Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

10 Febbraio 2021

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce.
Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{2x-1}}$$

(a) (2 punti) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione f.

Soluzione:
La funzione è definita per ogni valore reale di x che non rende negativo (condizione di realtà) o nullo il radicando del radicale al denominatore:

$$\begin{aligned} 2x-1 &> 0 \\ x &> 1/2 \end{aligned}$$

Per cui l'insieme di definizione coincide con l'intervallo $(1/2, +\infty)$.

(b) (3 punti) Indicando con A l'insieme di definizione di f individuato al punto precedente, determina: i) l'insieme dei *punti interni* di A; ii) l'insieme dei *punti esterni* di A; iii) l'insieme dei *punti di frontiera* di A; iv) l'*insieme complementare* di A; v) l'*insieme derivato* di A. Inoltre, stabilisci se A è un insieme *aperto*, *chiuso* o né aperto né chiuso.

Soluzione:
L'insieme dei punti interni di A coincide con A (e da questo segue che A è un insieme aperto):

$$\text{Int}(A) = A = (1/2, +\infty)$$

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

L'insieme dei punti esterni di A è:

$$\mathrm{Ext}(A) = (-\infty, {}^1\!/_2)$$

L'unico punto di frontiera è il punto ${}^1\!/_2$, per cui l'insieme dei punti di frontiera di A è:

$$\partial A = \{{}^1\!/_2\}$$

L'insieme complementare di A, che è chiuso essendo A un insieme aperto, è:

$$A^c = (-\infty, {}^1\!/_2]$$

Poiché il punto di frontiera ${}^1\!/_2$ è un punto di accumulazione, l'insieme derivato di A è:

$$A' = [{}^1\!/_2, +\infty)$$

(c) (2 punti) Determina il *segno della funzione* nel campo di esistenza ($f(x) \geq 0$) e le eventuali *intersezioni con gli assi.*

Soluzione:
Per determinare il segno della funzione occorre risolvere la seguente disequazione irrazionale fratta, già nella forma normale:

$$\frac{x}{\sqrt{2x-1}} \geq 0$$

Essendo il denominatore sempre positivo ed essendo la funzione definita solo per $x > {}^1\!/_2$, questa è strettamente positiva e il suo grafico non presenta punti di intersezione con l'asse delle ascisse.
Inoltre, non essendo la funzione definita per $x = 0$, il suo grafico non interseca neanche l'asse delle ordinate.

(d) (2 punti) Determina gli eventuali *asintoti verticali.*

Soluzione:
L'asintoto verticale (destro) è la retta di equazione $x = {}^1\!/_2$, poiché si ha:

$$\lim_{x \to {}^1\!/_2^+} \frac{x}{\sqrt{2x-1}} = \frac{{}^1\!/_2}{0^+} = +\infty$$

mentre il limite sinistro per $x \to {}^1\!/_2$ non è definito.

(e) (2 punti) Calcola i limiti di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ e determina gli eventuali *asintoti orizzontali.*

Soluzione:

Il limite per $x \to -\infty$ non è definito, mentre quello per $x \to +\infty$ è infinito, poiché si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{2x-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{2x}} = +\infty$$

per la gerarchia degli ordini di infinito. La funzione pertanto non presenta asintoti orizzontali.

(f) (3 punti) Calcola la *derivata prima* $f'(x)$ e determina i valori per cui $f(x)$ è *crescente/decrescente* e gli eventuali *punti stazionari* studiando il segno di questa derivata.

Soluzione:
Applicando la regola della derivata di un rapporto si ha:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{2x-1} - x\frac{2}{2\sqrt{2x-1}}}{2x-1} = \frac{x-1}{\sqrt{(2x-1)^3}}$$

Il denominatore è sempre positivo per ogni $x > 1/2$, per cui la disequazione $f'(x) \geq 0$ è soddisfatta per ogni $x \geq 1$.
La funzione f è quindi strettamente crescente nell'intervallo $(1, +\infty)$, strettamente decrescente nell'intervallo $(1/2, 1)$ e il punto $x_0 = 1$ è un punto stazionario che è anche un punto di minimo relativo.

