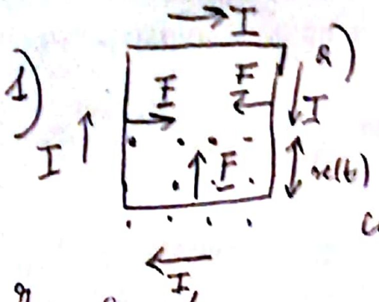
Soluzioni della seconda prova scritta del 24/1/18

1)



a) Per il teorema di Faraday

$$f.e.m. = -\frac{d\phi(\underline{B})}{dt}$$

con $\phi(\underline{B}) = \int_S \underline{B}\cdot d\underline{S}$

In questo caso $\underline{B} \parallel d\underline{S}$ e B è uniforme. Quindi

$$\phi(\underline{B}) = \int_S B\cdot dS = B\cdot S = B\cdot w\cdot x(t)$$

dove $x(t)$ è indicata in figura.

$$f.e.m. = -\frac{d\phi}{dt} = B\cdot w\cdot v(t)$$

Dalla legge di Ohm $f_{em} = RI \Rightarrow I(t) = \frac{B w v(t)}{R}$

I scorre come in figura

b) Su ciascun lato della spira agisce la forza

$\underline{F} = I\ \underline{L}\times\underline{B}$ (direzione e verso mostrati in figura)

Sui lati verticali $F = I\cdot x(t)\cdot B$

le due forze sono uguali e contrarie

Sul lato orizzontale $F = I\, w\cdot B = \frac{B^2 w^2 v(t)}{R}$

c) La spira è soggetta alla forza peso $\vec{P} = m\vec{g}$ e alla forza frenante

$$F = -\frac{B^2 w^2 v(t)}{R}$$

Quindi la spira accelera fino a che $\vec{F}$ non bilancia la forza peso $\vec{P}$. Quando ciò avviene si ha un moto uniforme ($\vec{v} = \vec{cost}$)

d) v_e si ottiene bilanciando $\vec{F}$ e $\vec{P}$, ovvero

$$\frac{B^2 w^2 v_e}{R} = mg \rightarrow v_e = \frac{mgR}{B^2 w^2} \simeq 9.8\ m/s$$

e) In questo caso $\vec{F} = \vec{0}$ perché $\phi(\underline{B})$ è costante. Quindi la spira prosegue con un moto di caduta libera sotto l'azione di $\vec{P} = m\vec{g}$

2) Il teorema di Ampere per la magnetostatica ha l'espressione

$$\oint_C \underline{B} \cdot d\underline{l} = \mu_0 I_{conc}$$

dove C è un qualunque circuito geometrico e I_{conc} è la corrente concatenata dal circuito. $d\underline{l}$ è un elemento infinitesimo lungo il circuito C. $\underline{B}$ è il campo magnetico. μ_0 la cost. di permeabilità del vuoto.
Considerando ad es. un condensatore durante il processo di carica e il circuito C in figura che lambisce le armature del condens., è possibile determinare I_{conc} attraverso le due superfici geometriche S_1 ed S_2 rappresentate (S_1 coincide con la sup. di un'armatura, S_2 è una sup. semisferica che poggia su C).

Si ha

$$I_{conc}(S_1) = I$$

ove I è la corrente (di conduzione) che scorre nel circuito

$$I_{conc}(S_2) = 0$$

Pertanto si può scrivere, equivalentemente

$$\oint_C \underline{B} \cdot d\underline{l} = \mu_0 I \quad e \quad \oint_C \underline{B} \cdot d\underline{l} = 0$$

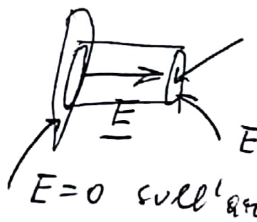
che è una contraddizione.
Il problema è risolto da Maxwell aggiungendo il termine $I_d = \varepsilon_0 \frac{d\phi(\underline{E})}{dt}$ (corrente di spostamento), ovvero

$$\oint_C \underline{B} \cdot d\underline{l} = \mu_0 I_{conc} + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{d\phi(\underline{E})}{dt}$$

