



B. Bacchelli, M. Di Natale, M. Mauri

Richiami di Matematica

ESERCIZI

Ad uso del corso *Richiami di Matematica* della Facoltà di Scienze M.F.N.

Milano, gennaio 2010

Indice

| | |
|--|----|
| 1. Logica - Insiemi | 1 |
| 2. Numeri reali - Percentuali | 6 |
| 3. Proprietà delle potenze..... | 8 |
| 4. Polinomi..... | 11 |
| 5. Equazioni algebriche e sistemi..... | 15 |
| 6. Disequazioni algebriche e sistemi..... | 21 |
| 7. Geometria analitica..... | 26 |
| 8. Funzioni reali..... | 34 |
| 9. Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche..... | 37 |
| 10. Trigonometria..... | 42 |
| 11. Esempio di test..... | 49 |

ESERCIZI 1. - Logica e insiemi*Proposizioni - Valore di verità* $\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \subset, \cap, \cup, \setminus, \in, \forall, \exists, \emptyset, \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$

1. Stabilire se le seguenti sono proposizioni, e nel caso affermativo se ne attribuisca il valore di verità.

a) $3 \neq \frac{1}{2} + 2$

b) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} < \frac{2}{3}$

c) $\sqrt{-4} = 2$

d) $(a + b)^2 \neq a^2 + b^2$

e) *Il numero \sqrt{x} è reale.*

f) $x^2 - 2x + 1 = 0$ per $x = 1$.

g) $3\sqrt{x} + 5x = 54$.

h) *La equazione $x(x + 1) = 0$ è equivalente alla $x + 1 = 0$.*i) *Se $x > 1 \Rightarrow x \in \mathbb{N}$.*l) *La somma degli angoli interni ad ogni triangolo è pari a 180° .*m) *La piramide è una figura di rotazione.*n) *La mela è buona.*

o) $0.23 = \frac{23}{10}$

p) *Il numero 17 è primo.*q) *Il numero 13 porta fortuna.*r) *La equazione $x + 3 = 0$ è di secondo grado.*s) *Ogni equazione algebrica di grado dispari ha almeno una soluzione reale.*

t) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 0\} \neq \emptyset$.

u) $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 0\} \neq \emptyset$.

2. Siano $A = \{1, 2, 3, 4\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$.

Si determini $C = A \cup B$ e $D = A \cap B$.

3. Dati gli enunciati: " n è un multiplo di 4 o è un numero dispari, e inoltre è minore di 25" ; " n è un numero dispari minore di 25, oppure è multiplo di 4 e minore di 25" (n è un numero naturale), osservare che i due enunciati sono equivalenti e descriverli con espressioni insiemistiche.

4. Quanti sono i sottoinsiemi dell'insieme $A = \{1, 2, 3, 4\}$.

5. Assegnata l'equazione

$$(x - 1)(x - 4) = 0,$$

si stabilisca se le seguenti sono vere:

Le soluzioni soddisfano la condizione $(x < 2) \vee (x > 3)$.

Le soluzioni soddisfano la condizione $(x < 5) \wedge (x \geq 1)$.

6. Siano $A = \{\text{numeri primi}\}$, $B = \{\text{numeri pari}\}$, $C = \{\text{numeri dispari}\}$, $D = \{5, 20, 15\}$, $a = 5$. Dire se sono vere o false le seguenti proposizioni:

- a) $a \in A \cap C$
- b) $A \setminus B = A$
- c) $D \cap A = a$
- d) $B \cap C \neq \emptyset$
- e) $B \cap C \subset A$
- f) $C \subset A$
- g) "Gli elementi di D sono multipli di 5."

7. Siano dati i seguenti insiemi:

$A = \{\text{quadrilateri}\}$, $R = \{\text{rettangoli}\}$, $M = \{\text{rombi}\}$,
 $P = \{\text{parallelogrammi}\}$, $Q = \{\text{quadrati}\}$;

- a) si rappresentino gli insiemi in un diagramma di Eulero-Venn;
- b) stabilire se le seguenti relazioni sono vere o false:
 - i) $Q \subset P$
 - ii) $P \subset R$
 - iii) $R \cap M = Q$

8. a) Utilizzare la frase "condizione necessaria affinché" nel descrivere la proposizione $E \Rightarrow D$.

b) Utilizzare la frase "condizione sufficiente affinché" nel descrivere la proposizione $D \Rightarrow E$.

9. Descrivere l'ipotesi e la tesi, collegandole col simbolo \Rightarrow per le seguenti proposizioni, essendo A un poligono. Stabilire poi se sono vere e nel caso siano false fornire un controesempio.

Condizione necessaria affinché A sia un quadrato è che abbia tutti angoli retti.

Condizione sufficiente affinché A sia un quadrato è che abbia quattro angoli retti.

Condizione sufficiente affinché A sia un poligono regolare è che sia inscrittibile in una circonferenza.

Condizione necessaria affinché A sia un quadrato è che sia inscrittibile in una circonferenza.

10. Si determini la proposizione negazione ($\neg P$) di ciascuna proposizione seguente P , essendo x un numero reale.

- a) $x + 1 > 0$
- b) $2x + 3 = 0$
- c) *La temperatura supera i 38° .*
- d) *Tutti i cavalli sono bianchi.*
- e) *Esiste un ombrello nero.*
- f) *Tutti i venerdì non gioco a pallone.*

11. Si determini la proposizione negazione ($\neg P$) della seguente P :

"Ogni numero naturale maggiore di 1 è somma di due numeri dispari." e si stabilisca se vera o falsa.

12. Dare la definizione di *multiplo*, *divisore*, *opposto*, *inverso (reciproco)* di un numero reale, facendo uso della doppia freccia.

13. Dimostrare per assurdo che $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

14. Determinare per quali a, b reali la condizione: $[|a| + |b| = |a + b|]$ è vera.

15. Nelle seguenti proposizioni completare col quantificatore esistenziale (\exists) o universale (\forall) in modo che risultino vere.

a) ($\forall x$) $[\sqrt{x^2} \geq 0]$

b) ($\forall x$) $[x^2 > 0]$

c) ($\forall x$) $[2x^2 + 3 > 0]$

d) ($\forall x$) $[x^2 - 4 > 0]$

e) ($\forall n$) $[Il\ numero\ 2n+1\ è\ primo.]$

f) ($\forall a$) $[acz + bcz\ è\ un\ monomio.]$

g) ($\forall a$) $[ax^2 + bx + c\ è\ un\ polinomio\ di\ primo\ grado.]$

h) ($\forall b$) $[z^2 - bz + b^2\ è\ un\ polinomio\ di\ secondo\ grado.]$

i) ($\forall x$) $\left[La\ frazione\ \frac{1}{x^2 - 1}\ \text{esiste.}\right]$

l) ($\forall T$) $[Un\ trapezio\ (T)\ ha\ due\ lati\ paralleli.]$

m) ($\forall x$) $[(2 - x)(2 + x) = 4 - x^2]$

n) ($\forall x$) $\left[\frac{1}{x^2 + 1}\ \text{esiste.}\right]$

16. Siano $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{a, b, c\}$ Quanti elementi ha $A \times B$?

17. Se $A \times B$ ha 12 elementi, detti n e m il numero di elementi di A e B rispettivamente, quali sono le possibili coppie (n, m) ?

18. Siano \mathbb{N} l'insieme dei numeri naturali, P l'insieme dei numeri pari, D l'insieme dei numeri dispari. Determinare i seguenti insiemi (P^c il complementare di P):

a) $P \cup D$

b) $P \cap D$

c) P^c

d) D^c

19. Siano $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x > -1\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$. Stabilire se le proposizioni sono vere o false:

a) $A \subset B$

b) $B \subset A$

c) $A \cup B = \mathbb{R}$

d) $A \cap B = \emptyset$

e) $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\}$

f) $0 \in A \cap B$

g) $3 \in A^c$

h) $10 \in B^c$

i) $A^c \cap B^c = \emptyset$

l) $-1 \in A^c \cap B$

Risposte**1.**

a) V , b) F , c) F , d) n.p. , e) n.p., f) V , g) n.p. , h) F , i) F , l) V ,
m) F , n) n.p. , o) F , p) V , q) n.p. , r) F , s) V , t) V , u) F.

2.

$C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $D = \{3, 4\}$.

3.

Posto $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è un multiplo di } 4\}$, $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ è un numero dispari}\}$,

$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 25\}$, allora

primo enunciato: $n \in (A \cup B) \cap C$,

secondo enunciato: $n \in (B \cap C) \cup (A \cap C)$.

4.

16.

5.

V, V.

6.

a)V , b)F ($2 \in A \cap B$) , c)F (a è un elemento, non un insieme),

d)F , e)V , f)F , g)V .

7.

b)V , i)V , ii)F , iii)V .

8.

a) Condizione necessaria affinché valga E è che valga D .

b) Condizione sufficiente affinché valga E è che valga D .

10.

a) $x + 1 \leq 0$; b) $2x + 3 \neq 0$;

c) *La temperatura è minore o uguale a 38°.*

d) *Esiste un cavallo non bianco.*

e) *Tutti gli ombrelli non sono neri.*

f) *Qualche venerdì gioco a pallone.*

11.

$\neg P$: "esiste un numero naturale maggiore di 1 che non è somma di due numeri dispari " .

P è falsa ($\Leftrightarrow \neg P$ è vera), infatti $3 = 2 + 1$.

12.

m è multiplo di $n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tale che $m = k \cdot n$.

m è divisore di $n \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tale che $n = k \cdot m$.

m è opposto di $n \Leftrightarrow n + m = 0$;

l'opposto di un numero n esiste sempre e si indica con $-n$.

m è inverso di $n \Leftrightarrow n \cdot m = 1$;

l'inverso di un numero $n \neq 0$ esiste sempre e si indica con n^{-1} .

14.

Deve essere $a \cdot b \geq 0$.

15.

a) \forall , b) \exists , c) \forall , d) \exists , e) \exists , f) \exists , g) \exists , h) \forall , i) \exists , l) \forall , m) \forall , n) \forall .

16.

$5 \cdot 3 = 15$ elementi.

17. $(1,12), (12,1), (2,6), (6,2), (3,4), (4,3).$ **18.**a) \mathbb{N} , b) \emptyset , c) D , d) P .**19.**

a)F , b)F , c)V , d)F , e)V , f)V , g)F , h)V , i)V , l)V.

ESERCIZI 2. - Numeri reali - Percentuali

1. Scrivere come numero decimale le seguenti frazioni

a) $\frac{156}{10^2}$; b) $\frac{45}{10^5}$; c) $-\frac{61}{10^3}$; d) $\frac{335}{20}$

Risposte.

a) 1,56 ; b) 0,00045 ; c) -0,061 ; d) 16,75.

2. Mettere in ordine crescente i seguenti numeri

a) $\frac{4}{5}$, $-\frac{5}{8}$, $\frac{3}{4}$, $-\frac{7}{9}$, $\frac{19}{23}$

b) $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{3}$

c) $\sqrt[3]{2^4}$, $\sqrt[4]{3^2}$

d) $\sqrt{-1 + \sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}$

Risposte.

a) $-\frac{7}{9} < -\frac{5}{8} < \frac{3}{4} < \frac{4}{5} < \frac{19}{23}$;

b) $\sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$;

c) $\sqrt[4]{3^2} < \sqrt[3]{2^4}$;

d) $\frac{1}{2} < \sqrt{-1 + \sqrt{2}}$.

3. a) Se è $2 \leq a \leq 2,5$ e $3 \leq b \leq 4,5$, tra quali numeri sono compresi

$-a$; $-b$; $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}$; $a + b$; $a - b$; $a \cdot b$; $a : b$?

b) Se è $3,2 \leq a \leq 5,4$ e $-2,4 \leq b \leq -1,8$, tra quali numeri sono compresi

$-a$; $-b$; $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{b}$; $a + b$; $a - b$; $a \cdot b$; $a : b$?

c) Se è $-2,3 \leq a \leq 1,5$, tra quali numeri è compreso $|a|$?

d) Trovare una frazione strettamente compresa tra $\frac{5}{13}$ e $\frac{6}{13}$.

