

# Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti\*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale  
Università degli Studi di Milano-Bicocca  
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

16 Giugno 2021

**Istruzioni:** L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.

Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce. Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale  $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$ :

$$f(x) = \sqrt{x^2} - \ln x^2$$

dove  $\ln$  è il logaritmo naturale.

- (a) (2 punti) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione  $f$ .
- (b) (3 punti) Indicando con  $A$  l'insieme di definizione di  $f$  individuato al punto precedente, determina: i) l'insieme dei *punti interni* di  $A$ ; ii) l'insieme dei *punti esterni* di  $A$ ; iii) l'insieme dei *punti di frontiera* di  $A$ ; iv) l'*insieme complementare* di  $A$ ; v) l'*insieme derivato* di  $A$ . Inoltre stabilisci se  $A$  è un insieme *aperto*, *chiuso* o né aperto né chiuso.
- (c) (2 punti) Identifica le eventuali simmetrie (funzione *pari* o *dispari*).
- (d) (2 punti) Sapendo che

$$\ln |x| < \frac{|x|}{2}$$

dove  $|x|$  è il valore assoluto di  $x$ , è una disequazione soddisfatta per ogni  $x \neq 0$  (è possibile mostrare questo risultato utilizzando il metodo grafico), determina il *segno della funzione*  $f$  ( $f(x) \geq 0$ ) nel campo di esistenza e le eventuali *intersezioni con gli assi*.

- (e) (2 punti) Determina gli eventuali *asintoti verticali*.
- (f) (2 punti) Calcola i limiti di  $f(x)$  per  $x \rightarrow +\infty$  e  $x \rightarrow -\infty$  e determina gli eventuali *asintoti orizzontali*.
- (g) (3 punti) Calcola la *derivata prima*  $f'(x)$  e determina i valori per cui  $f(x)$  è *crescente*/*decrescente* e gli eventuali *punti stazionari* studiando il segno di questa derivata.

---

\*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

- (h) (3 punti) Calcola la *derivata seconda*  $f''(x)$  e determina la *concavità/convessità* di  $f(x)$  e gli eventuali *punti di flesso*, studiando il segno di tale derivata.
- (i) (3 punti) Disegna il *grafico* della funzione  $f(x)$ .
2. (4 punti) *Problema.* Considera due regioni ( $A$  e  $B$ ) in un determinato sistema economico. Il reddito pro-capite annuo nella regione  $A$  è pari a 1.000 euro (ogni persona “guadagna” in media in un anno mille euro), mentre nella regione  $B$  è pari a 10.000 euro. Assumi che nella regione  $A$  il reddito pro-capite cresca ad un tasso annuale costante del 8% ( $g_A = 0,08$ ), mentre nella regione  $B$  il reddito pro-capite aumenti ad un tasso annuale costante del 5% ( $g_B = 0,05$ ). Fatte queste assunzioni è possibile che nel futuro il reddito pro-capite nella regione  $A$  superi quello della regione  $B$ ? Se sì, dopo quanti anni questo accadrà?
3. *Problema.* Stai giocando a tombola e il “croupier” ha estratto 5 numeri dal bussolotto (che contiene le pedine numerate da 1 a 90). Ricordando che l'estrazione nel gioco della tombola avviene senza reinserimento, calcola:
- (a) (1 punto) il numero di possibili estrazioni di 5 numeri dai 90 numeri nel bussolotto, considerando diverse due estrazioni se e solo se contengono almeno un numero diverso, non rilevando quindi l'ordine con cui i numeri sono stati estratti.
- (b) (2 punti) il numero delle possibili estrazioni di 5 numeri dai 90 numeri nelle quali il massimo dei 5 numeri estratti è il numero 50.
- Suggerimento:* Se il massimo di questi 5 numeri è 50, vuol dire che uno di questi 5 numeri è 50 e i restanti numeri sono minori di 50.
- (c) (1 punto) la probabilità che il massimo di 5 numeri estratti dal bussolotto della tombola sia 50.

| Esercizio/Problema: | 1  | 2 | 3 | Totale |
|---------------------|----|---|---|--------|
| Punti:              | 22 | 4 | 4 | 30     |
| Punteggio:          |    |   |   |        |