Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
24 Settembre 2019

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Si consideri la successione di funzioni

$$f_n(x) = \frac{e^{nx}}{e^{nx} + (x-n)^2}.$$

a. **(2 punti)** Si studi la convergenza puntuale della successione.

se $x < 0$ $\quad f_n(x) \to 0$

$f_n(0) \to 0$

se $x > 0$ $\quad f_n(x) \sim \dfrac{e^{nx}}{e^{nx}} \to 1$

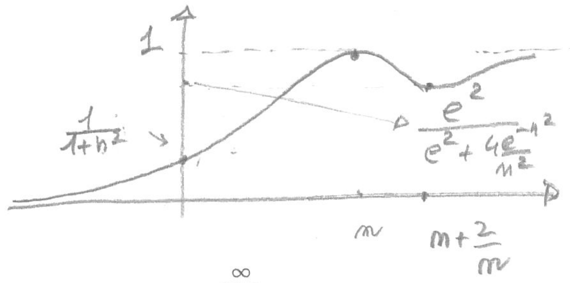
la funzione limite $f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

b. **(4 punti)** Si determinino gli insiemi $E \subset \mathbb{R}$ in cui la convergenza é uniformemente.

Siccome f è discontinua non c'è conv. uniforme su $\mathbb{R}$ né in qualunque insieme che contiene un intorno completo di 0.

$$f_n'(x) = \frac{(x-n)e^{nx}\left[n(x-n)-2\right]}{\left(e^{nx}+(x-n)^2\right)^2}$$

$f_n'(x) > 0 \iff x < n$ oppure $x > n + \frac{2}{n}$



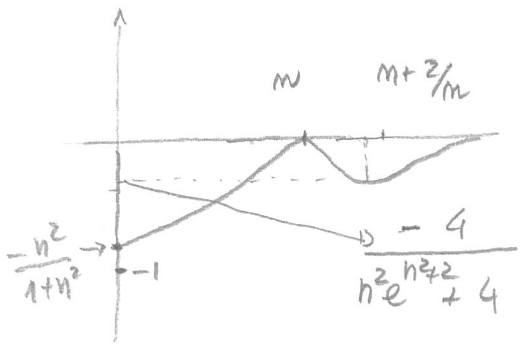
in ogni sottoinsieme di $(-\infty, 0]$ si ha convergenza uniforme

per $x \geq a$ $\quad \sup |f_n(x) - 1| = \max\left(\frac{4}{n^2 e^{n^2+2}+4}, f_n(a)\right)$

quindi si ha convergente uniforme in $[a, +\infty)$

c. **(2 punti)** Si studi la convergenza uniforme in $(-\infty, 0]$ della serie di funzioni $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$.

$f_n(x) - 1$ per $x > 0$



punto c:
per quanto detto nel punto b
$f_n(x) \leq \dfrac{1}{1+n^2}$ se $x \leq 0$ quindi

per Weierstrass la serie converge uniformemente in $(-\infty, 0]$

2. **(8 punti)** Si consideri la funzione $f(x,y) = (xy - x^2)e^{-x-y}$.

a. **(3 punti)** Si determinino gli eventuali massimi e minimi sia locali e che globali della f nel suo dominio.

• $\lim_{x\to-\infty} f(x,0) = \lim_{x\to-\infty} -x^2 e^{-x} = -\infty \Rightarrow \inf f = -\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x,2x) = \lim_{x\to-\infty} x^2 e^{-3x} = +\infty \Rightarrow \sup f = +\infty$

•• $\nabla f(x,y) = e^{-x-y}(x^2-xy-2x+y,\ x^2-xy+x) \Rightarrow \nabla f(x,y) = (0,0)$ $A=(0,0)$, $B=(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

$\text{Hess} f(x,y) = e^{-x-y}\begin{bmatrix} x^2-xy-4x+2y+2 & \\ x^2-xy-x+y-1 & x^2-xy+2x \end{bmatrix} \Rightarrow$ $\text{Hess} f(0,0) = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ NON definita

$\text{Hess} f(\frac{1}{2},\frac{3}{2}) = \frac{e^{-2}}{2}\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ definita negativa

A pto sella

B pto massimo locale

b. **(3 punti)** Si determinino gli eventuali massimi e minimi sia locali e che globali della f in

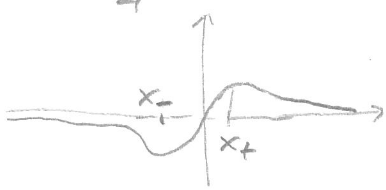
$$C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 2x^2 + x - y = 0\}.$$

