Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

16 Giugno 2021

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce.
Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$:

$$f(x) = \sqrt{x^2} - \ln x^2$$

dove ln è il logaritmo naturale.

(a) (2 punti) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione f.

Soluzione:
La funzione è definita per ogni valore reale di x che non rende negativo (condizione di realtà) il radicando del radicale e che non rende negativo o nullo l'argomento del logaritmo.
Essendo il radicando del radicale x^2, questo non sarà mai negativo, mentre, per quanto riguarda l'argomento del logaritmo, essendo questo x^2, l'unico valore da escludere (perché rende l'argomento uguale a zero) è $x = 0$.
Da questo segue che l'insieme di definizione è $\mathcal{R}\backslash\{0\}$.

(b) (3 punti) Indicando con A l'insieme di definizione di f individuato al punto precedente, determina: i) l'insieme dei *punti interni* di A; ii) l'insieme dei *punti esterni* di A; iii) l'insieme dei *punti di frontiera* di A; iv) l'*insieme complementare* di A; v) l'*insieme derivato* di A. Inoltre stabilisci se A è un insieme *aperto*, *chiuso* o né aperto né chiuso.

Soluzione:

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

L'insieme dei punti interni di A coincide con A (e da questo segue che A è un insieme aperto):

$$\mathrm{Int}(A) = A = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$$

Non esistono punti esterni ad A, per cui l'insieme dei punti esterni è l'insieme vuoto:

$$\mathrm{Ext}(A) = \emptyset$$

L'unico punto di frontiera è il punto 0, per cui l'insieme dei punti di frontiera di A è il singoletto:

$$\partial A = \{0\}$$

Questo è anche l'insieme complementare di A:

$$A^c = \{0\}$$

Poiché l'unico punto di frontiera è un punto di accumulazione, l'insieme derivato di A coincide con l'insieme dei numeri reali:

$$A' = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty) \cup \{0\} = (-\infty, +\infty)$$

(c) (2 punti) Identifica le eventuali simmetrie (funzione *pari* o *dispari*).

Soluzione:
La funzione è pari, poiché il suo dominio è simmetrico rispetto all'origine e si ha:

$$f(-x) = \sqrt{(-x)^2} - \ln(-x)^2 = \sqrt{x^2} - \ln x^2 = f(x)$$

per ogni x per cui f è definita.
La funzione pertanto assume valore simmetrici rispetto all'asse delle ordinate: i valori che assume per x sono identici a quelli che assume per $-x$, e questo torna utile nello studio di funzione, potendo studiare solo quello che accade per $x > 0$, sapendo che il risultato sarà identico per $x < 0$.

(d) (2 punti) Sapendo che

$$\ln|x| < \frac{|x|}{2}$$

dove $|x|$ è il valore assoluto di x, è una disequazione soddisfatta per ogni $x \neq 0$ (è possibile mostrare questo risultato utilizzando il metodo grafico), determina il *segno della funzione* f ($f(x) \geq 0$) nel campo di esistenza e le eventuali *intersezioni con gli assi.*

Soluzione:
Non essendo la funzione definita per $x = 0$, il suo grafico non interseca l'asse delle ordinate.
Per determinare il segno della funzione occorre risolvere la seguente disequazione:

$$\sqrt{x^2} - \ln x^2 \geq 0$$

che, sfruttando le proprietà dei logaritmi e il fatto che $\sqrt{x^2} = |x|$, può riscriversi come segue:

$$|x| - 2\ln|x| \geq 0$$

da cui riarrangiando i termini, otteniamo la versione "debole" della disequazione nel testo:

$$\ln|x| \leq \frac{|x|}{2}$$

Essendo la versione "forte" di questa disequazione sempre soddisfatta nel campo di esistenza della funzione ($x \in \mathcal{R}\backslash\{0\}$), il grafico della funzione riposa nel primo e secondo quadrante del piano cartesiano e il suo grafico non presenta punti di intersezione con l'asse delle ascisse.

Nota: In alternativa, è possibile studiare il segno della funzione solo per $x > 0$ sfruttando il fatto che la funzione è pari, liberandosi così del valore assoluto e giungendo allo stesso risultato.

