Matematica – Esame

Giuseppe Vittucci Marzetti*

Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale
Università degli Studi di Milano-Bicocca
Corso di Laurea in Scienze dell'Organizzazione

20 Settembre 2021

> **Istruzioni**: L'esame dura 90 minuti. Scrivi in modo leggibile e conciso.
> Indica chiaramente all'inizio di ciascuna risposta la domanda/sezione a cui la risposta si riferisce.
> Ogni parte assegna da 0 (nessuna risposta o risposta completamente errata) ad un massimo di punti indicato a lato di ciascuna (risposta esatta e concisa) per un totale di max 30 punti.
> Puoi utilizzare solo i fogli protocollo consegnati durante lo svolgimento della prova. Al termine della prova devi riconsegnare tutti e solo i fogli ricevuti.
> Immediatamente dopo la consegna, su ciascun foglio protocollo scrivi in modo chiaro e leggibile a penna indelebile il tuo nome, cognome e numero di matricola. *I fogli recanti una qualsiasi correzione o cancellazione nei dati identificativi dello studente non verranno valutati a meno di non richiederne l'immediata sostituzione.*

1. *Esercizio.* Sia data la seguente funzione reale di variabile reale $f : \mathcal{R} \mapsto \mathcal{R}$:

$$f(x) = \sqrt{x} - \ln x$$

dove ln è il logaritmo naturale (base e).

(a) (2 punti) Determina l'*insieme di definizione* (o *campo di esistenza*) della funzione f.

> **Soluzione:**
> La funzione è definita per ogni valore di x che non rende negativo il radicando del radicale (condizione di realtà) e che rende positivo l'argomento del logaritmo.
> Essendo il radicando del radicale x, si devono escludere i valori strettamente negativi di x. Per quanto riguarda l'argomento del logaritmo, essendo questo x, occorre escludere i valori non strettamente positivi.
> Da questo segue che l'insieme di definizione è l'insieme dei numeri reali strettamente positivi: $x \in \mathcal{R}^+$.

(b) (1 punto) Identifica le eventuali simmetrie (funzione *pari* o *dispari*).

*Dipartimento di Sociologia e Ricerca Sociale, Università degli Studi di Milano-Bicocca, Via Bicocca degli Arcimboldi 8, Milano, MI 20126, Italy, E-mail: giuseppe.vittucci@unimib.it

Soluzione:
Poiché il dominio di f non è simmetrico rispetto all'origine, la funzione non è né pari né dispari.

(c) (3 punti) Utilizzando il metodo grafico determina il *segno della funzione* f ($f(x) \geq 0$) nel campo di esistenza e le eventuali *intersezioni con gli assi*.
Suggerimento: Nota che f è la semplice differenza delle funzioni elementari $\sqrt{x}$ e $\ln x$. Disegna il grafico delle due funzioni e rifletti sul fatto che: i) le due funzioni sono due funzioni continue strettamente crescenti nel relativo campo di esistenza; ii) per x che tende a $+\infty$ le due funzioni sono infinite, ma l'ordine di infinito della prima è maggiore di quello della seconda.

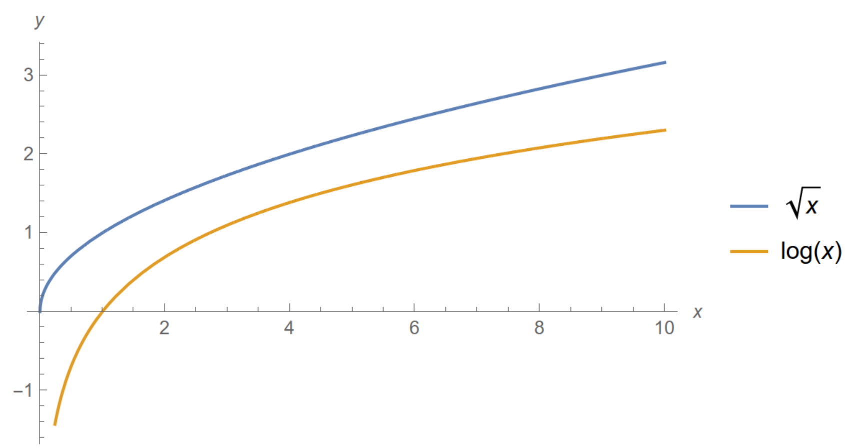
Soluzione:
Non essendo la funzione f definita per $x = 0$, il suo grafico non interseca l'asse delle ordinate.
Per studiare il segno di f consideriamo la corrispondente disequazione irrazionale logaritmica:

$$\ln x \leq \sqrt{x}$$

Possiamo disegnare il grafico delle funzioni elementari $\ln x$ e $\sqrt{x}$. Per $x = 1$ si ha:

$$\ln x = 0 < 1 = \sqrt{x}$$

e il grafico della funzione logaritmica riposa al di sotto di quello della funzione $\sqrt{x}$, non intersecando mai questo, poiché $\sqrt{x}$ "diverge più velocemente" della funzione logaritmica (è infinita di ordine superiore rispetto a questa).



Per cui la disequazione:

$$\ln x < \sqrt{x}$$

è sempre soddisfatta e il grafico della funzione f riposa nel primo quadrante del piano cartesiano e non interseca l'asse delle ascisse.

(d) (2 punti) Determina gli eventuali *asintoti verticali*.

Soluzione:
L'asintoto verticale (destro) è la retta di equazione $x = 0$, poiché si ha:

$$\lim_{x\to 0^+}(\sqrt{x} - \ln x) = \lim_{x\to 0^+}\sqrt{x} - \lim_{x\to 0^+}\ln x = 0 - (-\infty) = +\infty$$

(e) (2 punti) Calcola i limiti di $f(x)$ per $x \to +\infty$ e $x \to -\infty$ e determina gli eventuali *asintoti orizzontali*.

Soluzione:
Il limite per $x \to -\infty$ non esiste, poiché f non è definita per numeri negativi.
Il limite per $x \to +\infty$ di f invece esiste ed è infinito:

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x} - \ln x) = \left(\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\right)\cdot\lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = +\infty\cdot 1 = +\infty$$

per la gerarchia degli ordini di infinito. f pertanto non presenta asintoti orizzontali.

(f) (3 punti) Calcola la *derivata prima* $f'(x)$ e determina i valori per cui $f(x)$ è *crescente/decrescente* e gli eventuali *punti stazionari* studiando il segno di questa derivata.

Soluzione:
Applicando la regola della derivata di una differenza si ha:

$$f'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{x} - \ln x\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\ln x = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\sqrt{x}-2}{2x}$$

Nel campo di esistenza di f il denominatore è sempre positivo, per cui il segno è deciso dal numeratore. Studiando il segno del numeratore si ha:

$$\begin{aligned}\sqrt{x} - 2 &\geq 0\\ \sqrt{x} &\geq 2\\ x &\geq 4\end{aligned}$$

La funzione f è quindi strettamente decrescente nell'intervallo $(0, 4)$, strettamente crescente nell'intervallo $(4, +\infty)$ e il punto $x_0 = 4$ è un punto stazionario che è anche un punto di minimo relativo.

(g) (3 punti) Calcola la *derivata seconda* $f''(x)$ e determina la *concavità/convessità* di $f(x)$ e gli eventuali *punti di flesso*, studiando il segno di tale derivata.

