Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PRIMA PROVA PARZIALE – 12 Dicembre 2018

FILA A

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Sia

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{x}e^{-\frac{x^2}{y^4}} & \text{se } y \neq 0 \\ 0 & \text{se } y = 0 \end{cases}$$

   a. **(2 punti)** Si stabilisca se f è continua in $\mathbb{R}^2$;

   b. **(2 punti)** si determinino i punti di $\mathbb{R}^2$ in cui esiste il gradiente;

   c. **(2 punti)** si calcolino tutte le derivate direzionali nell'origine;

   d. **(2 punti)** si studi la differenziabilitá della funzione f nell'origine.

2. **(8 punti)** Si consideri la funzione

$$f(x, y) = \log(1 + xy) + y^2 - 1$$

nel suo dominio.

a. **(4 punti)** Si determinino i massimi e i minimi locali, stabile se sono assoluti. Si determinino inoltre sup e inf di f nel suo dominio.

b. **(4 punti)** Sia

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; |x + 2y| \leq 2, \quad 2xy + 1 \geq 0\}.$$

Si determinino eventuali punti di massimo e minimo di f in D.

3. **(6 punti)** Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{n}$$

a. **(3 punti)** Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice e gli insiemi di convergenza uniforme.

b. **(3 punti)** Si calcoli la somma della serie e la si indichi con $f(x)$.

4. **(4 punti)** Si verifichi che l'equazione

$$e^x + e^{y+z} - e^{x+z} + z - 1 = 0$$

definisce in un intorno dell'origine una funzione $z = f(x, y)$. Al variare di $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ versore in $\mathbb{R}^2$ si calcoli $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{0})$.

5. **(8 punti)** Sia $\alpha > 0$ e si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definita da

$$f_n(x) = n^{\alpha} x^3 e^{-nx^5}.$$

a. **(4 punti)** Al variare di α, si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ e si determinino gli insiemi in cui si ha convergenza uniforme;

b. **(4 punti)** Si determinino gli α per cui la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f_n$ converge uniformemente in $[0, \infty)$.

Analisi Matematica II per il corso di Laurea Triennale in Matematica
PRIMA PROVA PARZIALE – 12 Dicembre 2018

FILA B

Tempo per la prova 2 ore. Non si accetteranno altri fogli oltre a questo. E' richiesto di riportare i passaggi e i conti piú significativi in modo che lo svolgimento sia esaustivo. Gli svolgimenti disordianti o con motivazioni insufficienti non verranno presi in considerazione.

NOME E COGNOME:

---

1. **(8 punti)** Sia
$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt[3]{y}e^{-\frac{y^2}{x^4}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

   a. **(2 punti)** Si stabilisca se f è continua in $\mathbb{R}^2$;

   b. **(2 punti)** si determinino i punti di $\mathbb{R}^2$ in cui esiste il gradiente;

   c. **(2 punti)** si calcolino tutte le derivate direzionali nell'origine;

   d. **(2 punti)** si studi la differenziabilitá della funzione f nell'origine.

2. **(8 punti)** Si consideri la funzione

$$f(x,y) = \log(1+xy) + y^2 - 1$$

nel suo dominio.

a. **(4 punti)** Si determinino i massimi e i minimi locali, stabile se sono assoluti. Si determinino inoltre sup e inf di f nel suo dominio.

b. **(4 punti)** Sia

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x+2y| \leq 2, \quad 2xy+1 \geq 0\}.$$

Si determinino eventuali punti di massimo e minimo di f in D.

3. **(6 punti)** Si consideri la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n+1}}{n+1}$$

a. **(3 punti)** Se ne determinino l'insieme di convergenza semplice e gli insiemi di convergenza uniforme.

b. **(3 punti)** Si calcoli la somma della serie e la si indichi con $f(x)$.

4. **(4 punti)** Si verifichi che l'equazione

$$e^y + e^{x+z} - e^{y+z} + z = 1$$

definisce in un intorno dell'origine una funzione $z = f(x, y)$. Al variare di $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ versore in $\mathbb{R}^2$ si calcoli $D_{\mathbf{v}} f(\mathbf{0})$.

5. **(8 punti)** Sia $\alpha > 0$ e si consideri la successione di funzioni $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ definita da

$$f_n(x) = n^{\alpha} x^5 e^{-nx^3}.$$

a. **(4 punti)** Al variare di α, si studi la convergenza puntuale di $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ e si determinino gli insiemi in cui si ha convergenza uniforme;

b. **(4 punti)** Si determinino gli α per cui la serie di funzioni $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n f_n$ converge uniformemente in $[0, \infty)$.