Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

12 Gennaio 2021

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce.
Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$

$$f(x) = \frac{e^x}{x}$$

dove e è il numero di Nepero.

(a) (2 punti) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione f.

Soluzione:
La funzione è definita per ogni valore reale di x che non rende nullo il denominatore, per cui l'insieme di definizione è $\mathcal{R}\backslash\{0\}$.

(b) (3 punti) Indicando con A l'insieme di definizione di f individuato al punto precedente, determina: i) l'insieme dei *punti interni* di A; ii) l'insieme dei *punti esterni* di A; iii) l'insieme dei *punti di frontiera* di A; iv) l'insieme derivato di A (l'insieme dei *punti di accumulazione* di A). Stabilisci se A è un insieme *aperto*, *chiuso* o né aperto né chiuso.

Soluzione:
L'insieme A è dato dall'unione di due intervalli aperti e illimitati:

$$A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

L'insieme dei punti interni di A coincide con A (e da questo segue che A è un insieme aperto):

$$\text{Int}(A) = A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Non esistono punti esterni ad A, per cui l'insieme dei punti esterni di A è l'insieme vuoto:

$$\text{Ext}(A) = \emptyset$$

L'unico punto di frontiera è il punto 0, per cui l'insieme dei punti di frontiera di A (∂A) è il singoletto $\{0\}$.

Non essendo 0, l'unico punto di frontiera, un punto isolato, questo è di accumulazione e pertanto l'insieme derivato di A coincide con l'insieme dei numeri reali:

$$A' = \text{Int}(A) \cup \{0\} = (-\infty, +\infty)$$

(c) (3 punti) Determina il *segno della funzione* nel campo di esistenza ($f(x) \geq 0$) e le eventuali *intersezioni con gli assi.*

Soluzione:

Per determinare il segno della funzione occorre risolvere la seguente disequazione:

$$\frac{e^x}{x} \geq 0$$

Si tratta di una disequazione fratta già ridotta alla forma normale. Essendo il numeratore una funzione esponenziale strettamente positiva per ogni $x \in \mathcal{R}$, il segno sarà deciso dal denominatore e la disequazione sarà soddisfatta per $x > 0$.

Non essendo la funzione definita per $x = 0$, il suo grafico non interseca l'asse delle ordinate.

Inoltre, essendo il numeratore sempre strettamente positivo, l'equazione $f(x) = 0$ non ha soluzioni e il grafico della funzione non interseca l'asse delle ascisse.

(d) (3 punti) Calcola i limiti per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ e determina gli eventuali *asintoti orizzontali* (destro, sinistro o bilaterale).

Soluzione:

$f(x)$ è una funzione infinita per $x \to +\infty$, e non esiste quindi un asintoto orizzontale destro. Si ha infatti:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

dove il precedente limite segue dalla gerarchia degli ordini di infinito.

L'asintoto orizzontale sinistro corrisponde invece all'asse delle ascisse, poiché:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = \left(\lim_{x \to -\infty} e^x \right) \left(\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} \right) = 0^+ \cdot 0^- = 0^-$$

(e) (3 punti) Stabilisci se $f(x)$ è continua nell'insieme dei numeri reali e, nel caso non sia continua in uno o più punti, determina la specie di tali punti di discontinuità.

Soluzione:
Essendo $f(x)$ data dal rapporto di due funzioni elementari (una funzione esponenziale e una funzione identità) è continua nel suo insieme di definizione.
Non essendo la funzione definita per $x = 0$, questo è un punto di discontinuità, avendosi:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

In particolare, essendo i due limiti (sinistro e destro) infiniti, $x = 0$ è un punto di discontinuità di seconda specie.

(f) (2 punti) Determina gli eventuali *asintoti verticali*.

Soluzione:
Dalla soluzione al punto precedente segue che la retta di equazione $x = 0$ è l'asintoto verticale.

(g) (3 punti) Calcola la *derivata prima* $f'(x)$ e determina i valori per cui $f(x)$ è *crescente/decrescente* e gli eventuali *punti stazionari* studiando il segno di questa derivata.