(g) (3 punti) Calcola la *derivata seconda* $f''(x)$ e determina la *concavità/convessità* di $f(x)$ e gli eventuali *punti di flesso*, studiando il segno di tale derivata.

Soluzione:
Applicando la regola della derivata di un rapporto si ha:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{x-1}{\sqrt{(2x-1)^3}}\right] = \frac{(2x-1)^{\frac{3}{2}} - (x-1)\frac{3}{2}(2x-1)^{\frac{1}{2}} \cdot 2}{(2x-1)^3} \\ &= \frac{2x-1-3(x-1)}{(2x-1)^{\frac{5}{2}}} = \frac{2-x}{\sqrt{(2x-1)^5}} \end{aligned}$$

Il denominatore è sempre positivo per ogni $x > 1/2$, per cui la disequazione $f''(x) \geq 0$ è soddisfatta per:

$$\begin{aligned} 2-x &\geq 0 \\ x &\leq 2 \end{aligned}$$

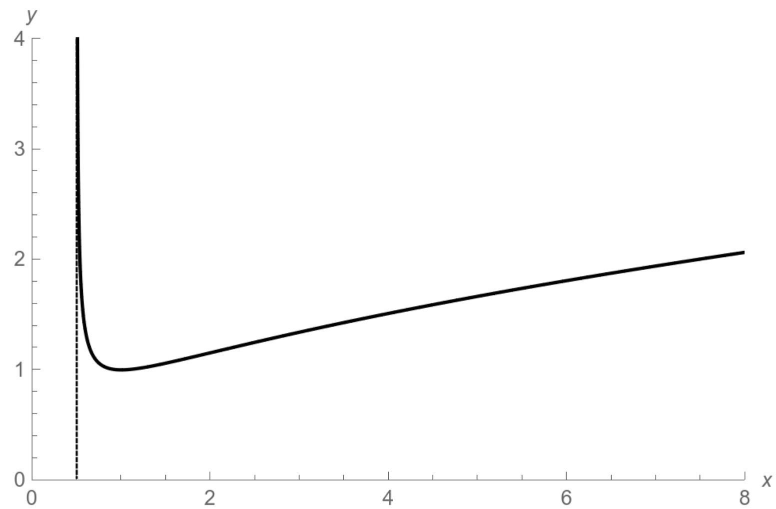
f è quindi strettamente convessa nell'intervallo $(1/2, 2)$, strettamente concava nell'intervallo $(2, \infty)$ e il punto $x_1 = 2$ è un punto di flesso a tangente obliqua.

(h) (3 punti) Disegna il *grafico* della funzione $f(x)$.

Soluzione:
Mettendo insieme le informazioni ottenute nei punti precedenti e notando altresì che:

- in corrispondenza del punto di minimo relativo $x_0 = 1$ la funzione assume valore minimo $f(1) = 1$;
- la retta tangente al grafico della funzione nel punto di flesso $x_1 = 2$ ha coefficiente angolare pari a $f'(2) = \frac{1}{3\sqrt{3}} \approx 0,19$;

è possibile disegnare un grafico qualitativo della funzione.



(i) (4 punti) Risolvi la seguente disequazione:

$$f(x) \geq 2$$

e individua l'insieme delle soluzioni nel grafico precedente.

Soluzione:
Si tratta di una disequazione irrazionale fratta che, ricondotta alla forma normale, diventa:

$$\frac{x - 2\sqrt{2x-1}}{\sqrt{2x-1}} \geq 0$$

Come visto in precedenza, la condizione di esistenza comporta che le soluzioni devono appartenere all'intervallo $(1/2, +\infty)$ e in tale intervallo il denominatore è sempre positivo. Il segno del rapporto coincide pertanto con quello del numeratore e la disequazione è soddisfatta per ogni $x > 1/2$ tale che:

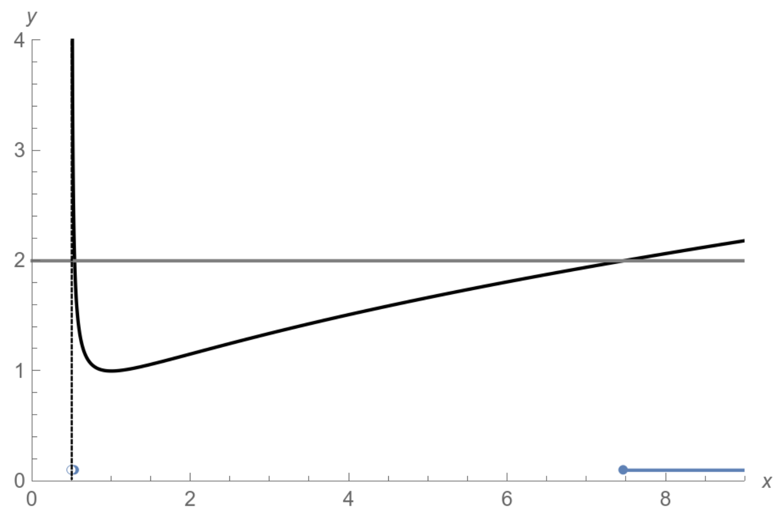
$$\begin{aligned} x - 2\sqrt{2x-1} &\geq 0 \\ \sqrt{2x-1} &\leq \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Quest'ultima è una disequazione irrazionale con indice pari e verso minore o uguale, le cui soluzioni sono date dalle soluzioni del seguente sistema:

$$\begin{cases} 2x-1 \geq 0 \\ \frac{x}{2} \geq 0 \\ 2x-1 \leq \left(\frac{x}{2}\right)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 1/2 \\ x \geq 0 \\ x^2-8x+4 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \geq 1/2 \\ x \leq 4-2\sqrt{3} \ \vee \ x \geq 4+2\sqrt{3} \end{cases}$$

Notando che $4-2\sqrt{3} \approx 0,54 > 1/2$ e che $4+2\sqrt{3} \approx 7,46$, abbiamo pertanto che $f(x) \geq 2$ per ogni

$$x \in (1/2, 4-2\sqrt{3}) \ \cup \ (4+2\sqrt{3}, +\infty)$$



2. (3 punti) *Problema*: Un tuo conoscente ha preso in prestito una determinata somma a un tasso di interesse composto annuo del 5% e, non avendo mai pagato gli interessi né rimborsato il capitale iniziale, dopo 10 anni deve all'istituto di credito 8.144,5 euro. Ricordando che nel regime dell'interesse composto l'interesse maturato alla fine di ogni periodo (in questo caso l'anno) viene capitalizzato, ossia si aggiunge al capitale iniziale e contribuisce a far maturare i nuovi interessi nel periodo successivo, qual è la somma di denaro che questa persona aveva preso in prestito 10 anni fa?

Soluzione:

Per determinare tale somma occorre effettuare un'operazione di attualizzazione in regime di capitalizzazione composta. In particolare, indicando con x la somma iniziale e ricordando i termini del problema, deve valere la seguente eguaglianza:

$$x\left(1+\frac{5}{100}\right)^{10} = 8\,144,5$$

da cui segue:

$$x = \frac{8\,144,5}{1,05^{10}} \approx 5000$$

3. (3 punti) *Problema*: Stai preparando lo zaino per una piccola vacanza e hai deciso di portare con te solo tre paia di pantaloni e cinque magliette. Nel guardaroba hai venti pantaloni e quaranta magliette. Se ti occorresse un decimo di secondo per vagliare ciascuna delle possibilità che hai di fronte, quanto tempo impiegheresti all'incirca per passarle tutte al vaglio?

Soluzione:

Le possibilità sono pari a:

$$C_{20,3} \cdot C_{40,5} = \binom{20}{3} \cdot \binom{40}{5} = \frac{20!}{3!\,(20-3)!} \cdot \frac{40!}{5!\,(40-5)!} = 1\,140 \times 658\,008 = 750\,129\,120$$

Considerando che un anno è composto da 315,360,000 decimi di secondo ($10 \times 60 \times 60 \times 24 \times 365$), occorrerebbero all'incirca 2 anni e 4 mesi di lavoro "full time" (24 ore su 24) per considerarle tutte.

Esercizio/Problema:	1	2	3	Totale
Punti:	24	3	3	30
Punteggio:				