Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

11 Febbraio 2020

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce.
Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.
Puoi utilizzare solo i fogli protocollo consegnati durante lo svolgimento della prova.
Al termine della prova devi riconsegnare *tutti e solo* i fogli ricevuti.
Immediatamente dopo la consegna, su ciascun foglio protocollo scrivi in modo chiaro e leggibile a penna indelebile il tuo nome, cognome e numero di matricola.
I fogli recanti una qualsiasi correzione o cancellazione nei dati identificativi dello studente non verranno valutati a meno di non richiederne l'immediata sostituzione.

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$:

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}$$

dove e è il numero di Nepero (o Eulero).

(a) (1 punto) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione.

Soluzione:
La funzione è definita per ogni $x \in \mathcal{R}$.

(b) (2 punti) Identifica le eventuali simmetrie (funzione *pari* o *dispari*).

Soluzione:
La funzione è pari essendo:

$$f(-x) = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{-(-x)} = \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{x} = f(x)$$

e quindi assume valori simmetrici rispetto all'asse delle ordinate.

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

(c) (2 punti) Determina le *intersezioni con gli assi* e il *segno della funzione*, $f(x) \geq 0$.

Soluzione:
Il punto di intersezione con l'asse delle ordinate è il punto di coordinate (0,2), poiché:

$$f(0) = \mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^{-0} = 1 + 1 = 2$$

Essendo f la somma di due funzioni esponenziali, e^x e $(1/\mathrm{e})^x$, ed essendo queste sempre positive, $f(x) > 0$ per ogni $x \in \mathcal{R}$ e non ci sono punti di intersezione con l'asse delle ascisse. Alternativamente, può risolversi:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x + \frac{1}{\mathrm{e}^x} &> 0 \\ \frac{\mathrm{e}^{2x}+1}{\mathrm{e}^x} &> 0 \end{aligned}$$

Essendo il denominatore sempre positivo il segno è deciso dal numeratore:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{2x} + 1 &> 0 \\ \mathrm{e}^{2x} &> -1 \end{aligned}$$

L'ultima disequazione è soddisfatta per ogni $x \in \mathcal{R}$.

(d) (2 punti) Calcola i *limiti* di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$.

Soluzione:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) &= \left(\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\right) + \left(\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x}\right) = +\infty + 0 = +\infty \\ \lim_{x\to-\infty} \left(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}\right) &= \left(\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x\right) + \left(\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x}\right) = 0 + \infty = +\infty \end{aligned}$$

(e) (3 punti) Calcola la *derivata prima* $f'(x)$ e determina i valori per cui $f(x)$ è *crescente/decrescente* studiando il segno di questa derivata.

Soluzione:

$$f'(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}$$

Studiando il segno della derivata prima si ha:

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} &\geq 0 \\ \mathrm{e}^x &\geq \mathrm{e}^{-x} \\ x &\geq -x \\ 2\,x &\geq 0 \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

La funzione f è pertanto decrescente in senso stretto nell'intervallo $(-\infty, 0)$ e crescente in senso stretto nell'intervallo $(0, +\infty)$. $x = 0$ è un punto stazionario essendo $f'(0) = 0$.

(f) (3 punti) Calcola la *derivata seconda* $f''(x)$ e determina la *concavità/convessità* di $f(x)$.

Soluzione:

$$f''(x) = e^x + e^{-x} = f(x)$$

Poiché la sua derivata seconda è positiva per ogni $x \in \mathcal{R}$, f è una funzione globalmente convessa.

In alternativa può notarsi che, essendo f la somma di due funzioni esponenziali ed essendo queste convesse su tutto il dominio, f è globalmente convessa.

(g) (2 punti) Calcola il *minimo* e il *massimo* di $f(x)$.