Risposte.

a) $-2,5 \leq -a \leq -2$;

$-4,5 \leq -b \leq -3$;

$\frac{1}{2,5} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{2}$;

$\frac{1}{4,5} \leq \frac{1}{b} \leq \frac{1}{3}$;

$5 \leq a + b \leq 7$;

$-2,5 \leq a - b \leq -0,5$;

$6 \leq a \cdot b \leq (2,5) \cdot (4,5)$;

$\frac{2}{4,5} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{2,5}{3}$.

b) $-5,4 \leq -a \leq -3,2$;

$1,8 \leq -b \leq 2,4$;

$\frac{1}{5,4} \leq \frac{1}{a} \leq \frac{1}{3,2}$;

$-\frac{1}{1,8} \leq \frac{1}{b} \leq -\frac{1}{2,4}$;

$$0,8 \leq a + b \leq 3,6;$$

$$5 \leq a - b \leq 7,8 ;$$

$$(-2,4) \cdot (5,4) \leq a \cdot b \leq (-1,8) \cdot (3,2); \quad \frac{5,4}{-1,8} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{3,2}{-2,4}.$$

$$c) 0 \leq |a| \leq 2,3.$$

$$d) \frac{1}{2} \left(\frac{5}{13} + \frac{6}{13} \right) = \frac{11}{26}.$$

Percentuali - Proporzioni

1. Due laghi distano 2cm su una carta geografica in scala $1 : 20.000$. Quanto distano su una carta in scala $1 : 80000$?

Risposta.

Per definizione la scala $1 : s$ significa che una misura reale x e una misura sulla carta y stanno in un rapporto $x : y = s$. Pertanto la distanza reale è $2 \cdot 20.000.\text{cm}$, che su una scala $1 : 80000$ corrisponde a $\frac{2 \cdot 20.000}{80.000} = 0,5\text{cm}$.

2. Scrivere in forma percentuale i seguenti numeri

a) 4; b) 0,23; c) 2,1; d) 0,004

Risposte.

a) 400%; b) 23%; c) 210%; d) 0,4%.

3. a) Supponiamo che in una città di 6 milioni di abitanti abbiano diritto al voto 4,2 milioni di abitanti. Quale è la percentuale degli aventi diritto al voto, rispetto all'intera popolazione?

b) Supponiamo che in una votazione i partecipanti siano stati il 70% degli aventi diritto al voto. Se il 30% dei votanti vota il candidato A , quale è la percentuale delle preferenze ricevute da A rispetto agli aventi diritto al voto?

c) Se due grandezze p e q sono inversamente proporzionali, se p diminuisce del 20% allora di quale percentuale aumenta q ?

d) Se una casa ha valore catastale di 100.000 euro, quanto si deve versare di icipi, se l'icipi è del 4 per mille?

Risposte.

a) 70%, pari a $(4,2 : 6)$; b) 21%, pari a $(30\% \cdot 70\%)$.

c) 25%. Infatti se $p \cdot q = K$, e $p' \cdot q' = (100 - 20)\% p \cdot q' = K$, allora

$$q' = \frac{K}{80\%p} = \frac{100}{80} q = \frac{80 + 20}{80} q = q + 1/4q, \text{ e } 1/4 = 0,25.$$

d) 400 euro, pari a $(4 : 1000) \cdot 100000$ euro.

ESERCIZI 3. Proprietà delle potenze

1. Si riscriva ogni espressione letterale in modo che contenga solo esponenti positivi e la si semplifichi.

a) $c^{-1/2} \cdot c^{5/2}$;

b) $(x^{-3/4})^{-8/3}$;

c) $(125x^{-18})^{-4/3}$;

d) $\left(\frac{32}{x^{-5}}\right)^{-2/5}$;

e) $\frac{(xy)^{-1}}{x^{-1} + y^{-1}}$;

f) $(-3y^2)^2$;

g) $(2x^{1/3}y^{3/2})^6$;

h) $\left(\frac{125x^{-9}y^{-12}}{8z^{-15}}\right)^{2/3}$.

Risposte.

a) c^2 ; b) x^2 ; c) $\frac{x^{24}}{625}$; d) $\frac{1}{4x^2}$; e) $\frac{1}{x+y}$; f) $9y^4$; g) $64x^2y^9$; h) $\frac{25z^{10}}{4x^6y^8}$.

2. Dire se le espressioni hanno significato, e se sì semplificarle usando solo potenze.

a) $\sqrt{2}\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$;

b) 0^1 ;

c) $(\sqrt{2})^{\sqrt{3}}$;

d) $(-1)^0$;

e) $(-3)^{\sqrt{2}}$;

f) $\sqrt{16}$;

g) $\sqrt[5]{(-3)^{-1}}$;

h) $\sqrt[4]{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$;

i) 0^0 ;

l) $\sqrt[3]{-8}$.

Risposte

a) Sì: $2^{1/6}$; b) sì: 0; c) sì: $2^{\sqrt{3}/2}$; d) sì: 1; e) non ha significato; f) sì: 2^2 ;

g) sì: $-(3^{-1/5})$; h) sì: $3^{3/4} \cdot 2^{-1/2}$; i) non ha significato; l) sì: -2.

3. Vero o falso?

a) $2^{2/3} + 3^{2/3} = 5^{2/3}$;

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1/2} = \sqrt{2}$;

c) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{x+y}$;

d) $x^{4/3} \cdot y^{5/3} = xy\sqrt[3]{xy^2}$;

$$\begin{array}{ll} \text{e) } (x^{1/2})^{1/3} = \sqrt[6]{\frac{1}{x^{-1}}}, x \neq 0; & \text{f) } a^x - a^y = a^{x/y}; \\ \text{g) } \sqrt{9} = \pm 3; & \text{h) } \sqrt{16} = |-4|; \\ \text{i) } \sqrt{-4} = -2; . & \text{l) } 2^{2/3} \cdot 3^{2/3} = 6^{2/3}. \end{array}$$

Risposte.

a)F; b)V; c)F; d)V; e)V; f)F; g)F; h)V; i)F; l)V.

4. Semplificare le espressioni.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 16^{-3/4}; & \text{b) } \left(\frac{27}{125}\right)^{-1/3}; \\ \text{c) } (5^{-2/3}) \cdot (2^{4/3})^{-1/2}; & \text{d) } (3^{-1/3} \cdot 2^{-2/3})^{6/5} : 54^{1/5}; \\ \text{e) } \frac{\sqrt[3]{3^4}}{3}; & \text{f) } \frac{1}{\sqrt[3]{2\sqrt{2}}}; \\ \text{g) } \sqrt{3\sqrt{3}} \cdot \sqrt[4]{3^3}; & \text{h) } (3\sqrt[3]{-3})^2; \\ \text{i) } \sqrt{8}\sqrt{2}; & \text{l) } \sqrt[4]{(-3)^{4/3}}. \end{array}$$

Risposte.

$$\text{a) } \frac{1}{8}; \text{ b) } \frac{5}{3}; \text{ c) } \frac{\sqrt[3]{10}}{10}; \text{ d) } \frac{1}{6}; \text{ e) } \sqrt[3]{3}; \text{ f) } \frac{\sqrt{2}}{2}; \text{ g) } 3\sqrt{3}; \text{ h) } 9\sqrt[3]{9}; \text{ i) } 4; \text{ l) } \sqrt[3]{3}.$$

5. Scrivere i radicali usando solo potenze di a e di b .

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{1}{\sqrt[3]{a^2b}} \cdot \sqrt[3]{b^2}; & \text{b) } \sqrt[3]{a\sqrt{a}} : \sqrt[4]{a^2\sqrt[3]{a^2}}; \\ \text{c) } \sqrt[3]{a^2\sqrt[4]{b^3}} : \sqrt[4]{ab}; & \text{d) } \sqrt{a\sqrt[3]{ab^2}} : b; \\ \text{e) } \sqrt[15]{a^3b^5}; & \text{f) } \sqrt{a\sqrt[4]{a^3}}. \end{array}$$

Risposte.

$$\text{a) } a^{-2/3} \cdot b^{1/3}; \text{ b) } a^{-1/6}; \text{ c) } a^{5/12}; \text{ d) } a^{5/6}b^{-1/3}; \text{ e) } a^{1/5}b^{1/3}; \text{ f) } a^{7/8}.$$

6. Supponendo a e b numeri reali e n numero intero positivo, stabilire se le seguenti proposizioni sono vere o false.

$$\text{a) } \text{Se } a \neq 0, \text{ allora } a^{2n} - a^n = a^{-n}(a^{3n} - a^{2n}), \forall n.$$

$$\text{b) } \text{Se } a \neq 0, \text{ allora } \left(-\frac{1}{a}\right)^{-2n} = -a^{2n}, \forall n.$$

c) Se $a < b$, con $a \cdot b \neq 0$, allora $a^{-1} < b^{-1}$.

d) Se $a < b$, con $a \cdot b \neq 0$, allora $b^{-1} < a^{-1}$.

e) Se $a \cdot b \neq 0$, allora $a^0 \cdot b^0 = (a \cdot b)^0$.

f) Se $a \neq 0$, allora $[(a^{-n})^{-2n}]^2 = a^{2n^4}, \forall n$.

g) $[(-a^n)^n]^{2n} = a^{2n^3}, \forall a, \forall n$.

h) $(n^2 - n)^{2/3} = n^{4/3}(1 - n^{-1})^{2/3}, \forall n$.

i) Se $0 < a < 1$, allora $\sqrt{a} > a$.

l) Se $a > 1$, allora $\sqrt{a} < a$.

m) Se $a^2 < b^2$, allora $a < b$.

n) $a^2 < b^2 \Leftrightarrow |a| < |b|$.

Risposte.

a) V ; b) F; c) F; d) F; e) V; f) F; g) V; h) V; i) V ; l) V ; m) F ; n) V.

ESERCIZI 4 - Polinomi

Espressione algebrica razionale, monomi simili, binomio, trinomio, grado, polinomio omogeneo, prodotti notevoli.

1. Stabilire quali tra le seguenti espressioni algebriche sono razionali.

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{x}{z}$; b) $\sqrt{\frac{ab^4 - 3}{a + bc}}$; c) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})xy^4$.

Risposte.

a) sì; b) no; c) sì.

2. Stabilire se sono polinomi.

a) $3xy^5 - 2x^2y + 1$; b) $\sqrt{2x + 3}$;
 c) $x^{1/2} + 5y^2$; d) $\frac{x^2 + 3x - 1}{x - 2x^6}$.

Risposte.

a) sì; b) no; c) no; d) no.

3. Stabilire il grado dei polinomi.

a) $3x^2y^4 - 3xy^5 + xy^2 - 1$;
 b) $2x^2z - 3xy^2 + 5z^3$

Risposte.

a) 6; b) 3 (omogeneo).

4. Calcolare.

a) $2(x^3 + y^3) - 2(x + y)(x^2 + y^2) + 2xy(x + y)$;
 b) $(5x - 2)^3$;
 c) $(3a^2bc - 2abc^2) : (-ab)$;
 d) $(x^2 - 2xy)^2$;
 e) $(3x^2y) : (\frac{4}{3}x^4y^3)$.

Risposte.

a) 0; b) $125x^3 - 150x^2 + 60x - 8$; c) $-3ac + 2c^2$; d) $x^4 - 4x^3y + 4x^2y^2$; e) $\frac{9}{4} \frac{1}{x^2y^2}$.

Divisione di polinomi. $A_n(x) : B_p(x) = Q_{n-p}(x) + R_k(x) : B_p(x), k < p$.

5. Eseguire le seguenti divisioni.

a) $(3x^4 + x^3 - 12x + 9) : (x^2 - 2x)$;

b) $(2x^4 + x^2 + 3) : (x^2 - x)$;

c) $y^5 : (y^2 + y + 1)$;

d) $(z^4 + 4) : (z^2 + z + 1)$.

Risposte.

a) $Q(x) = 3x^2 + 7x + 14, R(x) = 16x + 9$;

b) $Q(x) = 2x^2 + 2x + 3, R(x) = 3x + 3$;

c) $Q(y) = y^3 - y^2 + 1, R(y) = -y - 1$;

d) $Q(z) = z^2 - z, R(z) = z + 4$.