$y = 2x^2+x$ $\forall x \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow g(x) = f(x, 2x^2+x) = 2x^3 e^{-2x^2-2x}$ $\qquad g(x)>0 \Leftrightarrow x>0$

$g'(x) = -2x^2 e^{-2x^2-2x}(4x^2+2x-3)$

$g'(x) > 0 \Leftrightarrow x_- = \frac{-1-\sqrt{13}}{4} < x < \frac{-1+\sqrt{13}}{4} = x_+$

$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$



x_+ Max assoluto per g

x_- Min assoluto per g

$\Rightarrow (x_+, 2x_+^2+x_+)$ Max assoluto per f in C

$(x_-, 2x_-^2+x_-)$ Min assoluto per f in C

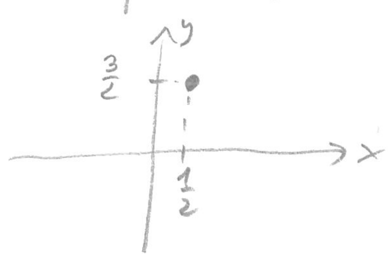
c. **(2 punti)** Si fornisca una rappresentazione locale della curva di livello della funzione f passante per il punto $(1/2, 3/2)$.

Il punto $B = (\frac{1}{2}, \frac{3}{2})$ è minimo relativo per f

Quindi in un intorno U_B del punto B si ha

$f(x,y) > f(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$ $\forall (x,y) \in U_B$ e

$\{(x,y)\in U_B :\ f(x,y) = f(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\} = \{(\frac{1}{2},\frac{3}{2})\}$ cioè la curva di livello è costituita da un solo punto (localmente)



3. **(8 punti)** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{2}{t}y + 4t^2\sqrt{y} \\ y(1) = y_0 \end{cases}$$

a. **(2 punti)** Al variare di $y_0 \in \mathbb{R}$ si discuta l'esistenza e l'unicitá della soluzione locale del problema di Cauchy.

• Ovviamente deve essere $y_0 \geq 0$ altrimenti $\sqrt{y}$ non ha senso.

•• se $y_0 > 0$, la soluzione $\exists!$ locale essendo $F(t,y) = \frac{2}{t}y + 4t^2\sqrt{t}$ localmente lipschitziana rispetto a y, in un intorno di $(1, y_0)$

••• se $y_0 = 0$ non possiamo garantire l'esistenza e l'unicità.

b. **(3 punti)** Per i valori di y_0 per cui esiste unica la soluzione locale, la si determini. Tali soluzioni posso essere estese a tutto $\mathbb{R}$?

• Se $y_0 > 0$. Poniamo $z = y^{\frac{1}{2}} \Rightarrow z' = \frac{1}{2}\frac{y'}{\sqrt{y}} \Rightarrow z' = \frac{z}{t} + 2t^2$

$\Rightarrow z(t) = e^{\int \frac{1}{t}dt}\left[\int 2t^2 e^{-\int \frac{1}{t}dt} dt + k\right] = t^3 + kt \quad \forall t > 0$

$\Rightarrow \sqrt{y(t)} = t^3 + kt$ che è vera per i t per cui $t^3 + kt \geq 0$

e $y(1) = y_0$ implica $k = \sqrt{y_0} - 1 \Rightarrow y(t) = (t^3 + (\sqrt{y_0} - 1)t)^2$ per $t^2 > 1 - \sqrt{y_0}$

* se $y_0 > 1$, $t^2 > 1 - \sqrt{y_0}$ è sempre vera e la soluzione è definita in $\mathbb{R}$

** se $y_0 = 1$, $y(t) = t^6$ è definita su tutto $\mathbb{R}$

*** se $y_0 \in (0,1)$, possiamo porre $y(t) = \begin{cases} (t^3 + (\sqrt{y_0} - 1)t)^2 & \text{per } t > \sqrt{1 - \sqrt{y_0}} \\ 0 & \text{per } t \leq \sqrt{1 - \sqrt{y_0}} \end{cases}$ definita su tutto $\mathbb{R}$

N.B. Si noti che $y'(\sqrt{1 - \sqrt{y_0}})$ esiste e vale zero quindi è soluzione.

c. **(3 punti)** Per i valori di y_0 per cui esiste piú di una soluzione locale, le si determinino tutte.

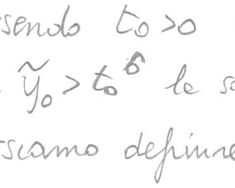
• Se $y_0 = 0$.

la funzione $y(t) \equiv 0$ è UNA soluzione.

