Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

7 Luglio 2021

Istruzioni: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce.
Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$:

$$f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2}$$

(a) (2 punti) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione f.

Soluzione:

La funzione è definita per ogni valore di x che non rende negativo (condizione di realtà) il radicando del radicale e che non rende nullo il denominatore.

Essendo il radicando del radicale x, si devono escludere i valori strettamente negativi di x.

Per quanto riguarda il denominatore, essendo questo x^2, occorre escludere lo 0.

Da questo segue che l'insieme di definizione è l'insieme dei numeri reali strettamente positivi: $x \in \mathcal{R}^+$.

(b) (2 punti) Indicando con A l'insieme di definizione di f individuato al punto precedente, determina: i) l'insieme dei *punti interni* di A; ii) l'insieme dei *punti esterni* di A; iii) l'insieme dei *punti di frontiera* di A; iv) l'*insieme complementare* di A; v) l'*insieme derivato* di A. Inoltre stabilisci se l'insieme complementare di A è un insieme *aperto*, *chiuso* o né aperto né chiuso.

Soluzione:

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

L'insieme dei punti interni di A coincide con A (e da questo segue che A è un insieme aperto):

$$\mathrm{Int}(A) = A = (0, +\infty)$$

L'insieme dei punti esterni di A è dato dai numeri reali strettamente negativi:

$$\mathrm{Ext}(A) = (-\infty, 0)$$

L'unico punto di frontiera è il punto 0, per cui l'insieme dei punti di frontiera di A è il singoletto:

$$\partial A = \{0\}$$

L'insieme complementare di A:

$$A^c = \mathcal{R} \setminus A = (-\infty, 0\,]$$

Questo è un insieme chiuso, essendo il complementare di un insieme aperto.
Poiché non ci sono punti isolati, l'insieme derivato di A è dato dall'unione di A con la sua frontiera:

$$A' = A \cup \partial A = [\,0, +\infty)$$

(c) (2 punti) Identifica le eventuali simmetrie (funzione *pari* o *dispari*).

Soluzione:
Poiché il dominio di f non è simmetrico rispetto all'origine, la funzione non è né pari né dispari.

(d) (3 punti) Determina il *segno della funzione* f ($f(x) \geq 0$) nel campo di esistenza e le eventuali *intersezioni con gli assi.*

Soluzione:
Non essendo la funzione definita per $x = 0$, il suo grafico non interseca l'asse delle ordinate.
Per studiare il segno consideriamo la corrispondente disequazione irrazionale fratta:

$$\frac{\sqrt{x} - 1}{x^2} \geq 0$$

Il denominatore è sempre positivo nel campo di esistenza di f, per cui il segno sarà deciso dal numeratore:

$$\begin{aligned} \sqrt{x} - 1 &\geq 0 \\ x &\geq 1 \end{aligned}$$

Il grafico della funzione pertanto interseca l'asse delle ascisse nel punto $x = 1$. Alla destra di quel punto riposa nel primo quadrante del piano cartesiano, mentre per valori di x compresi tra 0 ed 1, estremi esclusi, riposa nel quarto quadrante.

(e) (2 punti) Determina gli eventuali *asintoti verticali.*

Soluzione:
L'asintoto verticale (destro) è la retta di equazione $x = 0$, poiché si ha:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2} = -\frac{1}{0^+} = -\infty$$

(f) (2 punti) Calcola i limiti di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ e determina gli eventuali *asintoti orizzontali.*

Soluzione:
Il limite per $x \to -\infty$ non esiste, poiché la funzione non è definita per numeri negativi.
Il limite per $x \to +\infty$ invece esiste ed è finito:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2} = 0^+$$

per la gerarchia degli ordini di infinito.
La funzione pertanto presenta un asintoto orizzontale destro, che coincide con l'asse delle ascisse.

(g) (3 punti) Calcola la *derivata prima* $f'(x)$ e determina i valori per cui $f(x)$ è *crescente/decrescente* e gli eventuali *punti stazionari* studiando il segno di questa derivata.