Regola di Ruffini: $A(x) = (x - a)Q(x) + R, R = A(a)$. *$A(x)$ è divisibile per $(x - a)$ sse $R = 0$.**Radici, molteplicità. Regola dei divisori per le radici razionali.***6.** Eseguire le seguenti divisioni utilizzando la regola di Ruffini.

a) $(3x^4 - 2x^3 - 10x - 8) : (x - 2)$;

b) $(2x^3 + 5x^2 - 4x - 1) : (x - \frac{2}{3})$;

c) $(2x^3 - x^2 + x + 5) : (2x + 1)$;

d) $(z^4 + 4) : (z + 1)$.

Risposte.

a) $Q(x) = 3x^3 + 4x^2 + 8x + 6, R = 4$;

b) $Q(x) = 2x^2 + \frac{19}{3}x + \frac{2}{9}, R = -\frac{23}{27}$;

c) $Q(x) = x^2 - x + 1, R = 4$;

d) $Q(z) = z^3 - z^2 + z - 1, R = 5$.

7. Verificare se sono divisibili per i binomi accanto; se sì eseguire la divisione con la regola di Ruffini.

a) $x^3 + x^2 - 6x + 7; x - 1$;

b) $2x^3 + 3x^2 - 18x - 27; x - 3$;

c) $\frac{3}{5}x^4 - \frac{3}{10}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - 1; x - \frac{1}{2}$.

Risposte.

a)no; b) sì, $Q(x) = 2x^2 + 9x + 9$; c) sì, $Q(x) = \frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{2}x + 2$.

8. Eseguire le divisioni con la regola di Ruffini ($R = 0$).

- a) $x^3 + y^3$; $x + y$; b) $(x^4 - 16)$; $x - 2$;
c) $(x^5 - 1)$; $x - 1$; d) $(x^3 - 1)$; $x - 1$.

Risposte.

- a) $x^2 - xy + y^2$;
b) $x^3 + 2x^2 + 4x + 8$;
c) $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;
d) $x^2 - x + 1$.

Scomposizione in fattori. Formula delle radici di un trinomio di secondo grado.

9. Scomporre in fattori.

- a) $2x^2 + x - 1$;
b) $x^2 - x - 2$;
c) $3x^2 + 5x - 2$;
d) $16x^5 - 2x^2$;
e) $9x^3 - 9x^2 - x + 1$;
f) $27x^3 - 27x^2 + 9x - 1$;
g) $2x^3 - x^2 - 3x$.

Risposte.

- a) $(2x - 1)(x + 1)$;
b) $(x - 2)(x + 1)$;
c) $(3x - 1)(x + 2)$;
d) $2x^2(2x - 1)(4x^2 + 2x + 1)$;
e) $(x - 1)(3x - 1)(3x + 1)$;
f) $(3x - 1)^3$;
g) $x(x + 1)(2x - 3)$.

10. Semplificare le espressioni.

- a) $\frac{x^3 - 6x^2 + 9x}{x^3 - 27}$;
b) $\frac{x^4 - 1}{x^3 + 1}$;
c) $\frac{x^3 - 4x^2 + 4x - 1}{2x^2 - x - 1}$.

Risposte.

a) $\frac{x(x-3)}{x^2+3x+9}$;

b) $\frac{(x-1)(x^2+1)}{x^2-x+1}$;

c) $\frac{x^2-3x+1}{2x+1}$.

ESERCIZI 5 - Equazioni algebriche e sistemi.

Identità: uguaglianza tra due espressioni letterali verificata per ogni valore attribuito alle variabili nel testo.

Esempi:

- i) $xy\sqrt{x} = y\sqrt{x^3}, x \geq 0;$
- ii) $-x = \sqrt{x^2}, x \leq 0;$
- iii) $\frac{x^2 - y^2}{x + y} = x - y, x \neq -y.$

Equazione: uguaglianza tra due espressioni letterali che può essere vera o falsa a seconda dei valori attribuiti alle variabili.

Esempi:

- i) $-x = \sqrt{x^2},$ vera se $x \leq 0,$ falsa se $x > 0;$
- ii) $3x - 2 = 0,$ vera se $x = \frac{2}{3},$ falsa se $x \neq \frac{2}{3}.$

Equazioni di primo grado: $ax + b = 0, a \neq 0.$

1. Risolvere le seguenti equazioni.

- a) $\frac{x-3}{7} - 1 = \frac{x-9}{21} + \frac{6-x}{3};$
- b) $(x - \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (x - \sqrt{3})(\sqrt{3} + \sqrt{2});$
- c) $\frac{x+3}{2} - \frac{1}{3}x = 1 + \frac{1}{6}x.$

Risposte.

- a) 7; b) $\frac{5}{4}\sqrt{2};$ c) impossibile.

2. Risolvere le seguenti equazioni dipendenti da parametro (x incognita).

- a) $ax - 3 = 2x;$
- b) $\frac{x-b}{a} + \frac{x-a}{b} = 2, (a \neq 0, b \neq 0).$

Risposte.

- a) Se $a \neq 2, x = \frac{3}{a-2};$ se $a = 2,$ impossibile.
- b) Se $a + b = 0, \forall x;$ se $a + b \neq 0, x = a + b.$

Equazioni di secondo grado. Formula ridotta. Relazione tra i coefficienti e le radici.

3. Risolvere le seguenti equazioni.

- a) $4x^2 - 1 = 0;$
- b) $2x^2 + 3 = 0;$
- c) $x + 6 - x^2 = 0;$

d) $(x - 3)^2 + (x - 4)^2 = x$;

e) $(t + 1)^2 - t(1 - t) - (t - 2)(t + 2) = 4$;

Risposte.

a) $x = \pm \frac{1}{2}$; b) impossibile; c) $x = -2, x = 3$; d) $x = \frac{5}{2}, x = 5$;

e) impossibile.

4. Data l'equazione: $x^2 + kx + k - 1 = 0$, determinare per quali valori reali di k a) una soluzione è $x = 2$;b) una soluzione è $x = 0$;

c) la somma delle radici è 2;

d) il prodotto delle radici è 3;

e) le radici sono coincidenti;

f) le radici sono opposte;

g) le radici sono una l'inverso dell'altra.

Risposte.

a) $k = -1$; b) $k = 1$; c) $k = -2$; d) $k = 4$;e) $k = 2$ ($\Delta = 0$); f) $k = 0$ (somma=0); g) $k = 2$ (prodotto = 1).**5.** Verificare che le seguenti equazioni sono impossibili e trasformare i trinomi in somma di due quadrati.

a) $4x^2 + 2x + 1 = 0$;

b) $9x^2 - 3x + 2 = 0$;

Risposte.

a) $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$; b) $\left(3x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$.

Equazioni razionali fratte.

$$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \wedge B(x) \neq 0.$$

6. Risolvere le seguenti equazioni.

a) $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1}$;

b) $\frac{x + 1}{x} - \frac{x}{x + 1} = \frac{1}{x^2 + x}$;

c) $\frac{4x + a}{x + 4a} = \frac{4x - a}{x - a}$;

Risposte.

a) $x = \frac{1}{2}$; b) impossibile; c) se $a = 0 : \forall x \neq 0$; se $a \neq 0 : x = \frac{a}{6}$.

Equazioni binomie: $x^n - b = 0, n \in \mathbb{N}, n \geq 2$. Le eventuali soluzioni si dicono radici (n -esime) algebriche di b .

- i) $x^n = 0 \Leftrightarrow x = 0$;
- ii) se n è dispari, allora $x^n = b \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{b}$;
- iii) se n è pari e $b > 0$, allora $x^n = b \Leftrightarrow x = \pm \sqrt[n]{b}$;
- iv) se n è pari e $b < 0$, allora $x^n = b$ non ha soluzioni.

Si ricorda che, se b è negativo e n è dispari, si ha per definizione $\sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{|b|}$.

7. Risolvere le seguenti equazioni.

- a) $x^3 = 27$;
- b) $x^4 = 81$;
- c) $x^4 + 16 = 0$;
- d) $(x + 2)^4 = 4$.

Risposte.

- a) $x = 3$; b) $x = \pm 3$; c) impossibile; d) $x = -2 \pm \sqrt{2}$.

Equazioni biquadratiche ($ax^4 + bx^2 + c = 0, a \neq 0$).

Si pone $x^2 = t$, con $t \geq 0$.

8. Risolvere le seguenti equazioni.

- a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;
- b) $2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$;
- c) $x^4 + x^2 + 2 = 0$;
- d) $2x^4 + 3x^2 - 2 = 0$;
- e) $2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$;
- f) $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$.

Risposte.

- a) $x = \pm 1, x = \pm 3$; b) impossibile; c) impossibile; d) $x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$; e) impossibile; f) $x = \pm 1, x = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. Risolvere le seguenti equazioni.

- a) $2x^4 + x^3 - 2x^2 - x = 0$;
- b) $3x^3 + 7x + 10 = 0$;
- c) $(x^4 + 2)(x - \sqrt{2})(x^2 + 2x + 1) = 0$;
- d) $(x + 3)^4 = (x + 2)^2$.

Risposte.

- a) $x = \pm 1, x = -\frac{1}{2}, x = 0$; b) $x = -1$, (usa Ruffini...); c) $x = -1, x = \sqrt{2}$; d) $= \frac{-7 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Sistemi di equazioni

Metodo di sostituzione e metodo di riduzione. Sistema determinato, indeterminato, impossibile.

10. Trovare le coppie (x, y) soluzione dei seguenti sistemi.

$$a) \begin{cases} 2x + 5y = 0 \\ 4x + 3y = 7 \end{cases};$$

$$b) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ -4x + 6y = 7 \end{cases};$$

$$c) \begin{cases} 3x - 8y = 6 \\ -\frac{3}{2}x + 4y = -3 \end{cases};$$

$$d) \begin{cases} x + y = 1 \\ xy = -2 \end{cases};$$

$$e) \begin{cases} x - y^2 = 0 \\ xy + x - 2y = 0 \end{cases};$$

$$f) \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ y - \sqrt{3}x = 0 \end{cases};$$

$$g) \begin{cases} kx + y = 1 \\ 3x + y = 2 \end{cases};$$

Risposte.

$$a) \left(\frac{5}{2}, -1\right); b) \text{impossibile}; c) \left(k, \frac{3k-6}{8}\right), \forall k \in R; d) (-1, 2); (2, -1);$$

$$e) (0, 0); (1, 1); (4, -2); f) \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right);$$

$$g) \text{ se } k \neq 3, \left(\frac{1}{3-k}, \frac{3-2k}{3-k}\right); \text{ se } k = 3, \text{ impossibile.}$$

Equazioni col valore assoluto.

$$i) |A(x)| = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0;$$

$$ii) \text{ se } b > 0, |A(x)| = b \Leftrightarrow A(x) = \pm b;$$

$$iii) \text{ se } b < 0, |A(x)| = b \text{ non ha soluzioni.}$$

11. Dire se le seguenti equivalenze sono vere o false.

$$a) |A(x)| = B(x) \Leftrightarrow A(x) = \pm B(x);$$

$$b) |A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow A(x) = \pm B(x);$$

$$c) A^2(x) = B^2(x) \Leftrightarrow |A(x)| = |B(x)|;$$

$$d) x^2 = (3x + 1)^2 \Leftrightarrow x = \pm |3x + 1|;$$

$$e) 2x + 1 = |2 - x| \Leftrightarrow |2x + 1| = |2 - x|.$$

Risposte.

a) F; b) V; c) V; d) V; e) F.

12. Risolvere le seguenti equazioni.

$$a) |x + 2| = x(x - 2) - (x - 1)^2;$$

$$b) |x^2 - 4x + 2| = 2;$$

$$c) |x - 1| = |2x - 3|.$$

Risposte.

a) impossibile ; b) $x = 0, x = 2, x = 4$; c) $x = 2, x = \frac{4}{3}$.

Equazioni irrazionali.

Si usano le equivalenze

i) se n è un intero dispari, $A^n(x) = B^n(x) \Leftrightarrow A(x) = B(x)$;

ii) se n è un intero pari, $A^n(x) = B^n(x) \Leftrightarrow A(x) = \pm B(x)$.

Perciò, elevando a potenza pari entrambi i membri di una equazione, si possono introdurre soluzioni "estranee" e diventa obbligatoria la "verifica delle soluzioni" nell'equazione di partenza.

13. Risolvere le seguenti equazioni.

a) $\sqrt{2x+1} = \sqrt{5x+4}$;

b) $\sqrt{24-x^2+2x} + x - 2 = 0$;

c) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} - 1 = 0$;

d) $\sqrt[4]{x+2} + \sqrt{3-x} = 0$;

e) $\sqrt[3]{x^3+3x+7} - 1 = x$;

f) $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$;

g) $x^3 = \sqrt{(2-x)^3}$;

h) $\sqrt[3]{x-1} = \sqrt{x+1}$.

