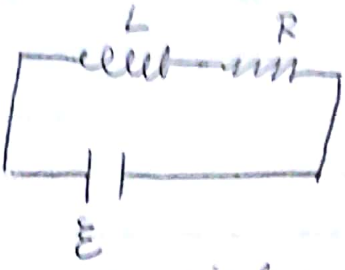
Soluzione seconda prova scritta 19/2/18

1) l'equazione differenziale del circuito



$$\mathcal{E} = L\frac{di}{dt} + Ri(t)$$

che esprime la conservazione dell'energia.

Si può risolvere per separazione di variabili

$$\mathcal{E} - Ri(t) = L\frac{di}{dt}; \quad \frac{di}{\mathcal{E}-Ri} = \frac{dt}{L}$$

$$-\int_0^{i(t)} \frac{di}{-\frac{\mathcal{E}}{R}+i} = \int_0^t \frac{R}{L}\,dt$$

Detto $\tau = \frac{L}{R}$ il tempo caratteristico del circuito

$$\tau \simeq 1\,\mu s$$

$$\ln\left(i - \frac{\mathcal{E}}{R}\right)\Big|_0^{i(t)} = -t/\tau$$

$$i - \mathcal{E}/R = -\frac{\mathcal{E}}{R}e^{-t/\tau}; \quad i(t) = \frac{\mathcal{E}}{R}\left(1-e^{-t/\tau}\right)$$

La corrente massima si ottiene per $t \to +\infty$ ed è pari a $i_{max} = \mathcal{E}/R$

a) $i(t^*) = 0{,}9\, i_{max}$ se

$$0.9\cdot\cancel{\frac{\mathcal{E}}{R}} = \cancel{\frac{\mathcal{E}}{R}}\left(1-e^{-t^*/\tau}\right)$$

$$e^{-t^*/\tau} = 0.1; \quad t^* = -\tau\ln(0{,}1) \simeq 2{,}3\cdot\tau$$

$$\simeq 2.3\,\mu s$$

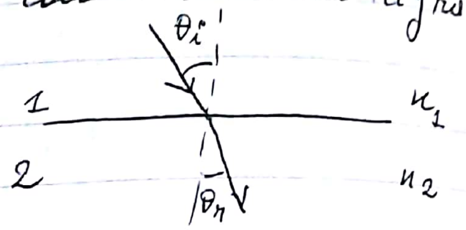
b) l'energia è $W = \frac{1}{2}Li_{max}^2 = \frac{1}{2}L\frac{\mathcal{E}^2}{R^2}$

$$\simeq 5\cdot10^{-8}\,J$$

2) La legge di Snell della rifrazione mette in relazione l'angolo di incidenza con l'angolo di rifrazione quando ~~la luce~~ un raggio di luce passa da un mezzo con indice di rifrazione n_1 ad un altro con indice di rifrazione n_2.

In formule:

$$\frac{\operatorname{sen}\theta_i}{\operatorname{sen}\theta_r} = \frac{n_2}{n_1}$$



θ_i è l'angolo di incidenza, formato tra il raggio incidente e la normale alla superficie di separazione tra i mezzi 1 e 2

θ_r è l'angolo di rifrazione, formato tra il raggio rifratto e la normale alla superficie di separazione tra i mezzi 1 e 2

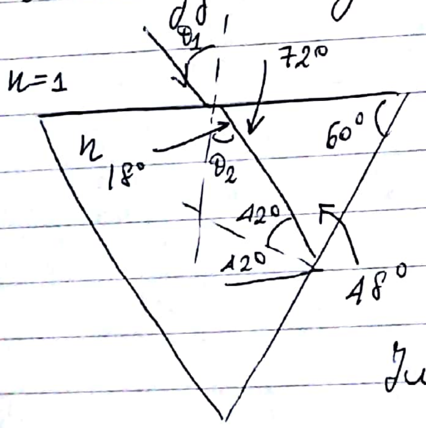
Se $n_2 < n_1$ si osserva che $\theta_r > \theta_i$.

In particolare θ_r può assumere il massimo valore $\theta_r = 90°$ a cui corrisponde l'angolo d'incidenza critico $\theta_i = \theta_c$

$$\operatorname{sen}\theta_c = \frac{n_2}{n_1}$$

Se $\theta_i > \theta_c$ <u>non</u> si osserva alcun raggio rifratto, ma soltanto un raggio riflesso (fenomeno della riflessione totale)

Rispetto al quesito:



$$\frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2} = n$$

Sulla base della geometria $\theta_2 = 18°$

Inoltre: $\operatorname{sen}(42°) = \frac{1}{n} \Rightarrow n = \frac{1}{\operatorname{sen}(42°)}$

Segue: $\operatorname{sen}\theta_1 = n \cdot \operatorname{sen}\theta_2 = \frac{\operatorname{sen}(18°)}{\operatorname{sen}(42°)} \simeq 0.462$ $\quad \theta_1 \simeq 27.5°$

3) Un corpo nero all'equilibrio termodinamico è un oggetto in grado di assorbire completamente tutta la radiazione che incide su di esso. Poiché è all'equilibrio, esso dovrà emettere tutta la potenza che incide su di esso.
Sperimentalmente, un corpo nero si può approssimare realizzando una piccola cavità in un materiale incandescente. La radiazione che incide sulla cavità ha probabilità pressoché nulla di sfuggire prima di essere assorbita dal corpo stesso.
Lo spettro della radiazione emessa dalla cavità approssima quindi quello di un corpo nero.
Il principale insuccesso teorico della fisica classica rispetto allo spettro della radiazione emessa da un corpo nero consiste nel prevedere che lo spettro d'emissione dovesse divergere per lunghezze d'onda piccole ("catastrofe ultravioletto") e che, inoltre, il corpo nero dovesse emettere una energia per unità di tempo infinita, chiaramente in contrasto con il principio di conservazione dell'energia.
La legge sperimentale di Stefan mostra, invece, che l'intensità I della radiazione emessa da un corpo nero alla temperatura T è finita e pari a:

$$I = \sigma T^4$$

dove $\sigma \simeq 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{W}{m^2 K^4}$ è la costante di Stefan.

Essa si può ricavare teoricamente dalla formula di Planck nel modo seguente.
Per definizione $I = \int_0^{+\infty} u(\lambda)\, d\lambda$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{2\pi c^2 h}{\lambda^5} \frac{1}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda k_B T}\right) - 1}\, d\lambda$$

Facendo la sostituzione $\frac{hc}{\lambda k_B T} = x$; $\lambda = \frac{hc}{x k_B T}$

$$d\lambda = \frac{hc}{k_B T}\frac{dx}{x^2}$$

si ha

$$I = 2\pi \cancel{c^2}\cancel{h}\int_0^{+\infty}\frac{x^{3}(k_B T)^{4}}{h^{3}c^{2}}\frac{1}{\exp(x)-1}\cancel{\frac{hc}{k_B T}}\frac{dx}{\cancel{x^2}}$$

$$= \frac{2\pi(k_B T)^4}{h^3 c^2}\int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx \quad \text{Poiché} \int_0^{+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}dx = \frac{\pi^4}{15}$$

$$I = \frac{2\pi\,(k_B T)^4}{h^3 c^2}\frac{\pi^4}{15} = \sigma T^4 \quad \text{essendo}$$

$$\sigma = \frac{2\pi^5 k_B^4}{15 h^3 c^2}$$