Soluzione:

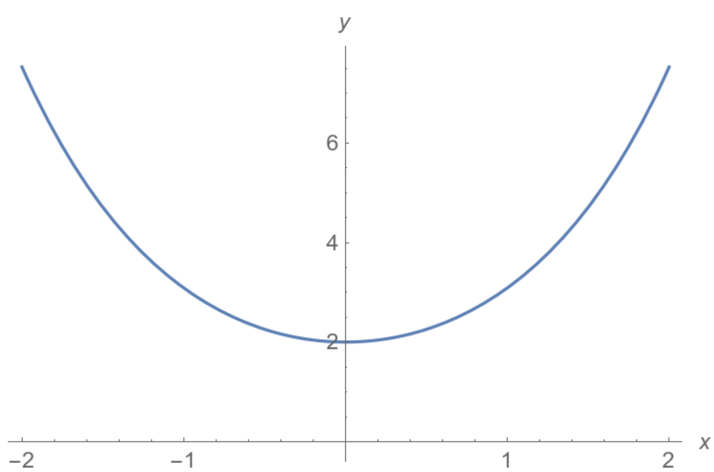
La funzione è illimitata superiormente e non ha quindi un massimo.

Essendo f globalmente convessa l'unico punto stazionario $x = 0$ è un punto di minimo assoluto, per cui:

$$\min_x f(x) = f(0) = 2$$

(h) (3 punti) Disegna il *grafico* della funzione $f(x)$.

Soluzione:



2. *Problema*: Dieci anni fa hai deciso di investire in Borsa acquistando un paniere di azioni. Il valore di questo paniere è aumentato del 5% l'anno per i primi nove anni, mentre l'ultimo anno si è ridotto del 10%.

   (a) (2 punti) Qual è stato il rendimento lordo r del tuo investimento (esclusi i dividendi)? In altre parole, di quanto è variato in percentuale il valore di mercato del paniere in questi dieci anni?

Soluzione:

$$r = (1 + 0,05)^9 \cdot (1 - 0,1) - 1 = 0,3962$$

Il valore del paniere è aumentato del 40% circa.

(b) (2 punti) Se il valore di mercato del tuo paniere ora è 3490 euro e 50 centesimi, quale somma avevi investito dieci anni fa?

Soluzione:
Indicando con x la somma investita e ricordando che $r = 0,3962$ è la variazione relativa nel periodo considerato si ha:

$$(1 + r)x = 3490,5$$

da cui:

$$x = \frac{3\,490,5}{1,3962} = 2\,500$$

(c) (2 punti) Considerando il rendimento complessivo r calcolato al punto (a), determina quel rendimento annuale costante che darebbe in 10 anni lo stesso rendimento complessivo.[1]

Soluzione:
Indicando con g questo rendimento, si ha:

$$(1 + g)^{10} = 1 + r$$

da cui:

$$g = \sqrt[10]{1 + r} - 1 = \sqrt[10]{1,3962} - 1 \approx 0,0339$$

Il tasso annuo di crescita composto è pari a circa il 3,4%.

3. (3 punti) *Problema.* Immagina di avere 20 magliette e 10 pantaloni e di voler abbinare ogni maglietta ad un solo pantalone. Considerando che vi possono essere pantaloni non abbinati ad alcuna maglietta e che uno stesso pantalone può essere abbinato anche a più di una maglietta, qual è il numero dei possibili abbinamenti che puoi fare?

Soluzione:
Ogni "abbinamento" è una funzione che è possibile definire avente l'insieme delle magliette come dominio e quello dei pantaloni come codominio.

Essendo 20 gli elementi nel dominio e 10 quelli nel codominio, il numero delle possibili funzioni è dato dalle disposizioni con ripetizione di 10 oggetti di classe 20:

$$D'_{10,20} = 10^{20}$$

[1] È questo il tasso annuo di crescita composto, noto come CAGR (*Compounded Average Growth Rate*).

4. (3 punti) *Esercizio.* Risolvi la seguente disequazione con valore assoluto:

$$\left|\frac{x+3}{2}\right| \geq 4$$

Soluzione:

$$\frac{x+3}{2} \leq -4 \qquad \vee \qquad \frac{x+3}{2} \geq 4$$

da cui:

$$x \leq -11 \qquad \vee \qquad x \geq 5$$

Esercizio/Problema:	1	2	3	4	Totale
Punti:	18	6	3	3	30
Punteggio:					