determina la *concavità*/*convessità* di f.

Soluzione:
$f''(x) < 0$ per ogni $x \neq 0$. f, definita nell'intervallo $(0, +\infty)$, è pertanto globalmente concava.

(h) (2 punti) Calcola il valore delle derivate prime $g'(x)$ e $f'(x)$ (trovate al punto e) nel punto $x = 4$ ed interpreta il risultato. Cosa indicano i numeri ottenuti?

Soluzione:

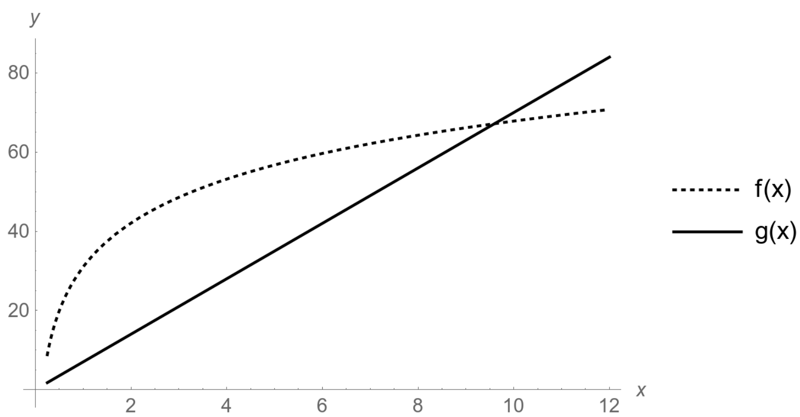
$$\begin{aligned} g'(4) &= 7 \\ f'(4) &= \frac{16}{4} = 4 \end{aligned}$$

In base al primo criterio (lineare), ogni anno canino corrisponde sempre a 7 anni umani, per cui il passaggio da 4 a 5 anni di un cane aumenta la sua età in anni umani di 7 anni.

In base alla funzione f, l'impatto che ogni anno canino aggiuntivo ha in termini di anni umani non è costante, ma decresce all'aumentare dell'età. Il passaggio da 4 a 5 anni di un cane aumenta la sua età in anni umani approssimativamente di 4 anni.

(i) (2 punti) Disegna nello stesso piano cartesiano i *grafici* qualitativi delle funzioni g ed f per x nell'intervallo $[1/4, 12]$.

Soluzione:



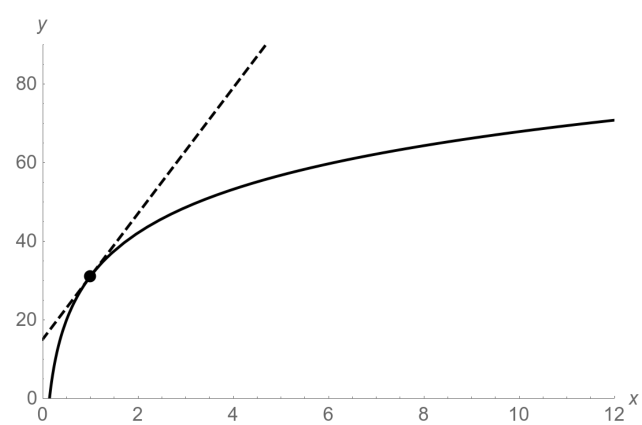
(j) (2 punti) Utilizzando lo *sviluppo di Taylor al primo ordine* con centro $x_0 = 1$, calcola la funzione lineare (la retta) che approssima meglio la funzione non lineare f per un cane di un anno.

Soluzione:
Applicando lo sviluppo in serie di Taylor al primo ordine con centro $x_0 = 1$ si ottiene:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) = f(1) + f'(1)(x - 1)$$

Essendo $f(1) = 31$ e $f'(1) = 16$, si ha:

$$f(x) \approx 31 + 16(x - 1) = 15 + 16x$$



(k) (2 punti) Calcola l'età del cane (in anni) in corrispondenza della quale è massima la sottostima che la funzione g fa degli equivalenti anni umani rispetto alla funzione f.
Suggerimento: trova il *punto di massimo* della funzione $h(x) = f(x) - g(x)$.