Soluzione:
Applicando la regola della derivata di un rapporto si ha:

$$f'(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

Il denominatore di questa funzione è sempre positivo per ogni $x \neq 0$. Il segno è deciso dal numeratore. Questo è il prodotto di due fattori. Essendo il primo una funzione esponenziale strettamente positiva, il segno è deciso dal secondo fattore per cui la disequazione $f'(x) \geq 0$ è soddisfatta per:

$$x - 1 \geq 0$$

$$x \geq 1$$

$f(x)$ è pertanto strettamente crescente per $x \in (1, +\infty)$, strettamente decrescente per $x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$, mentre il punto $x_0 = 1$ è un punto stazionario.
In particolare, $x_0 = 1$ è un minimo relativo, poiché la funzione passa dall'essere decrescente a all'essere crescente (la derivata prima passa dall'essere negativa all'essere positiva).

(h) (3 punti) Calcola la *derivata seconda* $f''(x)$ e determina la *concavità/convessità* di $f(x)$ studiando il segno di tale derivata.

Soluzione:
Applicando la regola della derivata di un rapporto si ha:

$$f''(x) = D\left[\frac{e^x(x-1)}{x^2}\right] = \frac{D[e^x(x-1)]x^2 - e^x(x-1)D[x^2]}{x^4}$$
$$= \frac{[e^x(x-1)+e^x]x^2 - 2xe^x(x-1)}{x^4} = \frac{e^x x^2 - 2e^x(x-1)}{x^3} = \frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3}$$

Per studiare il segno della derivata seconda risolviamo la seguente disequazione:

$$\frac{e^x(x^2-2x+2)}{x^3} \geq 0$$

Si tratta di una disequazione fratta per cui dobbiamo studiare il segno del numeratore, del denominatore e applicare la regola dei segni.
Il numeratore è il prodotto di due fattori. Essendo il primo fattore una funzione esponenziale strettamente positiva, il segno del numeratore è deciso dal secondo fattore:

$$x^2 - 2x + 2 \geq 0$$

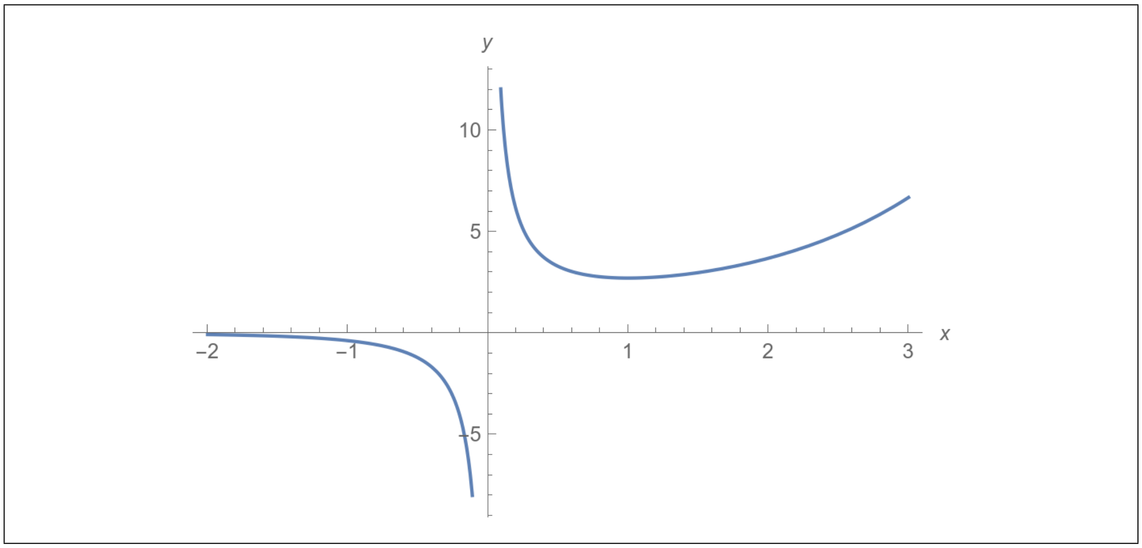
Questa è una disequazione quadratica. Poiché l'equazione associata non ha soluzioni reali, essendo il discriminante negativo (si ha infatti $(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 < 0$) ed essendo il coefficiente di x^2 positivo, la disequazione è soddisfatta $\forall\, x \in \mathcal{R}$ e il numeratore è pertanto sempre positivo.
Il segno sarà pertanto deciso dal denominatore, per cui si ha:

