RICHIAMI di MATEMATICA
ESERCIZI: equazioni e disequazioni esponenziali e logaritmiche

Linguaggio e notazioni:

a^x *esponenziale di base* $a, a > 0$, e *di esponente* $x \in \mathbb{R}$.

$\log_a x$ *logaritmo in base* $a, a > 0$ e $a \neq 1$, e *di argomento* $x, x > 0$.

Logaritmo come operazione inversa dell'esponenziale: Sia $a > 0$ e $a \neq 1$, allora

$$a^{\log_a x} = x, \forall x > 0, \qquad \log_a a^x = x, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Basi particolari: base 10 : il logaritmo in base 10 di x si indica $Log\ x$ (lettera maiuscola).

Base naturale $e = 2.71828...$(numero reale irrazionale, ovvero decimale infinito non periodico).

Il numero e è l'unica base a che soddisfa la proprietà: $a^x \geq x+1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Con *logaritmo naturale* di $x, x > 0$, si intende la base e e si indica $\log x$ oppure $\ln x$.

Proprietà degli esponenziali (proprietà delle potenze):

Siano $a > 0, b > 0, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$; allora

$(a^x)^y = a^{xy}$,

$a^x a^y = a^{x+y}$, $\qquad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$,

$a^x b^x = (a \cdot b)^x$, $\qquad \dfrac{a^x}{b^x} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^x$.

Proprietà dei logaritmi:

Siano $a > 0, a \neq 1, b > 0, b \neq 1, x > 0, y > 0$; allora

1. $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$;
2. $\log_a x^r = r \log_a x$, $\forall r \in \mathbb{R}$;
3. $\log_a x = \dfrac{\log_b x}{\log_b a}$ (cambiamento della base).

Da queste si ottiene:

$\log_a \dfrac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$;

$\log_{1/a} x = -\log_a x$;

Inoltre: $\forall a > 0$,

$$a^x > 0, \forall x \in \mathbb{R},$$
$$a^0 = 1.$$

$\forall a > 0, a \neq 1$,

$$\log_a 1 = 0, \qquad \log_a a = 1,$$
$$\log_a \frac{1}{a} = -1, \quad \log_{1/a} a = -1.$$

Metodo di risoluzione delle equazioni esponenziali/logaritmiche:

Sia $a > 0, a \neq 1, x, y, c \in \mathbb{R}$; allora

i) $a^x = a^y \Leftrightarrow x = y$;

ii) se $c \leq 0$, allora l'equazione $a^x = c$ è *impossibile;*

iii) se $c > 0$, allora $a^x = c \Leftrightarrow x = \log_a c$;

iv) se $x > 0, y > 0$, allora $\log_a x = \log_a y \Leftrightarrow x = y$;

v) se $x > 0$, allora $\log_a x = c \Leftrightarrow x = a^c$.

1. Risolvere le seguenti equazioni esponenziali.

a) $3^x = -4$;

b) $\dfrac{2^{x+1}}{8} = \dfrac{64^x}{2} : 4^x$;

c) $2^{2x} + 2^{x+1} - 3 = 0$;

d) $2^{x^2} : 4 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$;

e) $\sqrt[5]{3^{x-1}\sqrt{3^{2-x}}} = 3^{1/2}$;

f) $3^{4x} = 5$;

g) $5^x = \dfrac{1}{\sqrt[6]{25}}$.

Risposte.

a) Impossibile; b) $x = -\dfrac{1}{3}$; c) $x = 0$; d) $x = -2, x = 1$; e) $x = 5$; f) $x = \dfrac{1}{4}\log_3 5$; g) $x = -\dfrac{1}{3}$.