Soluzione:
Derivando due volte la funzione si ottiene:

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\sqrt{x}-2}{2x} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot 2x - 2(\sqrt{x}-2)}{4x^2} = \frac{\sqrt{x} - 2\sqrt{x} + 4}{4x^2} = \frac{4-\sqrt{x}}{4x^2}$$

Nel campo di esistenza di f il denominatore è sempre positivo, per cui il segno è deciso dal numeratore. Studiando il segno del numeratore si ha:

$$\begin{aligned} 4-\sqrt{x} &\geq 0 \\ \sqrt{x} &\leq 4 \\ 0 < x &\leq 16 \end{aligned}$$

La funzione f è quindi strettamente convessa nell'intervallo $(0, 16)$, strettamente concava nell'intervallo $(16, +\infty)$ e il punto $x_1 = 16$ è un punto di flesso.
In particolare x_1 è un punto di flesso a tangente obliqua, poiché il coefficiente angolare della retta tangente alla funzione nel punto ha valore:

$$f'(16) = \frac{\sqrt{16}-2}{2 \cdot 16} = \frac{1}{16}$$

(h) (3 punti) Disegna il *grafico* della funzione $f(x)$.

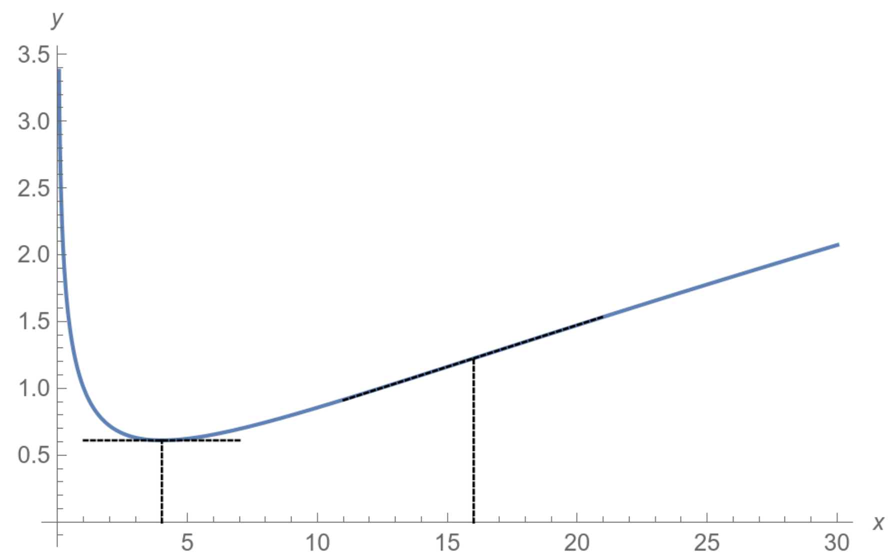
Soluzione:
Mettendo insieme le informazioni ottenute nei punti precedenti, e notando altresì che nel punto di minimo $x_0 = 4$ la funzione assume valore:

$$f(4) = \sqrt{4} - \ln 4 = 2(1 - \ln 2) \approx 0.61,$$

mentre nel punto di flesso $x_1 = 16$ la funzione assume valore:

$$f(16) = \sqrt{16} - \ln 16 = 4(1 - \ln 2) \approx 1.23$$

è possibile disegnare un grafico qualitativo della funzione.



2. *Problema.* In un locale servono i seguenti tipi di insalata:

A. insalata, pomodorini, mozzarella;
B. insalata, pomodorini, mozzarella, carciofini;
C. insalata, rucola, pomodori secchi, olive, origano, mozzarella;
D. insalata, rucola, fontina, funghi, noci;
E. insalata, pomodorini, fontina, maionese.

Ognuna di queste può essere considerata un insieme di ingredienti.

(a) (2 punti) Se lavori come cameriere in quel locale e un cliente ti chiede di servirgli:

$$(B \cup C) \cap A \setminus E \setminus D$$

che cosa servi al cliente?