Soluzione:
Definiamo la funzione $h(x) = f(x) - g(x)$, che calcola la differenza tra gli anni umani indicati dalla funzione f e quelli indicati dalla funzione g:

$$h(x) = 31 + 16 \ln x - 7\,x$$

La derivata prima è:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x) = \frac{16}{x} - 7$$

I punti stazionari sono quelli in corrispondenza dei quali tale derivata è nulla, per cui:

$$\frac{16 - 7x_0}{x_0} = 0$$

Si tratta di un'equazione fratta che è soddisfatta solo se il numeratore è nullo, per cui:

$$x_0 = \frac{16}{7} \approx 2,29$$

Essendo $h(x)$ una funzione globalmente concava (poiché differenza di una funzione strettamente concava e una funzione convessa), tale punto stazionario è un punto di massimo assoluto.
La sottostima che il criterio usuale di moltiplicare l'età del cane per sette per ottenere l'età in anni umani produce è massima in corrispondenza di un'età canina di 2 anni e 3 mesi circa: in corrispondenza di tale età, mentre la funzione f restituisce un valore superiore a 44 anni, utilizzando la formula lineare si arriva ad un'età di soli 16 anni.

2. *Problema.* Il poké è un piatto di origine hawaiana a base di pesce crudo. Alcuni locali danno la possibilità di comporre il proprio poké bowl scegliendo tra gli ingredienti messi a disposizione.

Supponiamo che un locale permetta di comporre il proprio poké scegliendo esattamente: i) 2 basi tra 6 disponibili (riso, pasta, quinoa, orzo, farro, insalata); ii) 1 pesce tra 4 disponibili (salmone, tonno, gambero, polpo); iii) 3 condimenti tra 15 disponibili (maionese, salsa di soia, olio di oliva, noci, wasabi, ecc.)

(a) (2 punti) Immaginando di andare ogni giorno a pranzo in quel locale, se si vuole ordinare ogni volta un poké diverso dopo quanti giorni questo non sarà più possibile e si sarà costretti ad ordinare un poké con un mix di ingredienti già assaggiato?

Soluzione:
I diversi poké ordinabili sono dati da:

$$\begin{aligned} C_{6,2} \cdot C_{4,1} \cdot C_{15,3} &= \binom{6}{2} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{15}{3} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} \cdot 4 \cdot \frac{15!}{3!\,(15-3)!} \\ &= 15 \cdot 4 \cdot 455 = 27\,300 \end{aligned}$$

Si potranno quindi ordinare poké diversi per 27 300 giorni (75 anni circa).

(b) (2 punti) Qual è la probabilità che un tuo amico indovini il poké che hai ordinato in un particolare giorno scegliendone a caso uno? Come cambia tale probabilità se quel giorno il tuo poké conteneva salmone e maionese e il tuo amico lo sa?

Soluzione:
Poiché i casi possibili sono 27 300, la probabilità di indovinare il poké ordinato scegliendone uno a caso è pari a 1/27 300, ovvero lo 0,0037% circa.

I poké possibili che contengono salmone come pesce e maionese tra i condimenti si riducono a:

$$C_{6,2} \cdot C_{14,2} = \binom{6}{2} \cdot \binom{14}{2} = \frac{6!}{2!\,(6-2)!} \cdot \frac{14!}{2!\,(14-2)!} = 15 \cdot 91 = 1\,365$$

per cui la probabilità di indovinare scegliendone uno a caso è pari a 1/1 365, cioè lo 0,07%.

(c) (2 punti) Quanti poké diversi è invece possibile ordinare se è possibile comporre il poké scegliendo: i) al massimo 2 basi (nessuna, una o due) tra 6 disponibili; ii) al massimo 1 pesce (nessuno o uno) tra 4 disponibili; iii) al massimo 3 condimenti tra 15 disponibili.

Soluzione:

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=0}^{2} C_{6,i}\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{1} C_{4,j}\right) \cdot \left(\sum_{k=0}^{3} C_{15,k}\right) &= \left[\binom{6}{0} + \binom{6}{1} + \binom{6}{2}\right] \cdot \left[\binom{4}{0} + \binom{4}{1}\right] \cdot \\ &\cdot \left[\binom{15}{0} + \binom{15}{1} + \binom{15}{2} + \binom{15}{3}\right] \\ &= (1+6+15) \cdot (1+4) \cdot (1+15+105+455) \\ &= 22 \cdot 5 \cdot 576 = 63\,360\end{aligned}$$

3. (2 punti) *Problema.* Durante i saldi di fine stagione, girando per negozi trovi un vestito che ti piace scontato del 18%. Con lo sconto alla cassa lo paghi 250 euro e 92 centesimi. Quanto avresti pagato il vestito senza lo sconto?

Soluzione:

Indicando con x il prezzo intero del vestito si ha:

$$x(1-0,18) = 250,92$$

da cui:

$$x = \frac{250,92}{0,82} = 306$$

Senza lo sconto il vestito sarebbe costato 306 euro.

Esercizio/Problema:	1	2	3	Totale
Punti:	22	6	2	30
Punteggio:				