RICHIAMI di MATEMATICA
ESERCIZI: equazioni algebriche e sistemi

Identità: uguaglianza tra due espressioni letterali verificata per ogni valore attribuito alle variabili nel testo.

Esempi:

i) $xy\sqrt{x} = y\sqrt{x^3}, x \geq 0;$
ii) $-x = \sqrt{x^2}, x \leq 0;$
iii) $\dfrac{x^2 - y^2}{x + y} = x - y, x \neq -y.$

Equazione: uguaglianza tra due espressioni letterali che può essere vera o falsa a seconda dei valori attribuiti alle variabili.

Esempi:

i) $-x = \sqrt{x^2},$ vera se $x \leq 0$, falsa se $x > 0$;
ii) $3x - 2 = 0,$ vera se $x = \dfrac{2}{3}$, falsa se $x \neq \dfrac{2}{3}$.

Equazioni di primo grado: $ax + b = 0, a \neq 0.$

1. Risolvere le seguenti equazioni.

a) $\dfrac{x-3}{7} - 1 = \dfrac{x-9}{21} + \dfrac{6-x}{3};$
b) $(x - \sqrt{2})(\sqrt{3} - \sqrt{2}) = (x - \sqrt{3})(\sqrt{3} + \sqrt{2});$
c) $\dfrac{x+3}{2} - \dfrac{1}{3}x = 1 + \dfrac{1}{6}x.$

Risposte.
a) 7; b) $\dfrac{5}{4}\sqrt{2}$; c) impossibile.

2. Risolvere le seguenti equazioni dipendenti da parametro (x incognita).

a) $ax - 3 = 2x;$
b) $\dfrac{x-b}{a} + \dfrac{x-a}{b} = 2,\ (a \neq 0, b \neq 0).$

Risposte.
a) Se $a \neq 2, x = \dfrac{3}{a-2}$; se $a = 2$, impossibile.
b) Se $a + b = 0, \forall x$; se $a + b \neq 0, x = a + b.$

Equazioni di secondo grado. Formula ridotta. Relazione tra i coefficienti e le radici.

3. Risolvere le seguenti equazioni.

a) $4x^2 - 1 = 0$;

b) $2x^2 + 3 = 0$;

c) $x + 6 - x^2 = 0$;

d)$(x-3)^2 + (x-4)^2 = x$;

e) $(t+1)^2 - t(1-t) - (t-2)(t+2) = 4$;

Risposte.
a) $x = \pm\frac{1}{2}$; b) impossibile; c) $x = -2, x = 3$; d) $x = \frac{5}{2}, x = 5$;
e) impossibile.

4. Data l'equazione: $x^2 + kx + k - 1 = 0$, determinare per quali valori reali di k

a) una soluzione è $x = 2$;
b) una soluzione è $x = 0$;
c) la somma delle radici è 2;
d) il prodotto delle radici è 3;
e) le radici sono coincidenti;
f) le radici sono opposte;
g) le radici sono una l'inverso dell'altra.

Risposte.
a) $k = -1$; b) $k = 1$; c) $k = -2$; d) $k = 4$;
e) $k = 2 \quad (\Delta = 0)$; f) $k = 0$ (somma=0); g) $k = 2$ (prodotto $= 1$).

5. Verificare che le seguenti equazioni sono impossibili e trasformare i trinomi in somma di due quadrati.

a) $4x^2 + 2x + 1 = 0$;

b) $9x^2 - 3x + 2 = 0$;

Risposte.

a) $\left(2x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$; b) $(3x - \frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2$.

Equazioni razionali fratte.

$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0 \wedge B(x) \neq 0.$

6. Risolvere le seguenti equazioni.

a) $\dfrac{1}{x^2-1} = \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}$;

b) $\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{x^2+x}$;

c) $\dfrac{4x+a}{x+4a} = \dfrac{4x-a}{x-a}$;

Risposte.
a) $x = \dfrac{1}{2}$; b) impossibile; c) se $a = 0 : \forall x \neq 0$; se $a \neq 0 : x = \dfrac{a}{6}$.

Equazioni binomie: $x^n - b = 0, n \in N, n \geq 2$. Le eventuali soluzioni si dicono *radici (n-esime) algebriche di b.*

i) $x^n = 0 \Leftrightarrow x = 0$;

ii) se n è dispari, allora $x^n = b \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{b}$;

iii) se n è pari e $b > 0$, allora $x^n = b \Leftrightarrow x = \pm\sqrt[n]{b}$;

iv) se n è pari e $b < 0$, allora $x^n = b$ non ha soluzioni.

Si ricorda che, se b è negativo e n è dispari, si ha per definizione $\sqrt[n]{b} = -\sqrt[n]{|b|}$.

7. Risolvere le seguenti equazioni.

a) $x^3 = 27$;

b) $x^4 = 81$;

c) $x^4 + 16 = 0$;

d) $(x+2)^4 = 4$.

Risposte.
a) $x = 3$; b) $x = \pm 3$; c) impossibile; d) $x = -2 \pm \sqrt{2}$.

Equazioni biquadratiche $(ax^4 + bx^2 + c = 0, a \neq 0)$.
Si pone $x^2 = t$, con $t \geq 0$.