(e) (2 punti) Determina gli eventuali *asintoti verticali.*

Soluzione:
L'asintoto verticale è la retta di equazione $x = 0$, poiché si ha:

$$\lim_{x\to 0}\left(\sqrt{x^2} - \ln x^2\right) = 0 - (-\infty) = +\infty$$

(f) (2 punti) Calcola i limiti di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ e determina gli eventuali *asintoti orizzontali.*

Soluzione:
Il limite per $x \to \pm\infty$ (è uguale poiché la funzione è pari) è infinito, poiché si ha:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\sqrt{x^2} - \ln x^2\right) = +\infty$$

per la gerarchia degli ordini di infinito. La funzione pertanto non presenta asintoti orizzontali.

(g) (3 punti) Calcola la *derivata prima* $f'(x)$ e determina i valori per cui $f(x)$ è *crescente/decrescente* e gli eventuali *punti stazionari* studiando il segno di questa derivata.

Soluzione:
Applicando la regola della derivata di una differenza si ha:

$$f'(x) = D\left[\sqrt{x^2} - \ln x^2\right] = D\left[\sqrt{x^2}\right] - D\left[\ln x^2\right] = \frac{|x|}{x} - \frac{2}{x}$$

Ricordando che la funzione è pari è possibile studiarla solo per $x > 0$, sfruttando poi la simmetria rispetto all'asse delle ordinate. In tal caso la derivata si riduce a:

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$$

Il denominatore è positivo per ogni $x > 0$, per cui la disequazione $f'(x) \geq 0$ è soddisfatta per ogni $x \geq 2$.

La funzione f è quindi strettamente crescente nell'intervallo $(2, +\infty)$ e strettamente decrescente nell'intervallo $(0, 2)$ e il punto $x_0 = 2$ è un punto stazionario che è anche un punto di minimo relativo.

Essendo la funzione pari, la funzione è invece strettamente decrescente nell'intervallo $(-\infty, -2)$ e strettamente crescente nell'intervallo $(-2, 0)$, dove il punto $x_1 = -2$ è l'altro punto stazionario e punto di minimo relativo.

(h) (3 punti) Calcola la *derivata seconda* $f''(x)$ e determina la *concavità/convessità* di $f(x)$ e gli eventuali *punti di flesso*, studiando il segno di tale derivata.

Soluzione:

Derivando la derivata prima si ottiene:

$$f''(x) = D\left[\frac{|x|}{x} - \frac{2}{x}\right] = -2\,D\left[x^{-1}\right] = \frac{2}{x^2}$$

che è una funzione sempre positiva per ogni $x \neq 0$, per cui f è strettamente convessa e i punti di minimo relativo sono anche punti di minimo assoluto.

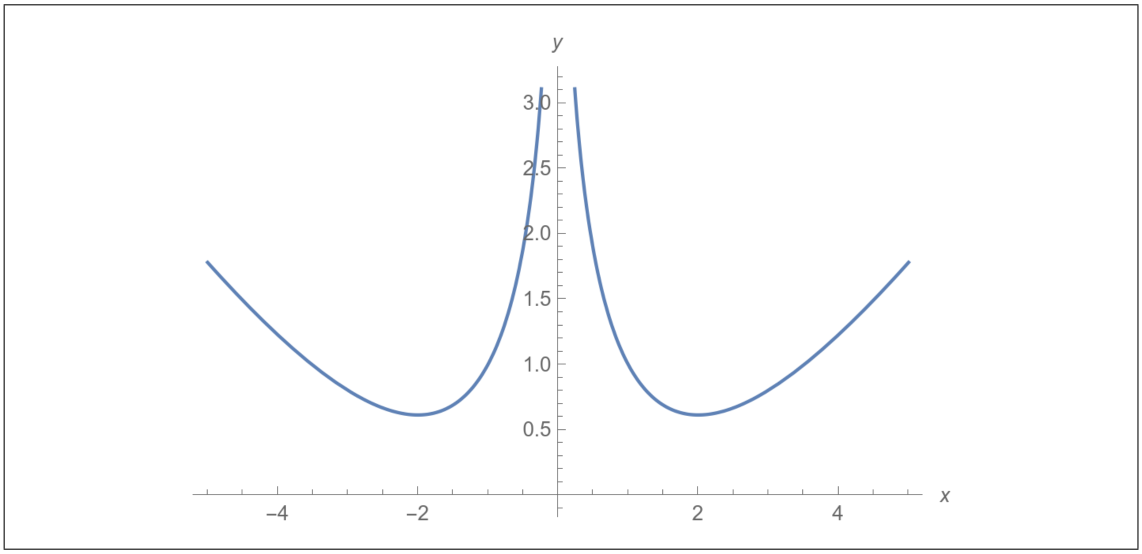
(i) (3 punti) Disegna il *grafico* della funzione $f(x)$.

