Soluzione prima prova scritta 19/2/18

1) Applichiamo il teorema di Gauss

$$\int_S \underline{E} \cdot d\underline{S} = \frac{q^{int}}{\varepsilon_0}$$

q^{int} è la carica racchiusa da S

dove S è una superficie sferica di raggio r e centrata nel centro geometrico del sistema.

Poiché $\underline{E}$ è radiale $\underline{E} \cdot d\underline{S} = E(r) \cdot dS$

a) se $r < a$: $\int_S \underline{E} \cdot d\underline{S} = 0$ poiché $q^{int} = 0 \Rightarrow E = 0$

b) se $a < r < b$: $\int_S \underline{E} \cdot d\underline{S} = E \cdot 4\pi r^2$

$$q^{int} = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi (r^3 - a^3)$$

Quindi:

$$E \cancel{4\pi} r^2 = \frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi}\rho \frac{(r^3-a^3)}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{(r^3-a^3)}{r^2}$$

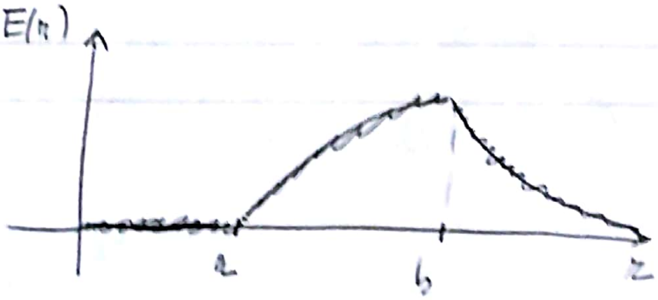
c) $E(r = 15 cm) = \frac{10^{-6}}{3 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}} \cdot \frac{\left((0.15)^3 - (0.1)^3\right)}{(0.15)^3} \simeq 2.65 \cdot 10^4 \; N/C$

d) se $r > b$: di nuovo $\int_S \underline{E} \cdot d\underline{S} = E 4\pi r^2$

$$q^{int} = \rho \frac{4}{3}\pi (b^3 - a^3) \Rightarrow \cancel{4\pi} r^2 E = \frac{\cancel{4}}{3}\cancel{\pi}\rho \frac{(b^3-a^3)}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{(b^3-a^3)}{r^2}$$

e)



2) a) La particella è soggetta alla forza di Lorentz

$$\underline{F} = q(\underline{v} \times \underline{B})$$
$$= q(\underline{v}_\perp \times \underline{B}) \qquad \frac{m\,dv_\parallel}{dt} = 0$$

$\underline{F}$ non ha componenti lungo $\underline{B}$ $\Rightarrow$ $v_\parallel$ è costante $\Rightarrow$ moto rettilineo uniforme lungo $\underline{B}$

$\underline{F}$ è $\perp$ $\underline{v}_\perp$. F è una forza centripeta: moto circolare

$$\underline{F} \cdot \underline{v} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = 0 \Rightarrow v = cost \Rightarrow \text{moto circolare uniforme}$$

b) Per un moto circolare $F = m\omega^2 r$ e $v_\perp = \omega r$

Quindi

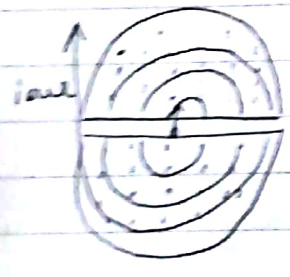
$$m\omega^2 \cancel{r} = q v_\perp B = q(\omega \cancel{r})B \Rightarrow \omega = \frac{qB}{m}$$

c) Da $v_\perp = \omega r$ e $\omega = \frac{qB}{m}$ si ha

$$v_\perp = \frac{qB}{m} r \Rightarrow r = \frac{m v_\perp}{qB}$$

Il fatto che il periodo $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi m}{qB}$ non dipende dalla velocità è usato nel ciclotrone.

In questo dispositivo, due regioni a forma di D e con campo magnetico uniforme e $\perp$ alle D sono affacciate.



Tra le due D si applica una differenza di potenziale oscillante e con periodo pari a $T = \frac{2\pi m}{qB}$

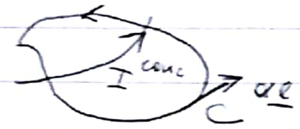
Uno ione che al tempo $t=0$ si trovi al centro della D è accelerato verso una delle due D. Qui, avendo velocità non nulla, compie un moto semicircolare uniforme. Quindi, dopo un tempo $\Delta t = T/2$,

~~la parti~~

lo ione riattraverso la regione tra le due D ed inoltre è ulteriormente accelerato dal campo elettrico. In attraversamenti successivi della regione tra le due D lo ione è continuamente accelerato fino a che la dimensione della sua orbita è confrontabile con la dimensione della D e quindi esce dal sistema.

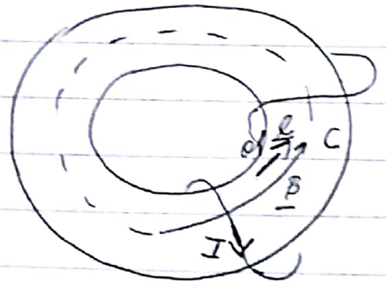
3) Teorema di Ampere:
la circuitazione del campo magnetico $\underline{B}$ lungo un arbitrario circuito geometrico C è pari al prodotto tra la costante di permeabilità magnetica del vuoto μ_0 e la corrente I^{conc} concatenata al circuito. In formule

$$\oint_C \underline{B} \cdot d\underline{l} = \mu_0 I^{conc}$$



dove $d\underline{l}$ è un elemento infinitesimo lungo il circuito C, orientato lungo il circuito. $\underline{B} \cdot d\underline{l}$ indica il prodotto scalare tra $\underline{B}$ e $d\underline{l}$
Unità di misura: B in Tesla I^{conc} in Ampere
μ_0 in $\frac{T \cdot m}{A}$

Per un toroide: per simmetria le linee di campo $\underline{B}$ sono disposte lungo circonferenze centrate nel centro geometrico del sistema.
Scegliendo come circuito C una circonferenza di raggio r, si ha:



$$\underline{B} \parallel d\underline{l} \Rightarrow \underline{B} \cdot d\underline{l} = B\,dl$$

$$\oint_C \underline{B} \cdot d\underline{l} = \oint_C B\,dl = B \oint_C dl = B\, 2\pi r$$

B uniforme lungo C per simm.

$I^{enc} = N \cdot I$ dove N è il # di bobina del toroide, ciascuna con corrente I.

Quindi

$$2\pi r B(r) = \mu_0 N I \Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NI}{r}$$