Risposte.

a) impossibile; b) $x = -2$; c) $x = -1, x = 3$; d) impossibile; e) $x = \pm\sqrt{2}$.; f) $x = 9$; g) $x = 1$; h) impossibile.

ESERCIZI 6. Disequazioni algebriche e sistemi.*Principi di equivalenza:*

- 1) $A(x) > B(x) \Leftrightarrow A(x) + C(x) > B(x) + C(x)$;
- 2) Se $k > 0$ allora $A(x) > B(x) \Leftrightarrow kA(x) > kB(x)$;
- 3) Se $k < 0$ allora $A(x) > B(x) \Leftrightarrow kA(x) < kB(x)$;

In conseguenza si hanno le seguenti equivalenze:

- a) $A(x) > B(x) \Leftrightarrow -A(x) < -B(x)$;
- b) $A(x) > B(x) \Leftrightarrow C(x) \cdot A(x) > C(x) \cdot B(x)$, per ogni x tale che $C(x) > 0$;
- c) $\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x) \cdot B(x) > 0$, per ogni x tale che $B(x) \neq 0$.

Disequazioni di primo grado.

Se $a > 0$, $ax + b > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{b}{a}$;

Se $a < 0$, $ax + b > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{b}{a}$.

1. Risolvere le seguenti disequazioni.

- a) $2(x + 2) - 5(x + 3) \leq 1$;
- b) $\frac{x + 3}{2} + x - 2 > \frac{3x + 3}{2} - 3$;
- c) $(x - 1)^2 - 3(x + 1) > x(x + 2)$;

Risposte.

a) $x \geq -4$; b) $\forall x$; c) $x < -\frac{2}{7}$.

2. Risolvere le seguenti disequazioni in dipendenza dal parametro a reale.

- a) $ax - 3(x - 1) > -2x$;
- b) $x - 5 > (a^2 + 1)x$;
- c) $ax + 7 < (a - 1)x$.

Risposte.

- a) se $a > 1$, $x > -\frac{3}{a-1}$; se $a = 1$, $\forall x$; se $a < 1$, $x < -\frac{3}{a-1}$;
- b) se $a = 0$, impossibile; se $a \neq 0$, $x < -\frac{5}{a^2}$; c) $x < -7, \forall a$.

Disequazioni di secondo grado.

Esaminiamo una disequazione di secondo grado nella forma $ax^2 + bx + c > 0$, oppure $ax^2 + bx + c < 0$, dove $a > 0$ (se $a < 0$, si perviene a questo caso moltiplicando entrambi i membri per -1 e cambiando verso alla disuguaglianza).

Supponiamo allora

$$a > 0, \quad P(x) = ax^2 + bx + c, \quad \Delta := b^2 - 4ac$$

(Δ discriminante del trinomio di secondo grado).

Allora

1) se $\Delta > 0$,

allora $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$ ha due radici reali distinte:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

e $P(x) > 0 \Leftrightarrow x < x_1, x > x_2$.

2) se $\Delta = 0$,

allora $P(x) = a(x - x_0)^2$ ha due radici reali coincidenti $x_0 = \frac{-b}{2a}$,

e $P(x) > 0 \Leftrightarrow x \neq x_0$;

3) se $\Delta < 0$,

$P(x)$ non ha radici reali, e $P(x) > 0 \forall x \in R$.

3. Risolvere le seguenti disequazioni.

a) $x - 2x^2 > 5$;

b) $x^2 + 2x + 3 \geq 0$;

c) $4x^2 - 12x + 9 \leq 0$;

d) $x^2 - 5x + 2 > 0$;

e) $4x^2 - 3x \leq 1$;

f) $(x + 1)(5x + 1) \leq 4x(2 + x)$;

g) $4x(x - 2) < 11 + (x - 4)^2$;

h) $x^2 - 9 \leq 0$;

i) $x^2 < 4\sqrt{2}(x - \sqrt{2})$.

Risposte.

a) Impossibile; b) $\forall x$; c) $x = \frac{3}{2}$; d) $x < \frac{5 - \sqrt{17}}{2}, x > \frac{5 + \sqrt{17}}{2}$; e) $-\frac{1}{4} \leq x \leq 1$; f) $x = 1$;
g) $-3 < x < 3$; h) $-3 \leq x \leq 3$; i) impossibile.

Disequazioni di grado superiore al secondo $P_n(x) > 0$ o $P_n(x) < 0, n > 2$.

Nel caso in cui il polinomio P_n si scompone in fattori di primo e secondo grado, si riportano i segni dei fattori in uno schema, e si conclude in accordo con la regola dei segni del prodotto.

4. Risolvere le seguenti disequazioni.

a) $x^3 - 2x^2 > x - 2$;

b) $(x^2 - 2x - 2)(x^2 + 2x + 3)(1 - x) \geq 0$;

c) $(x^2 + x)(3x + 1)^2(6x^2 + 2) < 0$;

d) $x^3 < -5x - 6$.

Risposte.

a) $-1 < x < 1, x > 2$; b) $x \leq 1 - \sqrt{3}, 1 \leq x \leq 1 + \sqrt{3}$; c) $-1 < x < 0, x \neq -\frac{1}{3}$; d) $x < -1$.

Disequazioni razionali fratte $\frac{A(x)}{B(x)} > 0$ o $\frac{A(x)}{B(x)} < 0$.

Si studia separatamente il segno di $A(x)$ e di $B(x)$, si riportano i segni in uno schema, e si conclude in accordo con la regola dei segni come per il prodotto.

5. Risolvere le seguenti disequazioni.

a) $\frac{3x}{x+2} \geq 1$;

b) $\frac{(5x-2)^3}{x-1} \leq 0$;

c) $\frac{x+1}{x-1} > \frac{1}{2}$;

d) $\frac{2x-3}{x-4} \geq \frac{x}{x-2}$;

e) $\frac{x^2-3}{x^2+3} > \frac{x^2+3}{x^2-3}$;

f) $\frac{2x^2-3}{3x+1} + 3 > 0$.

Risposte.

a) $x < -2, x \geq 1$; b) $\frac{2}{5} \leq x < 1$; c) $x < -3, x > 1$; d) $x < 2, x > 4$; e) $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}, x \neq 0$;
f) $-\frac{9}{2} < x < -\frac{1}{3}, x > 0$.

Sistemi di disequazioni.

L'insieme delle soluzioni è l'intersezione degli insiemi delle soluzioni di ciascuna disequazione del sistema.

6. Risolvere i seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} x^2 - 25 \leq 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} x^2 + 2 \geq 0 \\ \frac{x-2}{x+3} < 0 \\ x > 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} x^2 - 16 \leq 0 \\ x^2 - 3x - 4 \geq 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x^2 - 5x \leq 0 \\ x^2 - 7x + 12 < 0 \\ x + 5 > 0 \end{cases}$;

$$e) \begin{cases} x^2 + 5 \leq 0 \\ x + 4 > 0 \end{cases}$$

Risposte.

a) $-5 < x \leq 5$; b) $0 < x < 2$; c) $-3 < x \leq -1, x = 4$; d) $3 < x < 4$; e) impossibile.

Disequazioni col valore assoluto.

Sono importanti i due casi particolari seguenti.

i) La disequazione $|x| \geq b$

se $b \leq 0$, è verificata $\forall x$,

se $b \geq 0$, è verificata sse $x \leq -b \vee x \geq b$.

ii) La disequazione $|x| \leq b$

se $b < 0$, è impossibile,

se $b \geq 0$, è verificata sse $-b \leq x \leq b$.

7. Risolvere le seguenti disequazioni.

a) $|x + 2| < 1$;

b) $|x^2 - 4x + 2| < 2$;

c) $|x^2 - 4x + 2| \leq 2$;

d) $|2x - 3| > 5$.

e) $|3x - 1| > x$.

Risposte.

a) $-3 < x < -1$; b) $0 < x < 4, x \neq 2$; c) $0 \leq x \leq 4$ d) $x < -1, x > 4$; e) $x < \frac{1}{4}, x > \frac{1}{2}$.

Disequazioni irrazionali.

Per risolvere una disequazione irrazionale è utile ricordare che:

se n è un intero positivo *dispari* allora

$$A^n(x) \geq B^n(x) \Leftrightarrow A(x) \geq B(x),$$

se n è un intero positivo *pari* allora

$$A^n(x) \geq B^n(x) \text{ è equivalente a } A(x) \geq B(x) \text{ solo se } A(x) \geq 0 \text{ e } B(x) \geq 0.$$

Se la disequazione contiene solo un radicale di indice n *dispari*, si isola il radicale e si elevano entrambi i membri a potenza uguale all'indice del radicale, ottenendo una disequazione equivalente.

Se la disequazione contiene solo un radicale di indice n *pari*, si isola il radicale e si deve studiare il segno dell'altro membro prima di elevare entrambi i membri a potenza uguale all'indice del radicale. Ricordiamo inoltre che un radicale di indice pari è reale solo se il radicando è ≥ 0 (*condizione di realtà*), ed è sempre non negativo (quando reale).

Sono importanti i due casi particolari seguenti ($n = 2$).

i) La disequazione $\sqrt{P(x)} \geq b$

se $b \leq 0$, è equivalente a $P(x) \geq 0$ (cdr del radicale);

se $b \geq 0$, è equivalente a $P(x) \geq b^2$.

ii) La disequazione $\sqrt{P(x)} \leq b$

se $b < 0$, è impossibile;

se $b \geq 0$, è equivalente a $0 \leq P(x) \leq b^2$.

8. Risolvere le seguenti disequazioni.

a) $\sqrt{2x+6} < 4$;

b) $\sqrt{-4-x^2+2x}-2 \leq 0$;

c) $\sqrt{x+3} > 2$;

d) $\sqrt[4]{x-3} + \sqrt{2-x} \geq 0$;

e) $\sqrt[3]{x^3+3x+9} > x$;

f) $x - 2\sqrt{x} - 3 > 0$;

g) $x < \sqrt{2-x}$;

h) $\sqrt{x} < x$;

i) $\sqrt{2x-3} < x$;

l) $\sqrt{x^2-4} < |x|$.

Risposte.

a) $-3 \leq x < 5$; b) impossibile; c) $x > 1$; d) impossibile; e) $x > -3$; f) $x > 9$ (porre $\sqrt{x} = t \geq 0$); g) $x < 1$; h) $x > 1$; i) $x \geq \frac{3}{2}$; l) $x \leq -2, x \geq 2$.

ESERCIZI 7. Geometria analitica.

Il piano cartesiano \mathbb{R}^2 .

Teorema di Pitagora. Distanza tra due punti. Punto medio di un segmento.

1. In un sistema di coordinate cartesiane disegnare i seguenti punti:

$$A = (3, 2); B = (0, -1); C = (-3, 0); D = (\sqrt{2}, 2); E = (-2, -2).$$

2. Determinare le lunghezze e le coordinate dei punti medi dei segmenti aventi per estremi le seguenti coppie di punti:

a) $A = (-1, -2), B = (-1, 3);$

b) $A = (-1, -2), B = (1, 1);$

c) $A = (0, -2), B = (-1, 0);$

Risposte.

a) $5, (-1, \frac{1}{2});$ b) $\sqrt{13}, (0, -\frac{1}{2});$ c) $\sqrt{5}, (-\frac{1}{2}, -1).$

3. Disegnare il triangolo di vertici $A = (8, 0), B = (2, 3), C = (8, 6);$ verificare che è isoscele e determinarne area e perimetro.

Risposte.

$$AB = BC = 3\sqrt{5}, \text{ area } 18, \text{ perimetro } 6(\sqrt{5} + 1).$$

4. In un triangolo ABC isoscele i lati AB e BC misurano 20cm e l'altezza condotta dal vertice B misura 10cm . Calcolare l'area del triangolo.

Risposta.

$$100\sqrt{3}\text{cm}^2.$$

Equazione della retta. $ax + by + c = 0$.

Se $b \neq 0$, la retta è non verticale e il numero $m = \frac{-a}{b}$ si dice *pendenza* della retta.