Soluzione:
Applicando la regola della derivata di un rapporto si ha:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2} = \frac{\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x}\right) x^2 - (\sqrt{x} - 1) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} x^2}{x^4} \\ &= \frac{\frac{x}{2\sqrt{x}} - 2\sqrt{x} + 2}{x^3} = \frac{\sqrt{x} - 4\sqrt{x} + 4}{2x^3} = \frac{4 - 3\sqrt{x}}{2x^3} \end{aligned}$$

Nel campo di esistenza di f il denominatore è sempre positivo, per cui il segno è deciso dal numeratore. Studiando il segno del numeratore si ha:

$$\begin{aligned} 4 - 3\sqrt{x} &\geq 0 \\ \sqrt{x} &\leq \frac{4}{3} \\ 0 < x &\leq \frac{16}{9} \end{aligned}$$

La funzione f è quindi strettamente crescente nell'intervallo $(0, 16/9)$ e strettamente decrescente nell'intervallo $(16/9, +\infty)$ e il punto $x_0 = 16/9 \approx 1,78$ è un punto stazionario che è anche un punto di massimo relativo.

(h) (3 punti) Calcola la *derivata seconda* $f''(x)$ e determina la *concavità/convessità* di $f(x)$ e gli eventuali *punti di flesso*, studiando il segno di tale derivata.

Soluzione:
Derivando la derivata prima si ottiene:

$$\begin{aligned} f''(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{4-3\sqrt{x}}{2x^3} &= \frac{-3\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}x}\cdot 2x^3-(4-3\sqrt{x})\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2x^3}{4x^6} \\ &= \frac{-3\frac{x^3}{\sqrt{x}}-(4-3\sqrt{x})\,6x^2}{4x^6} = \frac{-3\frac{x}{\sqrt{x}}-24+18\sqrt{x}}{4x^4} \\ &= \frac{-3\sqrt{x}-24+18\sqrt{x}}{4x^4} = \frac{15\sqrt{x}-24}{4x^4} \end{aligned}$$

Nel campo di esistenza di f il denominatore è sempre positivo, per cui il segno è deciso dal numeratore. Studiando il segno del numeratore si ha:

$$\begin{aligned} 15\sqrt{x}-24 &\geq 0 \\ \sqrt{x} &\geq \frac{8}{5} \\ x &\geq \frac{64}{25} \end{aligned}$$

La funzione f è quindi strettamente concava nell'intervallo $(0, 64/25)$, strettamente convessa nell'intervallo $(64/25, +\infty)$ e il punto $x_1 = 64/25 = 2,56$ è un punto di flesso a tangente obliqua.

(i) (3 punti) Disegna il *grafico* della funzione $f(x)$.

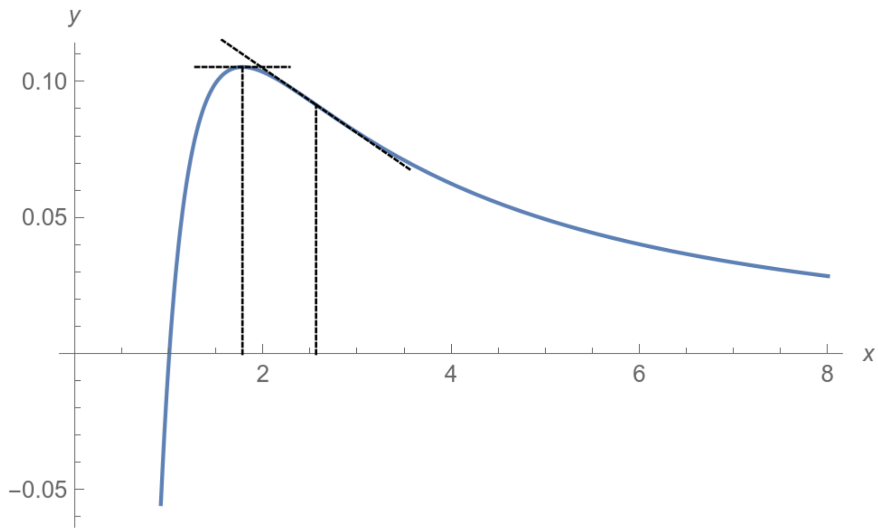
Soluzione:
Mettendo insieme le informazioni ottenute nei punti precedenti, e notando altresì che in corrispondenza del punto di massimo $x_0 = 16/9$ la funzione assume valore:

$$f\left(\frac{16}{9}\right) = \frac{27}{256} \approx 0,105$$

mentre nel punto di flesso $x_1 = 64/25$ la funzione assume valore:

$$f\left(\frac{64}{25}\right) = \frac{375}{4096} \approx 0,091$$

è possibile disegnare un grafico qualitativo della funzione.



