Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
25 settembre 2020

———————————————————————————————-

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

———————————————————————————————-

NOME E COGNOME:

———————————————————————————————-

1. (**8 punti**) Siano
$$S = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$
e
$$f(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2yz + 2z^2.$$

   a. (**4 punti**) Dimostrare che f è una forma quadratica definita positiva su $\mathbb{R}^3$;

   b. (**4 punti**) stabilire quindi il massimo e il minimo assoluti di f su S.

2. (**8 punti**) Si consideri

$$f_{n,\alpha}(x) = \frac{x^n}{n^\alpha(1+x^{2n})}.$$

a. (**3 punti**) Stabilire, al variare del parametro reale α, l'insieme E_α di convergenza semplice della serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,\alpha}(x);$$

b. (**3 punti**) stabilire per quali valori di α la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} f_{n,\alpha}(x)$ risulta uniforme su $E_\alpha \cap \mathbb{R}^+$;

c. (**2 punti**) per $\alpha = 0$, si calcoli

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_{n,0}(x)dx.$$

3. (**8 punti**) Siano

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \frac{1}{2x} \leq y \leq \frac{1}{x} \ ; y \leq 3x^2 \right\}$$

e

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y} e^{xy}$$

a. (**4 punti**) Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ $[f(x,y)]^\alpha$ risulta integrabile in D;

b. (**4 punti**) calcolare quindi

$$\int_D \frac{1}{f(x,y)} dx\, dy.$$

4. (**8 punti**) Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x^2y'' - \dfrac{7}{3}xy' + y = x^2 \\ y(1) = 0 \\ y'(1) = a \end{cases}$$

a. (**3 punti**) stabilirne per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ è garantita l'esistenza e l'unicità locale della soluzione y_a del problema e determinarla;

b. (**2 punti**) stabilire se esistono dei valori di a per cui y_a è definita su tutto $\mathbb{R}$ e in caso affermativo determinarli;

c. (**3 punti**) per i valori di a per i quali esiste almeno una soluzione definita su tutto $\mathbb{R}$ (punto precedente), si discuta l'unicità di tale soluzione determinando tutte le soluzioni possibili definite sempre su tutto $\mathbb{R}$.