Se $b \neq 0$, comunque si scelgano due punti $P = (x, y)$ e $P_0 = (x_0, y_0)$ che appartengono alla retta, $m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$.

Se $b = 0$, ($a \neq 0$) la retta è verticale e l'equazione, del tipo $x = k$, è soddisfatta da tutti i punti $(k, y), \forall y \in \mathbb{R}$.

Due rette sono *parallele* se hanno la stessa pendenza o sono entrambe verticali.

Due rette non verticali sono *perpendicolari* se le pendenze m e m' soddisfano la relazione $m \cdot m' = -1$.

L'equazione della *retta passante per un punto* $P_0 = (x_0, y_0)$ e di pendenza m è $y = y_0 + m(x - x_0)$.

L'equazione della *retta per due punti* $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ è:

i) $\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$ se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2;$

ii) $x = x_1,$ se $x_1 = x_2$ (retta verticale);

iii) $y = y_1$, se $y_1 = y_2$ (retta orizzontale).

5. Tracciare il grafico delle rette date dalle seguenti equazioni:

- a) $2x - 4 = 0$; b) $3y + 5 = 0$;
c) $x - 2y = 0$; d) $y = 3x - 1$;
e) $y = -x + 1$; f) $4x + 2y - 3 = 0$.

7. Date le equazioni:

- a) $x - 2y + 3 = 0$,
b) $3x + y - 2 = 0$,

si determinino le coordinate dei punti di ascisse:

$$-2, -1, 0, 1, 2, 3,$$

e si disegnino sul piano cartesiano; si verifichi che i punti sono allineati.

8. Scrivere le equazioni delle rette passanti per le seguenti coppie di punti, e disegnarle sul piano cartesiano.

- a) $A = (0, 0)$, $B = (1, 2)$;
b) $A = (0, 3)$, $B = (1, 3)$;
c) $A = (2, 2)$, $B = (1, 4)$;
d) $A = (-3, 1)$, $B = (3, -2)$;
e) $A = (-1, 1)$, $B = (-1, -5)$;

Risposte.

- a) $y = 2x$; b) $y = 3$; c) $y = -2x + 6$; d) $2y = -x - 1$; e) $x = -1$.

9. Scrivere le equazioni delle rette passanti per il punto A e di pendenza m indicati, e disegnarle sul piano cartesiano.

- a) $A = (0, 0)$, $m = 1$;
b) $A = (0, 3)$, $m = -2$;
c) $A = (2, 2)$, $m = 4$;
d) $A = (-3, 1)$, $m = 0$.

Risposte.

- a) $y = x$; b) $y = 3 - 2x$; c) $y = 4x - 6$; d) $y = 1$.

10. Scrivere le equazioni delle rette passanti per il punto dato e rispettivamente parallela e perpendicolare alla retta a fianco indicata.

- a) $A = (0, 1)$, $3x - 4y = 0$;
b) $A = (3, -2)$, $y = 3x + 2$;
c) $A = (2, 5)$, $x = -1$.

Risposte.

- a) $y = \frac{3}{4}x + 1$; $y = -\frac{4}{3}x + 1$; b) $y = 3x - 11$; $y = -\frac{1}{3}x - 1$; c) $x = 2$; $y = 5$.

11. Dato il triangolo di vertici $A = (2, 2)$, $B = (3, 6)$, $C = (6, 1)$

- verificare che è rettangolo in A ;
- verificare che è isoscele;
- determinare il punto medio Q del segmento BC ;
- scrivere l'equazione della retta congiungente A e Q ;
- determinare il baricentro del triangolo.

Risposte.

a) La pendenza della retta per A e B è $m = 4$, quella della retta per A e C è $m' = -\frac{1}{4}$ e $m \cdot m' = -1$;

b) $AB = AC = \sqrt{17}$;

c) $Q = (\frac{9}{2}, \frac{7}{2})$;

d) $5y = 3x + 4$;

e) $Baricentro = A + \frac{2}{3}(Q - A) = \frac{2Q + A}{3} = (\frac{11}{3}, \frac{9}{3})$.

12. Determinare per quale valore di $k \in \mathbb{R}$ la retta di equazione $(2k - 6)x - 2ky + k - 2 = 0$

- è parallela all'asse x ;
- è parallela all'asse y ;
- è parallela alla retta $2x - y = 0$;
- è perpendicolare alla retta $x - y = 0$;
- passa per l'origine;
- passa per il punto $A = (1, -1)$.

Risposte.

a) 3; b) 0; c) -3 ; d) $\frac{3}{2}$; e) 2; f) $\frac{8}{5}$.

13. Interpretare geometricamente i seguenti sistemi e risolverli:

a) $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ -x + 3y = 0 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ -4x + 2y + 7 = 0 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 2x - y + 1 = 0 \\ -4x + 2y - 2 = 0 \end{cases}$.

Risposte.

a) Il sistema ha la soluzione $(-\frac{3}{5}, -\frac{1}{5})$ che è il punto di incidenza delle due rette che rappresentano le equazioni del sistema;

b) il sistema è impossibile perchè le equazioni del sistema sono quelle di due rette parallele, che quindi non hanno punti in comune;

c) il sistema è indeterminato, cioè ha infinite soluzioni, che sono i punti della retta individuata sia dalla prima equazione sia dalla seconda.

15. Determinare le coordinate dei punti di intersezione delle seguenti rette:

a) $2y - 3x + 8 = 0$; $y + 2x - 3 = 0$;

b) $y - x - 6 = 0$; $4y - x - 12 = 0$;

c) $2x + 5y - 1 = 0$; $y + \frac{2}{5}x - 7 = 0$.

Risposte.

a) $(2, -1)$; b) $(-4, 2)$; c) non esiste intersezione.

16. Verificare che le tre rette di equazioni:

$x + 1 = 0$, $-3x + y - 6 = 0$, $y - x - 4 = 0$.

passano per uno stesso punto.

Risposta.

$P = (-1, 3)$.

17. Dire cosa rappresentano geometricamente le seguenti equazioni:

a) $x^2 - 4y^2 = 0$; b) $y^2 = 0$;

c) $x^2 - 1 = 0$; d) $x^2 + 1 = 0$;

e) $x^2 + y^2 = 0$.

Risposte.

a) Due rette incidenti nel piano ($x = 2y$, e $x = -2y$);

b) l'asse x "contato due volte", o anche: due rette coincidenti;

c) due rette parallele ($x = 1$ e $x = -1$);

d) l'insieme vuoto;

e) il punto $(0, 0)$.

La parabola.

E' il luogo geometrico dei punti del piano equidistanti da una retta, detta direttrice, e da un punto fisso, detto fuoco.

L'equazione della parabola con retta direttrice orizzontale è:

$$y = ax^2 + bx + c,$$

Il punto $V = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}\right)$ si chiama *vertice* della parabola e $x = -\frac{b}{2a}$ è l'equazione dell'*asse di simmetria* della parabola.

Se $a > 0$ la parabola ha concavità rivolta verso l'alto, se $a < 0$, verso il basso.

Il punto $(0, c)$ è il punto di intersezione con l'asse y . Gli eventuali punti di intersezione con l'asse x hanno come ascissa le radici reali del polinomio $P(x) = ax^2 + bx + c$. Pertanto, se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$ la parabola interseca l'asse x in due punti distinti, se $\Delta = 0$ interseca l'asse x solo nel vertice, se $\Delta < 0$ non lo interseca mai.

18. Disegnare "per punti" su uno stesso riferimento cartesiano le seguenti parabole:

- a) $y = x^2$, $y = 2x^2$;
 b) $y = x^2$, $y = x^2 + 1$, $y = x^2 - 1$;
 c) $y = x^2$, $y = (x - 1)^2$, $y = (x - 1)^2$.

19. Disegnare le seguenti parabole dopo averne determinato il verso della concavità, le coordinate del vertice e le eventuali intersezioni con gli assi cartesiani.

- a) $y = 4x^2 - 1$; b) $y = 4x - x^2$;
 c) $y = x^2 + 2x + 6$; d) $y = -2x^2 + x - 1$.

20. Scrivere le equazioni delle parabole che passano per i seguenti punti:

- a) $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$, $C = (-2, -3)$;
 b) $A = (1, 5)$, $B = (-1, -3)$, $C = (-4, 0)$.

Risposte.

- a) $y = -x^2 + 1$; b) $y = x^2 + 4x$.

21. Determinare l'equazione della parabola che ha vertice nel punto $V = (\frac{1}{2}, -2)$ e passa per il punto $A = (1, -1)$.

Risposta.

$$y = 4x^2 - 4x - 1.$$

22. Determinare i punti di intersezione della retta $x + y - 3 = 0$ e la parabola $y = \frac{1}{4}x^2$.

Risposta.

$$(2, 1), (-6, 9).$$

La circonferenza.

E' il luogo geometrico dei punti del piano che hanno uguale distanza da un punto fisso detto centro. Tale distanza è detta raggio della circonferenza.

Se il centro è $C = (x_0, y_0)$ e il raggio è r , l'equazione è:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2,$$

e svolgendo i quadrati si ottiene $x^2 + y^2 - 2x_0x - 2y_0y + (x_0^2 + y_0^2 - r^2) = 0$.

Pertanto una equazione del tipo

$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

è l'equazione di una circonferenza *solo se* $a^2 + b^2 - 4c > 0$. In tale caso il centro e il raggio sono:

$$C = \left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right), \quad r = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c}.$$

Se $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c = 0$, l'equazione ha solo la soluzione $(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2})$.

Se $\frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c < 0$ l'equazione non ha soluzioni reali e non è l'equazione di una circonferenza nel piano cartesiano.

23. Dire se le seguenti equazioni rappresentano una circonferenza e in tal caso trovare le coordinate del centro e il raggio.

- a) $x^2 + y^2 - 10x + 8y + 5 = 0$;
 b) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 24 = 0$;
 c) $7x^2 + 7y^2 + 14x - 56y - 25 = 0$;
 d) $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 14 = 0$.

Risposte.

- a) $C = (5, -4), r = 6$; b) no; c) $C = (-1, 4), r = \frac{12}{7}\sqrt{7}$; d) no.

L'ellisse

È il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la somma delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

L'equazione dell'ellisse in forma *canonica* è:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

a e b si chiamano *semiassi* dell'ellisse; i punti di intersezione con gli assi sono $(\pm a, 0)$ e $(0, \pm b)$.

L'iperbole

È il luogo geometrico dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

L'equazione dell'iperbole in forma *canonica* è:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Le rette di equazione $y = \pm \frac{b}{a}x$ cui la curva si avvicina indefinitamente, si chiamano *asintoti* dell'iperbole.

I punti $A_{1,2} = (\pm a, 0)$ si chiamano vertici dell'iperbole.

Se $a = b$ gli asintoti si intersecano ad angolo retto e l'iperbole si dice *equilatera*. Applicando una rotazione di 45° in senso antiorario, si ottiene l'equazione di una *iperbole equilatera riferita ai propri asintoti*:

$$xy = k^2.$$

In questo caso i vertici sono i punti $A_{1,2} = \pm(k, k)$.