Nota: la pendenza della funzione nel punto di flesso può essere calcolata guardando al valore che la derivata prima assume nel punto di flesso: $f'(64/25) \approx -0.024$.

2. (3 punti) *Problema.* In alcuni Paesi gli uffici statistici, quando riportano i tassi di variazione mensili o trimestrali di una determinata variabile (es., gli occupati, il livello dei prezzi, il PIL, ecc.), "annualizzano" il dato. Nel processo di annualizzazione i tassi di variazione vengono modificati per riflettere il livello che la variabile avrebbe se variasse in ogni periodo dello stesso tasso nel corso dell'anno.

   Se ad esempio i prezzi nel primo trimestre dell'anno nel Paese sono aumentati del 3,5%, qual è il corrispondente tasso annualizzato?

   Suggerimento: Per calcolarlo devi: i) considerare che in un anno ci sono quattro trimestri; ii) calcolare il livello finale che la variabile avrebbe se variasse ogni trimestre allo stesso tasso; iii) calcolare la variazione percentuale che questo produrrebbe.

Soluzione:

Assumendo una variazione percentuale costante in ogni trimestre pari al 3,5% e indicando con p_0 il livello dei prezzi all'inizio dell'anno, alla fine dell'anno il livello sarà pari a:

$$p_1 = p_0 \left(1 + \frac{3,5}{100}\right)^4 = 1,035^4 \cdot p_0$$

La variazione percentuale generata (corrispondente al dato trimestrale annualizzato) sarà dunque:

$$g = \frac{p_1 - p_0}{p_0} \times 100 = \frac{1,035^4 \cdot p_0 - p_0}{p_0} \times 100 = (1,035^4 - 1) \times 100 \approx 14,75$$

3. *Problema.* In un'urna ci sono 50 palline numerate da 1 a 50 e tu hai estratto (senza reinserimento) 5 palline. Due estrazioni sono diverse se e solo se contengono almeno un numero diverso. Sapendo questo, calcola:

(a) (1 punto) il numero di possibili estrazioni.

Soluzione:

$$C_{50,5} = \binom{50}{5} = \frac{50!}{5!\,(50-5)!} = \frac{50 \times 49 \times 48 \times 47 \times 46}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 2\,118\,760$$

(b) (3 punti) il numero delle possibili estrazioni in cui 30 è il numero mediano, cioè il 30 compare nei cinque numeri estratti e, guardando ai restanti quattro numeri, due sono minori di 30 e due sono maggiori di 30.

Suggerimento: Rifletti su questo. Quanti sono i numeri minori di 30 nell'urna? Quante sono le possibili estrazioni di due di questi numeri? Quanti sono i numeri maggiori di 30 nell'urna? Quante sono le possibili estrazioni di due di questi numeri? Che cosa dice il principio del prodotto?

Soluzione:

Le possibili due estrazioni di numeri da 1 a 29 sono pari alle combinazioni semplici di 29 elementi di classe 2:

$$C_{29,2} = \binom{29}{2} = \frac{29!}{2!\,(29-2)!} = \frac{29 \times 28}{2} = 406$$

Le possibili due estrazioni di numeri da 31 a 50 (in tutto 20 numeri) sono pari alle combinazioni semplici di 20 elementi di classe 2:

$$C_{20,2} = \binom{20}{2} = \frac{20!}{2!\,(20-2)!} = \frac{20 \times 19}{2} = 190$$

Ricordando il principio del prodotto, si ha che le possibili estrazioni in cui 30 è la mediana sono pari a:

$$C_{29,2} \times C_{20,2} = 406 \times 190 = 77\,140$$

(c) (1 punto) la probabilità che, ordinando i numeri estratti in senso crescente, il terzo numero risulti essere il 30.

Soluzione:

Per conoscere tale probabilità è sufficiente calcolare il rapporto tra casi favorevoli, calcolati al punto (b), e casi possibili, calcolati al punto (a):

$$\Pr = \frac{C_{29,2} \times C_{20,2}}{C_{50,5}} = \frac{\binom{29}{2} \times \binom{20}{2}}{\binom{50}{5}} = \frac{77\,140}{2\,118\,760} \approx 0,0364$$

Espressa in termini percentuali, la probabilità è pertanto pari al 3,64%.

Esercizio/Problema:	1	2	3	Totale
Punti:	22	3	5	30
Punteggio:				