Soluzione:

Mettendo insieme le informazioni ottenute nei punti precedenti, ricordando che la funzione è pari e notando altresì che in corrispondenza del punto di minimo $x_0 = 2$ la funzione assume valore:

$$f(2) = 2 - \ln 4 \approx 0,61$$

è possibile disegnare un grafico qualitativo della funzione.



2. (4 punti) *Problema.* Considera due regioni (A e B) in un determinato sistema economico. Il reddito pro-capite annuo nella regione A è pari a 1.000 euro (ogni persona "guadagna" in media in un anno mille euro), mentre nella regione B è pari a 10.000 euro. Assumi che nella regione A il reddito pro-capite cresca ad un tasso annuale costante del 8% ($g_A = 0,08$), mentre nella regione B il reddito pro-capite aumenti ad un tasso annuale costante del 5% ($g_A = 0,05$). Fatte queste assunzioni è possibile che nel futuro il reddito pro-capite nella regione A superi quello della regione B? Se sì, dopo quanti anni questo accadrà?

Soluzione:

Sì, essendo il tasso di crescita nella regione A maggiore, nonostante il livello iniziale del reddito pro-capite in A sia inferiore, dopo un certo numero di periodi il reddito pro-capite in A sarà maggiore di quello in B.

Per determinare il numero di periodi (anni) t necessari è necessario risolvere la seguente disequazione esponenziale:

$$y_A(1+g_A)^t > y_B(1+g_B)^t$$

dove y_i (> 0) e g_i (> 0) sono il reddito pro-capite iniziale e il tasso di crescita nella regione i, con $i \in \{A, B\}$.

Applicando il logaritmo naturale ad entrambi i membri si ottiene:

$$\ln y_A + t\ln(1+g_A) > \ln y_B + t\ln(1+g_B)$$

da cui:

$$\begin{aligned} t \cdot \Big(\ln(1+g_A) - \ln(1+g_B)\Big) &> \ln y_B - \ln y_A \\ t \cdot \ln\frac{1+g_A}{1+g_B} &> \ln\frac{y_B}{y_A} \end{aligned}$$

Notando che, essendo per assunzione $g_A > g_B$, si ha $\ln\frac{1+g_A}{1+g_B} > 0$, per cui:

$$t > \frac{\ln\frac{y_B}{y_A}}{\ln\frac{1+g_A}{1+g_B}}$$

Sostituendo nella formula i dati del problema si ha:

$$t > \frac{\ln \frac{10000}{1000}}{\ln \frac{1+0{,}08}{1+0{,}05}} = \frac{\ln 10}{\ln \frac{1{,}08}{1{,}05}} \approx 81,74$$

Il reddito pro-capite della regione A supererà quello della regione B tra 82 anni.

3. *Problema.* Stai giocando a tombola e il "croupier" ha estratto 5 numeri dal bussolotto (che contiene le pedine numerate da 1 a 90). Ricordando che l'estrazione nel gioco della tombola avviene senza reinserimento, calcola:

   (a) (1 punto) il numero di possibili estrazioni di 5 numeri dai 90 numeri nel bussolotto, considerando diverse due estrazioni se e solo se contengono almeno un numero diverso, non rilevando quindi l'ordine con cui i numeri sono stati estratti.

   Soluzione:
   $$C_{90,5} = \binom{90}{5} = \frac{90!}{5!\,(90-5)!} = \frac{90 \times 89 \times 88 \times 87 \times 86}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 43\,949\,268$$

   (b) (2 punti) il numero delle possibili estrazioni di 5 numeri dai 90 numeri nelle quali il massimo dei 5 numeri estratti è il numero 50.

   Suggerimento: Se il massimo di questi 5 numeri è 50, vuol dire che uno di questi 5 numeri è 50 e i restanti numeri sono minori di 50.

   Soluzione:
   $$C_{49,4} = \binom{49}{4} = \frac{49!}{4!\,(49-4)!} = \frac{49 \times 48 \times 47 \times 46}{4 \times 3 \times 2} = 211\,876$$

   (c) (1 punto) la probabilità che il massimo di 5 numeri estratti dal bussolotto della tombola sia 50.

   Soluzione:
   $$\Pr = \frac{C_{49,4}}{C_{90,5}} = \binom{49}{4} \Big/ \binom{90}{5} = \frac{211\,876}{43\,949\,268} \approx 0,0048$$

   Tale probabilità è all'incirca 0,48%.

Esercizio/Problema:	1	2	3	Totale
Punti:	22	4	4	30
Punteggio:				