24. Interpretare i seguenti sistemi disegnando i luoghi geometrici definiti dalle loro equazioni, quindi risolverli:

- a) $\begin{cases} x - y - 10 = 0 \\ \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases}$;
 b) $\begin{cases} x - y + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$;
 c) $\begin{cases} xy = 1 \\ -2x + y = 1 \end{cases}$;

$$\begin{aligned}
 \text{d)} & \begin{cases} x^2 + y^2 + 4x = 0 \\ x^2 + y^2 + 4x - 8y + 16 = 0 \end{cases} ; \\
 \text{e)} & \begin{cases} y - \frac{1}{x} = 1 \\ x^2 + y^2 - 2y = 1 \end{cases} ; \\
 \text{f)} & \begin{cases} x^2 + y^2 + x + 4y + 4 = 0 \\ x^2 + y^2 - 2x - 2y + 1 = 0 \end{cases} ; \\
 \text{g)} & \begin{cases} x^2 + y^2 + 4y + 4 = 0 \\ x^2 - \frac{1}{2}y^2 - 1 = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

Risposte.

a) Impossibile intersezione tra la retta e l'ellisse di centro $(0, 0)$ e semiassi 4, 2.

b) Due intersezioni $(\frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2}, \frac{1 \pm \sqrt{7}}{2})$ tra la retta e la circonferenza di centro $(0, 0)$ e raggio 2.

c) Due intersezioni $(-1, -1), (\frac{1}{2}, 2)$ tra la retta e l'iperbole equilatera di centro $(0, 0)$ riferita ai propri asintoti.

d) Una intersezione $(-2, 2)$ tra due circonferenze, una di centro $(-2, 0)$ e raggio 2 e una di centro $(-2, 4)$ e raggio 2.

e) Due intersezioni $(1, 2), (-1, 0)$ tra l'iperbole equilatera traslata nel centro $(0, 1)$ e asintoti $x = 0$ e $y = 1$, e la circonferenza di centro $(0, 1)$ e raggio $\sqrt{2}$.

f) Impossibile intersezione tra due circonferenze, una di centro $(-\frac{1}{2}, -2)$ e raggio $\frac{1}{2}$, l'altra di centro $(1, 1)$ e raggio 1.

g) Impossibile intersezione tra il solo punto $(0, -2)$ e l'iperbole di centro $(0, 0)$, vertici $(\pm 1, 0)$ e asintoti $y = \pm\sqrt{2}x$

25. Calcolare:

a) l'area del quadrato inscritto nella circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 9$;

b) l'area del rettangolo inscritto nella circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 5$ e con due vertici di ascissa $x = 1$;

c) l'area del rombo le cui diagonali sono gli assi dell'ellisse di equazione $9x^2 + 4y^2 - 16 = 0$.

Risposte.

a) 18; b) 8; c) $\frac{16}{3}$.

26. Rappresentare in un piano cartesiano i luoghi geometrici definiti dalle seguenti relazioni.

a) $x < y$;

b) $y > 2x$;

c) $y < x^2$;

d) $y > x^2 + 1$;

e) $x^2 + y^2 < 1$;

f) $xy > 0$;

g) $xy < 0$;

h) $xy = 0$;

- i) $xy < 1$;
- l) $x^2 - y^2 < 1$;
- m) $x^2 + y^2 \geq 4$;
- n) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} < 1$;
- o) $x + y > 0$;
- p) $xy > -1$.

ESERCIZI 8. Funzioni reali.

Funzione, dominio, codominio, immagine.

Dati A e B sottoinsiemi di \mathbb{R} (eventualmente coincidenti con R stesso), con *funzione reale di variabile reale* si intende una qualunque legge che ad ogni elemento x di A associa *uno e un solo* elemento $f(x)$ appartenente a B . Si scrive $f : A \rightarrow B$ e si dice che f è definita in A a valori in B .

L'insieme A viene detto *dominio* della funzione, l'insieme B *codominio*; $f(A)$ è l'*immagine* di A mediante f ; si scrive anche $y = f(x)$, dove x è la variabile *indipendente*, y la variabile *dipendente*.

Si dice *grafico* di $f : A \rightarrow B$ l'insieme $\mathfrak{G} = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}$.

Un sottoinsieme G di \mathbb{R}^2 è il grafico di una funzione $y = f(x)$ reale di variabile reale se e solo se ogni retta verticale o non interseca il sottoinsieme G o lo interseca solo una volta (test delle rette verticali).

1. Dire se i seguenti sottoinsiemi del piano \mathbb{R}^2 sono il grafico di una funzione $y = f(x)$.

a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$;

b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y = 0\}$;

c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - y^2 = 0\}$;

d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = 1\}$;

e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y^2 = 0\}$;

f) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| - y = 0\}$;

g) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x - |y| = 0\}$.

Risposte.

a) no; b) sì; c) no; d) no; e) no; f) sì; g) no.

2. Date le seguenti funzioni:

a) $f(x) = \sqrt{3-2x}$, b) $f(x) = \frac{1}{2x+1}$

calcolare:

i) $f(0)$, $f(-3)$, la pendenza della retta passante per i punti

$P = (0, f(0))$ e $Q = (-3, f(-3))$,

ii) $f(a)$, $f(a+b)$, la pendenza della retta passante per i punti

$P = (a, f(a))$ e $Q = (a+b, f(a+b))$.

Risposte.

ai) $\sqrt{3}$, 3 , $-\frac{2}{3}$; aii) $\sqrt{3-2a}$, $\sqrt{3-2a-2b}$, $\frac{\sqrt{3-2a-2b} - \sqrt{3-2a}}{b}$;

bi) 1 , $-\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$; bii) $\frac{1}{2a+1}$, $\frac{1}{2a+2b+1}$, $\frac{-2}{(2a+1)(2a+2b+1)}$.

Funzioni *potenza* $y = x^\alpha$, $\alpha \in R$. *Confronto tra esponenti.*

3. Su uno stesso sistema di riferimento cartesiano, tracciare "per punti" nel primo quadrante i grafici delle seguenti funzioni.

- a) $y = x, y = x^2, y = x^3$;
 b) $y = x, y = \sqrt{x}, y = \sqrt[3]{x}$;
 c) $y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x^2}$.

Funzioni esponenziali $y = a^x, a > 0$. *Confronto tra basi.*

4. Su uno stesso sistema di riferimento cartesiano, tracciare per punti i grafici delle seguenti funzioni.

- a) $y = 2^x, y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;
 b) $y = 2^x, y = 10^x$.

Funzioni logaritmiche $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$. *Confronto tra basi.*

5. Su uno stesso sistema di riferimento cartesiano, tracciare per punti i grafici delle seguenti funzioni.

- a) $y = \log_2 x, y = \log_{0.5} x$;
 b) $y = \log_2 x, y = \log_{10} x$.

6. Determinare il dominio delle seguenti funzioni.

- a) $y = \sqrt[4]{4x - 1}$;
 b) $y = \frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1}$;
 c) $y = \sqrt{3 - x} + \sqrt{|x - 4|}$;
 d) $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$;
 e) $y = \sqrt[3]{\frac{x - 2}{x + 4}}$;
 f) $y = \sqrt{\frac{1}{x} - \frac{1}{x + 1}}$;
 g) $y = 2^{1/x}$;
 h) $y = \log_3(x + 1)$;
 i) $y = \log_{0.2}|x|$.

Risposte.

a) $x \geq \frac{1}{4}$; b) $x \neq -1, 0$; c) $x \leq 3$; d) $x > 0$; e) $x \neq -4$; f) $x < -1, x > 0$; g) $x \neq 0$; h) $x > -1$; i) $x \neq 0$.

Funzioni crescenti, decrescenti.

Una funzione reale di variabile reale f definita in A si dice *crescente* se $\forall x, y \in A, x < y \Leftrightarrow f(x) < f(y)$. Si dice *decrescente* se $\forall x, y \in A, x < y \Leftrightarrow f(x) > f(y)$. Si dice *non decrescente* e *non crescente* se vale la proprietà con la disuguaglianza debole tra le immagini (\leq o \geq).

7. Per ciascuna delle seguenti funzioni, tracciarne un grafico per punti e stabilire se sono funzioni crescenti o decrescenti.

a) $y = \sqrt{x}$, b) $y = x^2$, c) $y = x^3$, d) $y = \frac{1}{x}$, e) $y = |2x|$, f) $y = 2^x$, g) $y = 2^{-x}$, h) $y = \log_{10} x$,

$$i) f(x) = \begin{cases} 2, & x \geq 0 \\ x+2, & -2 < x < 0 \\ -1, & x \leq -2 \end{cases}; \quad h) f(x) = \begin{cases} x, & \text{se } x < 0 \\ x-3, & \text{se } x \geq 0 \end{cases}.$$

Risposte.

a) crescente; b) nè crescente, nè decrescente; c) crescente; d) nè crescente, nè decrescente; e) nè crescente, nè decrescente; f) crescente; g) decrescente; h) crescente; i) non decrescente
h) nè crescente, nè decrescente.

Funzione pari, dispari.

Una funzione reale di variabile reale f definita in A si dice *pari* se $\forall x \in A \quad f(x) = f(-x)$, *dispari* se $\forall x \in A \quad f(x) = -f(-x)$.

8. Stabilire se le seguenti funzioni sono pari o dispari.

a) $y = x + 1$; b) $y = x^2 + 1$; c) $y = \frac{1}{x}$; d) $\sqrt{x^3}$; e) $y = 3x$; f) $y = |x| + 7$; g) $y = 3$; h) $y = \log_2(|x| + 2)$; i) $y = 2^x + 3$.

Risposte.

a) nè pari, nè dispari; b) pari; c) dispari; d) dispari; e) dispari; f) pari; g) pari; h) pari; i) nè pari, nè dispari..

Traslazioni, dilatazioni, simmetrie..

9. Data la funzione $f(x) = |x|$,

a) scrivere l'espressione delle seguenti funzioni:

$$\begin{aligned} i) & y = f(2x), y = 4f(x), \\ ii) & y = f(-x), y = -f(x), \\ iii) & y = f(x) + 3, y = f(x) - 3, \\ vi) & y = f(x + 1), y = f(x - 1), \\ v) & y = |f(x)|, y = f(|x|); \end{aligned}$$

b) tracciare il grafico di $y = f(x)$ e delle funzioni di cui al punto b), sullo stesso sistema di riferimento per ciascuna coppia indicata.

10. Fare l'esercizio precedente per le seguenti funzioni:

$$f(x) = \frac{1}{x}, f(x) = \sqrt{x}, f(x) = x^3, f(x) = 2^x.$$

ESERCIZI 9. Equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche.*Linguaggio e notazioni:* a^x esponenziale di base a , $a > 0$, e di esponente $x \in \mathbb{R}$. $\log_a x$ logaritmo in base a , $a > 0$ e $a \neq 1$, e di argomento x , $x > 0$.Logaritmo come operazione inversa dell'esponenziale: Sia $a > 0$ e $a \neq 1$, allora

$$a^{\log_a x} = x, \forall x > 0, \quad \log_a a^x = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Basi particolari: base 10 : il logaritmo in base 10 di x si indica $\text{Log } x$ (lettera maiuscola).Base naturale $e = 2.71828\dots$ (numero reale irrazionale, ovvero decimale infinito non periodico).Il numero e è l'unica base a che soddisfa la proprietà: $a^x \geq x + 1, \forall x \in \mathbb{R}$.Con *logaritmo naturale* di x , $x > 0$, si intende la base e e si indica $\log x$ oppure $\ln x$.*Proprietà degli esponenziali (proprietà delle potenze):*Siano $a > 0$, $b > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$; allora

$$(a^x)^y = a^{xy},$$

$$a^x a^y = a^{x+y}, \quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y},$$

$$a^x b^x = (a \cdot b)^x, \quad \frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x.$$

*Proprietà dei logaritmi:*Siano $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$; allora

1. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$;
2. $\log_a x^r = r \log_a x$, $\forall r \in \mathbb{R}$;
3. $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ (cambiamento della base).

Da queste si ottiene:

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y;$$

$$\log_{1/a} x = -\log_a x;$$

Inoltre: $\forall a > 0$,

$$a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R},$$

$$a^0 = 1.$$

 $\forall a > 0$, $a \neq 1$,

$$\log_a 1 = 0, \quad \log_a a = 1,$$

$$\log_a \frac{1}{a} = -1, \quad \log_{1/a} a = -1.$$

Metodo di risoluzione delle equazioni esponenziali/logaritmiche:

Sia $a > 0$, $a \neq 1$, $x, y, c \in \mathbb{R}$; allora

- i) $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$;
- ii) se $c \leq 0$, allora l'equazione $a^x = c$ è *impossibile*;
- iii) se $c > 0$, allora $a^x = c \Leftrightarrow x = \log_a c$;
- iv) se $x > 0, y > 0$, allora $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$;
- v) se $x > 0$, allora $\log_a x = c \Leftrightarrow x = a^c$.

1. Risolvere le seguenti equazioni esponenziali.

- a) $3^x = -4$;
- b) $\frac{2^{x+1}}{8} = \frac{64^x}{2} : 4^x$;
- c) $2^{2x} + 2^{x+1} - 3 = 0$;
- d) $2^{x^2} : 4 = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;
- e) $\sqrt[5]{3^{x-1}} \sqrt{3^{2-x}} = 3^{1/2}$;
- f) $3^{4x} = 5$;
- g) $5^x = \frac{1}{\sqrt[6]{25}}$.

Risposte.