Soluzione:
Una semplice mozzarella, poiché si ha:

$$(B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A) = A$$

Inoltre si ha:

$$A \setminus E \setminus D = \{\text{mozzarella}\} \setminus D = \{\text{mozzarella}\}$$

(b) (1 punto) Determina la cardinalità dell'unione degli insiemi:

$$|A \cup B \cup C \cup D \cup E|$$

Soluzione:
L'unione dei cinque insiemi dà luogo al seguente insieme:

$$\{\text{insalata, pomodorini, mozzarella, carciofini, rucola, pomodori secchi, olive, origano, fontina, funghi, noci, maionese}\}$$

che ha cardinalità pari a 12.

(c) (2 punti) Se in aggiunta all'ingrediente caratterizzante, l'insalata stessa, che deve necessariamente essere presente, è possibile scegliere a piacere tra gli ingredienti presenti nel menù (anche scegliendoli tutti o non scegliendone nessuno), quanti tipi diversi di insalata è possibile ordinare in questo locale?

Soluzione:
Poiché la cardinalità dell'unione degli insiemi è 12, escludendo l'insalata sono presenti nel menù 11 ingredienti diversi:

$$I = \{\text{pomodorini, mozzarella, carciofini, rucola, pomodori secchi, olive, origano, fontina, funghi, noci, maionese}\}$$

Per determinare il numero di insalate diverse è sufficiente calcolare la cardinalità dell'insieme delle parti (o insieme potenza) di questo insieme, cioè l'insieme di tutti i sottoinsiemi (propri e impropri) dell'insieme I, che è data da:

$$P(I) = \sum_{i=0}^{11} C_{11,i} = 2^{11} = 2048$$

dove $C_{11,i}$ sono le combinazioni semplici di 11 oggetti di classe i (con $i = 0, 1, \dots 11$).

(d) (1 punto) Alla luce di quanto sopra, sapendo che un tuo amico ha ordinato nel locale un'insalata, qual è la probabilità di indovinare l'insalata ordinata dal tuo amico al primo tentativo?

Soluzione:
Questa è semplicemente pari a $1/2048$ ovvero lo $0,05\%$ circa.

(e) (2 punti) Come cambia la risposta al punto (d) se sai che il tuo amico odia tutti i formaggi, compresi quelli freschi?

Soluzione:
In questo caso gli ingredienti a disposizione diventano 9. Infatti, sottraendo ad I l'insieme F di tutti formaggi si ottiene:

$$I \setminus F = \{\text{pomodorini, carciofini, rucola, pomodori secchi, olive, origano, funghi, noci, maionese}\}$$

Le insalate ordinabili sono:

$$P(I \setminus F) = 2^9 = 512$$

e la probabilità di indovinare l'insalata al primo tentativo è pari a $1/512$ ovvero lo $0,195\%$ circa.

3. (3 punti) *Problema.* In un paese il rapporto tra vaccinati e non vaccinati è pari a 7 (ci sono sette persone vaccinate per ogni persona non vaccinata). Dato che ogni persona può trovarsi solo in una delle due condizioni, conoscendo questo rapporto è possibile calcolare la percentuale di vaccinati sul totale delle persone residenti nel paese? Se sì, qual è questa percentuale?

Soluzione:
Sì, è possibile. Indicando con p_v il numero delle persone vaccinate e con p il numero totale delle persone residenti, vaccinate e non, il rapporto tra vaccinati e non vaccinati, r, è dato da:

$$\frac{p_v}{p - p_v} = r = 7$$

È possibile manipolare l'espressione precedente per ottenere la percentuale di vaccinati sul totale: $100\, p_v/p$.

$$\begin{aligned}
\frac{p_v}{p-p_v} &= r \\
p_v &= r\,(p-p_v) \\
(1+r)p_v &= r\,p \\
\frac{p_v}{p} &= \frac{r}{1+r} \\
100\cdot\frac{p_v}{p} &= 100\cdot\frac{r}{1+r} = 100\cdot\frac{7}{1+7} = 87,5
\end{aligned}$$

Nel paese è vaccinato l'87,5% dei residenti.

Esercizio/Problema:	1	2	3	Totale
Punti:	19	8	3	30
Punteggio:				