8. Risolvere le seguenti equazioni.

a) $x^4 - 10x^2 + 9 = 0$;

b) $2x^4 + 5x^2 + 2 = 0$;

c) $x^4 + x^2 + 2 = 0$;

d) $2x^4 + 3x^2 - 2 = 0$;

e) $2x^4 + 3x^2 + 1 = 0$;

f) $2x^4 - 3x^2 + 1 = 0$.

Risposte.

a) $x = \pm 1, x = \pm 3$; b)impossibile; c) impossibile; d)$x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; e) impossibile; f) $x = \pm 1, x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$.

9. Risolvere le seguenti equazioni.

a) $2x^4 + x^3 - 2x^2 - x = 0$;

b) $3x^3 + 7x + 10 = 0$;

c) $(x^4 + 2)\,(x - \sqrt{2})(x^2 + 2x + 1) = 0$;

d) $(x + 3)^4 = (x + 2)^2$.

Risposte.

a) $x = \pm 1, x = -\frac{1}{2}, x = 0$; b) $x = -1$, (usa Ruffini...); c) $x = -1, x = \sqrt{2}$; d) $= \dfrac{-7 \pm \sqrt{5}}{2}$.

Sistemi di equazioni

Metodo di sostituzione e metodo di riduzione. *Sistema determinato, indeterminato, impossibile.*

10. Trovare le coppie (x, y) soluzione dei seguenti sistemi.

a) $\begin{cases} 2x + 5y & = 0 \\ 4x + 3y & = 7 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} 2x - 3y & = 1 \\ -4x + 6y & = 7 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} 3x - 8y & = 6 \\ -\frac{3}{2}x + 4y & = -3 \end{cases}$;

d) $\begin{cases} x + y & = 1 \\ xy & = -2 \end{cases}$;

e) $\begin{cases} x - y^2 & = 0 \\ xy + x - 2y & = 0 \end{cases}$;

f) $\begin{cases} x^2 + y^2 & = 1 \\ y - \sqrt{3}x & = 0 \end{cases}$;

g) $\begin{cases} kx + y &= 1 \\ 3x + y &= 2 \end{cases}$;

Risposte.
a) $\left(\frac{5}{2}, -1\right)$; b) impossibile; c) $\left(k, \frac{3k-6}{8}\right)$ $, \forall k \in R$; d) $(-1, 2)\,; (2, -1)$;
e) $(0, 0)\,; (1, 1); (4, -2)$; f) $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;
g) se $k \neq 3$, $\left(\frac{1}{3-k}, \frac{3-2k}{3-k}\right)$; se $k = 3$, impossibile.

Equazioni col valore assoluto.

i) $|A(x)| = 0 \Leftrightarrow A(x) = 0$;

ii) se $b > 0$, $|A(x)| = b \Leftrightarrow A(x) = \pm b$;

iii) se $b < 0$, $|A(x)| = b$ non ha soluzioni.

11. Dire se le seguenti equivalenze sono vere o false.
a) $|A(x)| = B(x) \Leftrightarrow A(x) = \pm B(x)$;

b) $|A(x)| = |B(x)| \Leftrightarrow A(x) = \pm B(x)$;

c) $A^2(x) = B^2(x) \Leftrightarrow |A(x)| = |B(x)|$;

d) $x^2 = (3x + 1)^2 \Leftrightarrow x = \pm |3x + 1|$;

e) $2x + 1 = |2 - x| \Leftrightarrow |2x + 1| = |2 - x|$.

Risposte.
a) F; b) V; c) V; d) V; e) F.

12. Risolvere le seguenti equazioni.
a) $|x + 2| = x(x - 2) - (x - 1)^2$;
b) $|x^2 - 4x + 2| = 2$;
c) $|x - 1| = |2x - 3|$.

Risposte.
a) impossibile ; b) $x = 0, x = 2, x = 4$; c) $x = 2, x = \frac{4}{3}$.

Equazioni irrazionali.

Si usano le equivalenze

i) se n è un intero dispari, $A^n(x) = B^n(x) \Leftrightarrow A(x) = B(x)$;

ii) se n è un intero pari, $A^n(x) = B^n(x) \Leftrightarrow A(x) = \pm B(x)$.

Perciò, elevando a potenza pari entrambi i membri di una equazione, si possono introdurre soluzioni "estranee" e diventa obbligatoria la "*verifica delle soluzioni*" nell'equazione di partenza.

13. Risolvere le seguenti equazioni.

a) $\sqrt{2x+1} = \sqrt{5x+4}$;

b) $\sqrt{24 - x^2 + 2x} + x - 2 = 0$;

c) $\sqrt{2x+3} - \sqrt{x+1} - 1 = 0$;

d) $\sqrt[4]{x+2} + \sqrt{3-x} = 0$;

e) $\sqrt[3]{x^3 + 3x + 7} - 1 = x$;

f) $x - 2\sqrt{x} - 3 = 0$;

g) $x^3 = \sqrt{(2-x)^3}$;

h) $\sqrt[3]{x-1} = \sqrt{x+1}$.

Risposte.

a) impossibile; b) $x = -2$; c) $x = -1, x = 3$; d) impossibile; e) $x = \pm\sqrt{2}$.; f) $x = 9$; g) $x = 1$; h) impossibile.