Per un condensatore piano ideale $E = \sigma/\varepsilon_0$
(ε_0 è la cost. dielettrica del vuoto)

Scegliendo come superficie per il calcolo del flusso $\phi(\underline{E})$ un cilindro, si ha

$$\phi(\underline{E}) = \int_S \underline{E}\cdot d\underline{s} = E\cdot A = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}A$$



$\underline{E} \parallel d\underline{s}$

e $\phi(\underline{E})$ attraverso la sup. laterale $= 0$

Segue che $$I_d = \varepsilon_0 \frac{d}{dt}\left(\frac{\sigma A}{\varepsilon_0}\right) = A\frac{d\sigma}{dt}$$

Poiché $Q = \sigma\cdot A$ (carica su armature) e $I = \frac{dQ}{dt}$ (corrente di conduzione), si ha $$I_d = \frac{d}{dt}(\sigma A) = \frac{dQ}{dt} = I$$

3) La sorgente di luce invia raggi luminosi sullo specchio semiriflettente. Ciascun raggio si divide in 2 e segue 2 percorsi: lungo L_2 e lungo L_1. Quindi i due raggi si riuniscono e sono osservati dal telescopio. Sul telescopio si osserva la figura di interferenza prodotta dai 2 raggi per via del fatto di avere compiuto 2 cammini geometrici differenti (lungo L_2 ed L_1, in generale non di uguale lunghezza).

Se si osserva un massimo di interferenza, la differenza di fase $\Delta\phi$ tra i raggi che hanno percorso i cammini lungo L_1 ed L_2 deve essere multiplo di 2π ovvero $\Delta\phi = 2\pi m$ con $m \in \mathbb{Z}$.

Se indichiamo con $d = 2(L_1 - L_2)$ la differenza di cammino geometrico tra i 2 raggi, allora

$$\frac{4\pi}{\lambda}(L_2 - L_1) = 2\pi m$$ dove λ è la lunghezza d'onda in vuoto della luce.

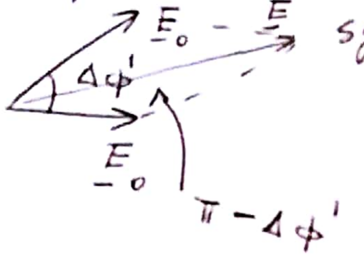
Quando il braccio L_1 è riempito di acqua, lo sfasamento diviene invece

$$\Delta\phi' = \frac{2\pi}{\lambda}\cdot 2L_2 - \frac{2\pi}{\lambda n}\cdot 2L_1$$

$$= \frac{4\pi}{\lambda}(L_2 - nL_1) \quad \text{poiché } \lambda_n = \lambda/n$$

$$= \frac{4\pi}{\lambda}(L_2 - L_1) + \frac{4\pi}{\lambda}L_1(1-n) = 2\pi m + \frac{4\pi}{\lambda}L_1(1-n)$$

Sul telescopio si sommano quindi i campi elettrici in figura, sfasati di $\Delta\phi'$.



Il campo elettrico risultante è (th del coseno)

$$E^2 = E_0^2 + E_0^2 - 2E_0^2 \cos(\pi - \Delta\phi') =$$

$$= 2E_0^2(1 + \cos\Delta\phi')$$

$$= 2E_0^2\left(1 + \cos\left(2\pi m + \frac{4\pi}{\lambda}L_1(1-n)\right)\right) =$$

$$= 2E_0^2\left(1 + \cos(2\pi m)\cdot\cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}L_1(1-n)\right) - \cancel{\operatorname{sen}(2\pi m)\operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{\lambda}L_1(1-n)\right)}\right)$$

$$= 2E_0^2\left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}L_1(1-n)\right)\right)$$

Poiché $I_0 \propto E_0^2$ si ha che l'intensità diviene

$$I = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{4\pi}{\lambda}L_1(1-n)\right)\right)$$