- a) Impossibile; b) $x = -\frac{1}{3}$; c) $x = 0$; d) $x = -2, x = 1$; e) $x = 5$; f) $x = \frac{1}{4} \log_3 5$; g) $x = -\frac{1}{3}$.

2. Calcolare le seguenti espressioni.

- a) $\log_6 1$;
- b) $\ln e$;
- c) $\log_3 \frac{1}{3}$;
- d) $\log_3 27$;
- e) $\log_{81} 3$;
- f) $\log_{32} \frac{1}{2}$;
- g) $\log_{10} 100$;
- h) $\log_{1/2} 2$;
- i) $\log_3 0$;
- l) $\log_4 64$;
- m) $\log_5 \frac{1}{125}$;
- n) $\log_4 8$;

Risposte.

- a) 0 ($\log_a 1 = 0, \forall a > 0, a \neq 1$);
- b) 1 ($\log_a a = 1, \forall a > 0, a \neq 1$);

- c) -1 ($\log_a \frac{1}{a} = -1, \forall a > 0, a \neq 1$);
 d) 3 , infatti $27 = 3^3$;
 e) $\frac{1}{4}$, infatti $3 = \sqrt[4]{81}$;
 f) $-\frac{1}{5}$, infatti $2 = 32^{1/5}$ e $\log_a b^c = c \log_a b, \forall a > 0, a \neq 1, b > 0$;
 g) 2 ;
 h) -1 , infatti $\log_{1/a} b = -\log_a b, \forall a > 0, a \neq 1, b > 0$;
 i) non esiste, infatti $a^x > 0, \forall a > 0$;
 l) 3 ; m) -3 ; n) $\frac{3}{2}$ (scrivere 8 come $2 \cdot 4$ e applicare le proprietà dei logaritmi).

3. Scrivere le seguenti espressioni come somma di logaritmi ($a, b, c > 0$):

- a) $\log \frac{\sqrt[4]{c^5} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt[3]{a}}$
 b) $\log \sqrt[4]{\frac{a+3b}{a+b}}$

Risposte.

- a) $\frac{5}{4} \log c + \frac{1}{2} \log b - \frac{1}{7} \log a$;
 b) $\frac{1}{4} \log(a+3b) - \frac{1}{4} \log(a+b)$.

4. Scrivere le seguenti espressioni come un unico logaritmo ($x, y, z > 0$):

- a) $\log 13 - \log 26 + \frac{1}{2} \log 9 - 2 \log 3$;
 b) $4 \log x - \frac{1}{2} \log y^2 + \frac{5}{4} \log z$.

Risposte.

- a) $\log \frac{1}{6}$; b) $\log \frac{x^4 \sqrt[4]{z^5}}{y}$.

5. Dire se le seguenti uguaglianze sono false o vere:

- a) $\log_{1/3}(3) = -1$;
 b) $\log_{1/3}(27) = 3$;
 c) $\log 6 = \log 2 \cdot \log 3$;
 d) $(\log 2)^2 = \log 4$;
 e) $\frac{\log 2}{\log 4} = \frac{1}{2}$;

f) $\frac{1}{2} \log x^2 = \log x$;

g) $\log_4 x = -\frac{1}{3} \log_4 \frac{1}{x^3}$;

h) $\log |x \cdot y| = \log |x| + \log |y|$;

i) $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$;

l) $\log \frac{x}{y} = \log |x| - \log |y|$;

m) $\log_7 6 < 0$.

Risposte.

a)V ; b)F (-3); c)F ($\log 6 = \log 2 + \log 3$) ; d)F ; e)V;f)F (vera solo se $x > 0$; è vera invece: $\frac{1}{2} \log x^2 = \log |x|$) ;g)V (hanno entrambi significato per $x > 0$, e per tali x vale l'uguaglianza);

h)V ; i)F ;

l)F (vera solo se $\frac{x}{y} > 0$; è vera invece: $\log \left| \frac{x}{y} \right| = \log |x| - \log |y|$);m)F ($0 < \log_7 6 < 1$).

6. Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche. Osservare che occorre la "verifica" delle soluzioni trovate.

a) $\log_3 \frac{x^2}{4} = 3$;

b) $\log_2 x + \log_2(x - 2) = 3$;

c) $2 \log(-x) + \log(x - 3) = \log(x + 1)^2$;

d) $(\log_5 x)^2 + 5 \log_5 x + 6 = 0$;

e) $\log_{1/2} |2x - 1| = 1$;

f) $3 \log_8 x - 2 = 0$;

g) $5 (\log_3 x)^2 + 2 \log_3(3x) - 1 = 0$;

Risposte.

a) $x = \pm 6\sqrt{3}$; b) $x = 4$; c) impossibile; d) $x = \frac{1}{25}$, $x = \frac{1}{125}$;e) $x = \frac{1}{4}$, $x = \frac{3}{4}$; f) $x = 4$; g) impossibile.

Metodo di risoluzione delle disequazioni esponenziali/logaritmiche.

Se $a > 1$ $a^x > a^y \Leftrightarrow x > y$,

se $0 < a < 1$ $a^x > a^y \Leftrightarrow x < y$,

da cui segue che $\forall x, y > 0$

$$\text{se } a > 1 \quad \log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y,$$

$$\text{se } 0 < a < 1 \quad \log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y.$$

Inoltre si ricordi che prima di risolvere una disequazione logaritmica occorre porre il campo di esistenza (argomento del logaritmo positivo).

7. Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali.

a) $3^x < -4$;

b) $5^x > 3$;

c) $2^{x+1} < 4^x$;

d) $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > 2$;

e) $2^{2x} + 2^{x+1} - 3 < 0$;

f) $10^{-x} > -2$;

g) $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^x$;

h) $\sqrt[5]{3^{x-1}} > 1$;

i) $e^x - 3e^{-x} < 2$;

l) $\frac{1}{5^x} - 5^{x+1} < 4$;

m) $2^{2x} + 5 \cdot 2^x > 0$;

n) $3^x - 5 \cdot 3^{-x} < 4$.

Risposte.

a) impossibile; b) $x > \log_5 3$; c) $x > 1$; d) $x < -\frac{1}{3}$; e) $x < 0$; f) $\forall x$;

g) $x < -1, x > 0$; h) $x > 1$; i) $x < \log 3$; l) $x > -1$; m) $\forall x$; n) $x < \log_3 5$.

8. Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche.

a) $\log_3 \frac{x^2}{4} > 3$; b) $\log_2 3x > 0$;

c) $\log_2 x + \log_2(x-2) < 3$;

d) $\log x + \log(x+2) > 0$;

e) $\log_{1/2} |2x-1| \geq 1$;

f) $3 \log_8 x - 2 > 0$;

g) $3(\log_3 x)^2 + 2 \log_3(3x) - 3 < 0$;

h) $\log_2(x-1) - \log_4(x-1) > 2$.

Risposte.

a) $x < -6\sqrt{3}, x > 6\sqrt{3}$; b) $x > \frac{1}{3}$; c) $2 < x < 4$ (attenzione al campo di esistenza); d) $x > -1 + \sqrt{2}$;

e) $\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{3}{4}, x \neq \frac{1}{2}$; f) $x > 4$; g) $\frac{1}{3} < x < \sqrt[3]{3}$; h) $x > 17$.

ESERCIZI 10. Trigonometria.*Angoli e loro misura.*

Due semirette a e b di comune origine O dividono il piano in due parti, ciascuna detta angolo \widehat{ab} . Sono noti gli angoli fondamentali: angolo nullo, angolo retto, angolo piatto, angolo giro. Con abuso di linguaggio si identifica l'angolo con la sua misura. L'angolo (orientato) \widehat{ab} è per convenzione positivo se il movimento per portarsi dalla posizione iniziale a alla posizione finale b avviene in verso antiorario, negativo altrimenti.

L'angolo di un *grado* è la trecentosessantesima parte di un angolo giro. La misura in gradi dell'angolo giro è 360° .

L'angolo di un *radiante* è quell'angolo che su una circonferenza (di centro nell'origine dell'angolo) intercetta un arco di lunghezza pari al raggio. La misura in radianti dell'angolo giro è 2π ($\pi = 3,141592\dots$ numero irrazionale).

Più in generale, la misura α in radianti di un angolo al centro è il rapporto

$$\alpha = \frac{l}{r},$$

dove l è la misura dell'arco sotteso dall'angolo al centro e r è il raggio della circonferenza.

Trasformazione delle misure.

Se α è la misura in radianti di un angolo e z° la sua misura in gradi si ha:

$$\alpha : z^\circ = \pi : 180^\circ$$

(π e 180° sono le misure in radianti e in gradi dell'angolo piatto).

1. Trasformare le seguenti misure da gradi in radianti.

a) 45° ; b) 60° ; c) 90° ; d) 135° ; e) 150° ; f) 270° ; g) 540° .

Risposte.

a) $\frac{\pi}{4}$; b) $\frac{\pi}{3}$; c) $\frac{\pi}{2}$; d) $\frac{3}{4}\pi$; e) $\frac{5}{6}\pi$; f) $\frac{3}{2}\pi$; g) 3π .

2. Trasformare le seguenti misure da radianti in gradi.

a) $\frac{2}{3}\pi$; b) $\frac{5}{12}\pi$; c) $\frac{\pi}{18}$; d) $\frac{7}{4}\pi$; e) π .

Risposte.

a) 120° ; b) 75° ; c) 10° ; d) 315° ; e) 180° .

3. Risolvere i seguenti problemi.

a) In una circonferenza di raggio 3 m, quale angolo al centro sottende un arco di lunghezza 2 m?

b) In una circonferenza di raggio 4 m, quanto è lungo l'arco sotteso da un angolo al centro di $\frac{5}{6}\pi$?

c) In una circonferenza, un arco di lunghezza 2π m sottende un angolo di 120° ; quanto misura il raggio?

Risposte.

a) $\frac{2}{3}$ (radianti); b) $\frac{10}{3}\pi$ m.;

c) 3 m (attenzione: occorre prima trasformare i gradi in radianti).

Seno, coseno, tangente.

Sia P un punto appartenente alla circonferenza C di centro $(0, 0)$ e raggio 1 (*circonferenza trigonometrica*), e sia α l'angolo positivo descritto dal semiasse positivo delle ascisse per sovrapporsi alla semiretta OP .

Allora il punto P ha coordinate

$$P = (\cos \alpha, \sin \alpha).$$

Periodicità. Poichè la circonferenza C è lunga 2π , sommando 2π a α si fa compiere a P un giro completo e si giunge allo stesso punto P .

Quindi, per ogni α ,

$$\sin \alpha = \sin(\alpha + 2\pi) \quad \text{e} \quad \cos \alpha = \cos(\alpha + 2\pi).$$

Si dice che le funzioni coseno e seno sono periodiche con periodo 2π .

Per $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, si definisce la tangente di α :

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha},$$

e tale funzione è periodica con periodo π :

$$\tan \alpha = \tan(\alpha + \pi).$$

Relazioni trigonometriche e proprietà.

- $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$;
- $\sin \alpha = \sin(\alpha + 2k\pi)$, $\cos \alpha = \cos(\alpha + 2k\pi)$, $\tan \alpha = \tan(\alpha + k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$, $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$;
- se $-\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ il seno cresce da -1 a 1 ;
- se $\frac{\pi}{2} \leq \alpha \leq \frac{3}{2}\pi$ il seno decresce da 1 a -1 ;
- se $0 \leq \alpha \leq \pi$ il coseno decresce da 1 a -1 ;
- se $\pi \leq \alpha \leq 2\pi$ il coseno cresce da -1 a 1 ;
- se $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ la tangente cresce da $-\infty$ a $+\infty$;
- $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos \alpha$;
- $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$;
- $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$;
- $\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan \alpha \pm \tan \beta}{1 \mp \tan \alpha \tan \beta}$, $\alpha, \beta, (\alpha \pm \beta) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$;
- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$;
- $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$;

- in un *triangolo rettangolo*

i) la misura di un cateto è uguale a quella dell'ipotenusa per il seno dell'angolo opposto, oppure per il coseno dell'angolo adiacente;

ii) la misura di un cateto è uguale a quella dell'altro cateto per la tangente dell'angolo opposto.