$$x^3 > 0$$

che è soddisfatta per ogni $x > 0$.
$f(x)$ è pertanto strettamente concava nell'intervallo $(-\infty, 0)$ e strettamente convessa nell'intervallo $(0, +\infty)$.

(i) (3 punti) Disegna il *grafico* della funzione $f(x)$.

Soluzione:
Mettendo insieme tutte le informazioni ottenute nei punti precedenti e notando altresì che $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$ è un limite per difetto (la funzione assume sempre valori negativi per ogni x negativo) e che in corrispondenza del punto di minimo relativo $x_0 = 1$ la funzione assume valore $f(1) = e \approx 2,718$, è possibile disegnare un grafico qualitativo della funzione.



2. *Problema*: Vuoi entrare nell'account Instagram di Paola Bianchi, una tua amica, e sai di per certo che utilizza una password di 8 caratteri (hai contato i suoni emessi dalla tastiera mentre la digitava sul suo smartphone). Una volta ti ha confidato che, per ricordare meglio le password, lei utilizza per crearle solo le lettere che costituiscono le iniziali del suo nome e del suo cognome e le cifre che compaiono nella sua data di nascita, e sai che è nata il 5/5/2002. Ricordando che Instagram usa un sistema di password case-sensitive (sensibile alle maiuscole) e che la password potrebbe essere composta anche di lettere e/o cifre ripetute:

   (a) (3 punti) quanti tentativi al massimo pensi di dover fare per riuscire ad entrare nel suo account?

   Soluzione:
   Questi sono pari alle disposizioni con ripetizione di 7 elementi, $\{P, B, p, b, 0, 2, 5\}$, di classe 8:
   $$D'_{7,8} = 7^8 = 5\,764\,801$$
   Nota: Il problema poteva essere inteso anche nel senso che la password di 8 caratteri doveva contenere necessariamente sia le iniziali sia la data di nascita ed era data semplicemente da uno dei possibili ordinamenti di questi caratteri.
   In tal caso, il numero di possibili password in un sistema non case-sensitive era pari alle permutazioni di 8 elementi di cui 3 (il 5, il 2 e lo 0) ripetuti 2 volte. Essendo il sistema case-sensitive questo numero va moltiplicato per 4, per tenere conto della possibilità di utilizzare entrambe le iniziali maiuscole, entrambe le iniziali minuscole, l'iniziale del nome maiuscola e quella del cognome minuscola o viceversa. Da questo segue che il numero complessivo di password risulta pari a:
   $$4 \times P'_{2,2,2,1,1} = 4 \times \frac{8!}{2! \times 2! \times 2!} = \frac{8!}{2} = 20\,160$$

   (b) (2 punti) qual è la probabilità di individuare la password corretta entro i primi 1000 tentativi?

Soluzione:
La probabilità è data dal rapporto tra il numero di casi favorevoli (1000) e quello dei casi possibili, calcolato al punto precedente, per cui si ha:

$$\mathrm{Pr} = \frac{1000}{5\,764\,801} \approx 0,00017 = 0,017\%$$

Nota: Nella seconda interpretazione del problema questa probabilità è invece pari a:

$$\mathrm{Pr} = \frac{1000}{20\,160} \approx 0,0496 = 4,96\%$$

Esercizio/Problema:	1	2	Totale
Punti:	25	5	30
Punteggio:			