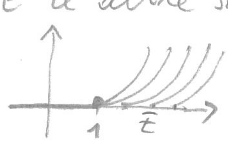
$\forall (t_0, \tilde{y}_0) \in (0, \infty) \times (0, \infty)$, la soluzione del problema $\begin{cases} y' = \frac{2}{t}y + 4t^2\sqrt{y} \\ y(t_0) = \tilde{y}_0 \end{cases}$

è tale che $\sqrt{y} = t^3 + kt$ con k tale che $\sqrt{\tilde{y}_0} = t_0^3 + kt_0$ e definita per i t per cui $t^3 + kt > 0$. Quindi $k = \frac{\sqrt{\tilde{y}_0} - t_0^3}{t_0}$ ed essendo $t_0 > 0$ i t devono essere tali che $t^2 + \frac{\sqrt{\tilde{y}_0} - t_0^3}{t_0} > 0$.

Per $\tilde{y}_0 > t_0^6$ la soluzione non vale mai zero; per $\tilde{y}_0 \leq t_0^6$ possiamo definire $y(t) = \begin{cases} \left(t^3 + \frac{\sqrt{\tilde{y}_0} - t_0^3}{t_0}t\right)^2 & \text{per } t > \sqrt{\frac{t_0^3 - \sqrt{\tilde{y}_0}}{t_0}} = \bar{t} \\ 0 & \text{per } t \leq \text{''} \end{cases}$

cioè 
con $0 < \tilde{y}_0 \leq t_0^6$

. Queste soluzioni, scegliendo $\bar{t} > 1$, sono tutte le altre soluzioni locali del problema:



4. **(8 punti)** Al variare del parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$ si consideri la funzione

$$f(x,y,z) = \frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^\alpha}$$

nel suo dominio. Si consideri l'insieme E definito da

$$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x^2+y^2} \le x^2+y^2+z^2 \le z\}.$$

a. **(4 punti)** Si stabilisca per quali α la funzione f é integrabile su E;

operiamo il cambio di coordinate $x = \rho \sin\varphi \cos\theta$; $y = \rho\sin\varphi\sin\theta$; $z = \rho\cos\varphi$ dove $\rho > 0$; $0 < \varphi \le \pi$; $0 \le \theta < 2\pi$. In coordinate sferiche a E corrisponde $E' = \{0 \le \theta < 2\pi;\ \sin\varphi \le \rho \le \cos\varphi;\ 0 < \varphi \le \pi/4\}$. Quindi si analizza

$$\int_{E'} \frac{\rho^3 \sin^2\varphi\,|\cos\theta|}{\rho^{2\alpha}} = 4\int_0^{\pi/4} d\varphi \sin^2\varphi \int_{\sin\varphi}^{\cos\varphi} \rho^{3-2\alpha}\,d\rho = 4\int_0^{\pi/4} \frac{\sin^2\varphi\left([\cos\varphi]^{4-2\alpha} - [\sin\varphi]^{4-2\alpha}\right)}{4-2\alpha}d\varphi \quad \alpha \neq 2$$

$$\alpha = 2 : \ 4\int_0^{\pi/4} \sin^2\varphi\,[\log\cos\varphi - \log\sin\varphi]\,d\varphi$$

b. **(2 punti)** al variare di α, quando é possibile, si calcoli

$$\int_E f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz;$$

affinché $\exists$ deve essere $6-2\alpha > -1$ quindi $\alpha < \frac{7}{2}$ ($\alpha = 2$ non dà problemi poiché $\sin^2\varphi \log\sin\varphi$ è integrabile in un intorno destro di 0.

$$\int_E f(x,y,z) = 0 \quad \text{quando esiste poiché} \quad \int_0^{2\pi}\cos\theta = 0 \quad \left(\int_0^{2\pi}|\cos\theta| = 4\right)$$

c. **(2 punti)** si calcoli il volume dell'insieme E.

$$\text{Vol } E = 2\pi\int_{E'} \rho^2 \sin\varphi\,d\rho\,d\varphi = 2\pi\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\,d\varphi\int_{\sin\varphi}^{\cos\varphi}\rho^2\,d\rho =$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi/4}\sin\varphi\frac{\cos^3\varphi}{3} - 2\pi\int_0^{\pi/4}\frac{\sin^4\varphi}{3} = 2\pi\left[\frac{-\cos^4\varphi}{12}\right]_0^{\pi/4} - \frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi/4}\sin^4\varphi = \frac{14\pi - 3\pi^2}{48}$$

$$\int \sin^4\varphi = \int\sin^2\varphi - \int(\sin\varphi\cos\varphi)^2 =$$

$$= \frac{\varphi - \sin\varphi\cos\varphi}{2} - \frac{1}{8}\left(\frac{2\varphi - \sin 2\varphi\cos 2\varphi}{2}\right)$$