4. Completare la seguente tabella:

| α | $\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | $\tan \alpha$ |
|------------------|----------------------|-----------------------|-----------------------|
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 1 |
| $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $\sqrt{3}$ |
| $\frac{\pi}{2}$ | 1 | 0 | |
| $\frac{2}{3}\pi$ | $\frac{1}{2}$ | | |
| $\frac{3}{4}\pi$ | | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | |
| $\frac{5}{6}\pi$ | | | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ |

| α | $\sin \alpha$ | $\cos \alpha$ | $\tan \alpha$ |
|-------------------|----------------|----------------------|---------------|
| π | 0 | 1 | 0 |
| $\frac{7}{6}\pi$ | $-\frac{1}{2}$ | | |
| $\frac{5}{4}\pi$ | | | 1 |
| $\frac{4}{3}\pi$ | | | |
| $\frac{3}{2}\pi$ | 1 | | |
| $\frac{5}{3}\pi$ | | | |
| $\frac{7}{4}\pi$ | | | |
| $\frac{11}{6}\pi$ | | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | |

5. Risolvere i seguenti problemi.

a) Un cavo viene teso dal vertice di un palo, alto 20 metri, al suolo e forma con esso un angolo di 30° ; calcolare la lunghezza del cavo.

b) Un campanile proietta al suolo un'ombra lunga 30 metri; sapendo che il campanile è alto 30 metri, calcolare l'angolo formato dai raggi del sole col piano orizzontale.

c) In un triangolo rettangolo l'ipotenusa misura $10\sqrt{3}$ e il seno di un angolo interno è uguale a $\frac{\sqrt{3}}{3}$; calcolare il perimetro del triangolo.

Risposte.

a) 40 metri; b) 45° ; c) $10(\sqrt{3} + \sqrt{2} + 1)$.

6. Tracciare il grafico per punti delle seguenti funzioni:

a) $y = \sin x, -\pi \leq x \leq \pi$;

b) $y = \cos x, -\pi \leq x \leq \pi$;

c) $y = \tan x, -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

7. Verificare le seguenti identità trigonometriche.

$$a) \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \tan^2 \frac{x}{2};$$

$$b) \tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x};$$

$$c) \cos(3x) = 4 \cos^3 x - 3 \cos x;$$

$$d) \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \tan \frac{x}{2}.$$

8. Trovare le relazioni tra i valori $\sin \beta$ e $\sin \alpha$, $\cos \beta$ e $\cos \alpha$, $\tan \beta$ e $\tan \alpha$ nei seguenti casi:

$$a) \beta = -\alpha;$$

$$b) \beta = \pi - \alpha;$$

$$c) \beta = \pi + \alpha.$$

Risposte.

$$a) \sin(-\alpha) = -\sin \alpha; \cos(-\alpha) = \cos \alpha; \tan(-\alpha) = -\tan \alpha;$$

$$b) \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha; \cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha; \tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha;$$

$$c) \sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha; \cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha; \tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha.$$

9. Trovare le relazioni tra i valori $\sin \beta$ e $\cos \alpha$, $\cos \beta$ e $\sin \alpha$, $\tan \beta$ e $\tan \alpha$ nei seguenti casi:

$$a) \beta = \frac{\pi}{2} + \alpha;$$

$$b) \beta = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

Risposte.

$$a) \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = \cos \alpha; \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin \alpha;$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\frac{1}{\tan \alpha} \quad (\alpha \neq k\frac{\pi}{2});$$

$$b) \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos \alpha; \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha;$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \frac{1}{\tan \alpha} \quad (\alpha \neq k\frac{\pi}{2}).$$

10. Dire se le seguenti uguaglianze sono vere o false.

$$a) \cos^2 1 - \sin^2 1 = \cos 2;$$

$$b) \sin(0) = 1;$$

$$c) \cos 1 = 0;$$

$$d) \sin(x^2) + \cos(x^2) = 1;$$

$$e) \cos\left(3 - \frac{\pi}{2}\right) = \sin(\pi - 3);$$

$$f) \sqrt{\cos 4} = \cos 2;$$

$$g) \sqrt{\cos^2 2} = -\cos 2;$$

$$h) \sqrt{\sin^2 2} = \sin 2.$$

Risposte.

a) V; b) F; c) F; d) F; e) V; f) F; g) V; h) V.

11. Stabilire se le seguenti funzioni sono pari o dispari.

a) $y = \sin x$; b) $y = \cos x$; c) $y = \cos(2x + 1)$; d) $y = \tan(2x)$;

e) $y = \sin^2(3x)$; f) $y = 2^{\sin x}$; g) $y = 2^{\cos x}$; h) $y = |\sin x|$.

Risposte.

a) dispari; b) pari; c) nè dispari nè pari; d) dispari; e) pari; f) nè dispari nè pari; g) pari; h) pari.

12. Risolvere le seguenti equazioni trigonometriche.

a) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

b) $\cos x = 1$;

c) $\sin^2 x + \cos x = 2$;

d) $2 \sin^2 x - 3 \sin x - 2 = 0$;

e) $2 \cos^2 x + 3 \sin x = 0$;

f) $\cos^2 x = \cos x$;

g) $\sin x + \cos x = 0$;

h) $\sin x = \cos x$;

i) $\tan x = \sin x$;

l) $\tan^2 x = 3$;

m) $2 \cos(x - \frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$;

n) $2 \sin^2 x - 1 = 0$;

o) $\sin(2x) = \cos x$;

p) $2 \cos^2 x = 1$;

q) $\cos(2x) = \sin x$;

r) $\tan^2 x = 1$

Risposte ($k \in \mathbb{Z}$).

a) $x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, x = \frac{3}{4}\pi + 2k\pi$;

b) $x = 2k\pi$;

c) impossibile;

d) $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$;

e) $x = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi, x = \frac{11}{6}\pi + 2k\pi$;

f) $x = 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + k\pi$;

g) $x = \frac{3}{4}\pi + k\pi$;

h) $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$;

i) $x = k\pi$;

l) $x = \pm \frac{\pi}{3} + k\pi$;

m) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$;

n) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$;

o) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$;

p) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$;

q) $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi, x = \frac{3}{2}\pi + 2k\pi$;

r) $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

13. Supponendo $0 \leq x \leq 2\pi$, risolvere le seguenti disequazioni trigonometriche.

a) $\sin x < -2$; b) $\sin x \leq \frac{1}{2}$;

c) $\cos x > -1$; d) $\cos x > \frac{1}{2}$;

- e) $|\sin x| > 0$; f) $\sin x \leq \cos x$;
 g) $\sin x + \cos x < 0$; h) $\sin^2 x - \sin x \leq 0$.

Risposte.

- a) Impossibile; b) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \leq x \leq 2\pi$; c) $x \neq \pi$;
 d) $0 \leq x < \frac{\pi}{3}, \frac{5}{3}\pi < x \leq 2\pi$; e) $x \neq 0, \pi, 2\pi$; f) $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}, \frac{5}{4}\pi \leq x \leq 2\pi$;
 g) $\frac{3}{4}\pi < x < \frac{7}{4}\pi$; h) $0 \leq x \leq \pi$.

14. Supponendo $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$, risolvere le seguenti disequazioni trigonometriche..

- a) $\tan x < -1$; b) $\tan x \leq \sqrt{3}$;
 c) $\tan^2 x \geq 1$; d) $\tan x > \frac{\sqrt{3}}{3}$;

Risposte.

- a) $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4}$; b) $-\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{\pi}{3}$; c) $-\frac{\pi}{2} < x \leq -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$; d) $\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{2}$.

🔗 Esempio di Test

(1) Se A ha 4 elementi e B ha 3 elementi allora...

- (a) $B \subset A \times B$.
- (b) $A \subset A \times B$.
- (c) $A \times B$ ha 12 elementi.
- (d) $A \times B = B \times A$.

(2) Siano $A = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è pari}\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} : x \text{ è divisibile per } 3\}$. Allora:

- (a) $A \subset B$.
- (b) $B \subset A$.
- (c) $A \cap B = \emptyset$.
- (d) $A \cap B \neq \emptyset$.

(3) La frazione $\left(\frac{1}{\frac{2}{3} - \frac{5}{6}}\right) \cdot \frac{5}{3}$ è uguale a

- (a) -5
- (b) $-\frac{5}{18}$
- (c) $\frac{2}{3}$
- (d) -10

(4) Se un oggetto è in vendita con uno sconto del 20%, pagandolo 56 euro alla cassa quale era il suo prezzo prima dello sconto?

- (a) 82 euro
- (b) 70 euro
- (c) 74 euro
- (d) 98 euro

(5) Indicare la proposizione vera

- (a) $\sqrt{x^2} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}$
- (b) $\sqrt{x^2} > 0, \forall x \in \mathbb{R}$
- (c) $\sqrt{x^2} = x, \forall x \in \mathbb{R}$
- (d) $\sqrt{x^2} = \pm x, \forall x \in \mathbb{R}$

(6) Siano $x \neq 0, y \neq 0$; l'espressione $\frac{4x^3}{\frac{y^{-2}}{8x^{-3}}}$ è uguale a

- (a) $\frac{x^6 y^5}{2}$
- (b) $\frac{x^9 y^6}{2}$
- (c) $\frac{2y^5}{x^9}$
- (d) $\frac{yx^6}{2}$

(7) Per quale k reale il polinomio $2x^3 + x^2 + k$ risulta divisibile per $(x - 1)$?

- (a) 1
- (b) 3
- (c) -3
- (d) -2

(8) Siano $a \neq 0, b \neq 0, a \neq b$; l'espressione

$$\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) : \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - 2\right) \cdot (b^2 - a^2)$$

è uguale a

- (a) $a + b$
- (b) $a - b$
- (c) $\frac{b}{a}$
- (d) $-a - b$

(9) Le soluzioni reali dell'equazione $(x - 2)^3 = 27$ sono

- (a) $x = 5$
 (b) $x = 5, x = -1$
 (c) $x = -1$
 (d) $x = 1$

(10) Quante coppie di numeri reali sono soluzione del sistema $\begin{cases} ab = 2 \\ a^2 + ab - 2 = 0 \end{cases}$?

- (a) nessuna
 (b) una
 (c) due
 (d) tre

(11) Per quali $k \in \mathbb{R}$ la disequazione $kx - 4x + 5 > 0$ ha soluzioni $x < \frac{5}{4 - k}$?

- (a) $k > 4$
 (b) $k < 4$
 (c) $k \neq 4$
 (d) $k = 4$

(12) Le soluzioni della disequazione $\frac{3 - x}{(2x - 4)(x - 3)} > 0$ sono

- (a) $x > 2, x \neq 3$
 (b) $2 < x < 3$
 (c) $x < 2$
 (d) $x > 2$

(13) La retta passante per il punto $P = (-3, 1)$ e parallela alla retta di equazione $x - 2y + 7 = 0$ ha equazione

- (a) $-2x + y - 4 = 0$
 (b) $2x - y - 4 = 0$
 (c) $-x + 2y - 5 = 0$
 (d) $x - 2y - 5 = 0$

(14) La parabola di equazione $y = x^2 - 3$ e la retta di equazione $y = c$ hanno due intersezioni se e solo se

- (a) $c < 3$
 (b) $c > 3$
 (c) $c < -3$
 (d) $c > -3$

(15) Sia $f(x) = 3^{x+1}$ e $g(x) = 3^x$. Allora

- (a) $g(x) = f(x) + 3$
 (b) $f(x) = g(3x)$
 (c) $g(x) = f(x + 1)$
 (d) $f(x) = g(x + 1)$

(16) Il dominio di $f(x) = \frac{1}{\sqrt{8 - 2x^2}}$ è

- (a) $-2 < x < 2$
 (b) $x > 2$
 (c) $-2 \leq x \leq 2$
 (d) $x \neq \pm 2$

(17) Le soluzioni dell'equazione $3 \cdot 4^{x+1} = 192$ sono

- (a) $x = 2$
 (b) $x = 3$
 (c) $x = 4$
 (d) $x = 5$

(18) Il numero $\log_{10}(0.001)$ è uguale a

- (a) 10^{-3}
- (b) 10^3
- (c) -3
- (d) $-\log_{10} 3$

(19) La funzione $y = \cos x$, con $0 < x < \pi$, è

- (a) decrescente
- (b) nè crescente nè decrescente
- (c) costante
- (d) crescente

(20) Il dominio della funzione $f(x) = \log |\sin x|$ è

- (a) $x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- (b) $2k\pi < x < \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- (c) $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$
- (d) $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$