2. Calcolare le seguenti espressioni.

a) $\log_6 1$; b) $\ln e$; c) $\log_3 \dfrac{1}{3}$;

d) $\log_3 27$; e) $\log_{81} 3$; f) $\log_{32} \dfrac{1}{2}$;

g) $\log_{10} 100$; h) $\log_{1/2} 2$; i) $\log_3 0$;

l) $\log_4 64$; m) $\log_5 \dfrac{1}{125}$; n) $\log_4 8$;

Risposte.

a) 0 ($\log_a 1 = 0, \forall a > 0, a \neq 1$);

b) 1 ($\log_a a = 1, \forall a > 0, a \neq 1$);

c) -1 ($\log_a \dfrac{1}{a} = -1, \forall a > 0, a \neq 1$);

d) 3, infatti $27 = 3^3$;

e) $\dfrac{1}{4}$, infatti $3 = \sqrt[4]{81}$;

f) $-\dfrac{1}{5}$, infatti $2 = 32^{1/5}$ e $\log_a b^c = c \log_a b, \forall a > 0, a \neq 1, b > 0$;

g) 2;

h) -1, infatti $log_{1/a} b = -\log_a b, \forall a > 0, a \neq 1, b > 0$;

i) non esiste, infatti $a^x > 0, \forall a > 0$;

l) 3 ; m) -3 ; n)$\dfrac{3}{2}$ (scrivere 8 come $2 \cdot 4$ e applicare le proprietà dei logaritmi).

3. Scrivere le seguenti espressioni come somma di logaritmi ($a, b, c > 0$):

a) $\log \dfrac{\sqrt[4]{c^5} \cdot \sqrt{b}}{\sqrt[7]{a}}$

b) $\log \sqrt[4]{\dfrac{a+3b}{a+b}}$

Risposte.

a) $\dfrac{5}{4} \log c + \dfrac{1}{2} \log b - \dfrac{1}{7} \log a$;

b) $\dfrac{1}{4} \log(a+3b) - \dfrac{1}{4} \log(a+b)$.

4. Scrivere le seguenti espressioni come un unico logaritmo $(x, y, z > 0)$:

a) $\log 13 - \log 26 + \frac{1}{2}\log 9 - 2\log 3$;

b) $4\log x - \frac{1}{2}\log y^2 + \frac{5}{4}\log z$.

Risposte.

a) $\log\frac{1}{6}$; b) $\log\frac{x^4\sqrt[4]{z^5}}{y}$.

5. Dire se le seguenti uguaglianze sono false o vere:

a) $\log_{1/3}(3) = -1$;

b) $\log_{1/3}(27) = 3$;

c) $\log 6 = \log 2 \cdot \log 3$;

d) $(\log 2)^2 = \log 4$;

e) $\frac{\log 2}{\log 4} = \frac{1}{2}$;

f) $\frac{1}{2}\log x^2 = \log x$;

g) $\log_4 x = -\frac{1}{3}\log_4\frac{1}{x^3}$;

h) $\log|x \cdot y| = \log|x| + \log|y|$;

i) $\log_a(x + y) = \log_a x + \log_a y$;

l) $\log\frac{x}{y} = \log|x| - \log|y|$;

m) $\log_7 6 < 0$.

Risposte.

a)V ;b)F (-3); c)F $(\log 6 = \log 2 + \log 3)$; d)F ; e)V;

f)F (vera solo se $x > 0$; è vera invece: $\frac{1}{2}\log x^2 = \log|x|$) ;

g)V (hanno entrambi significato per $x > 0$, e per tali x vale l'uguaglianza);

h)V ; i)F ;

l)F (vera solo se $\frac{x}{y} > 0$; è vera invece:$\log\left|\frac{x}{y}\right| = \log|x| - \log|y|$);

m)F $(0 < \log_7 6 < 1)$.

6. Risolvere le seguenti equazioni logaritmiche. Osservare che occorre la "verifica" delle soluzioni trovate.

a) $\log_3 \dfrac{x^2}{4} = 3$;

b) $\log_2 x + \log_2(x-2) = 3$;

c) $2\log(-x) + \log(x-3) = \log(x+1)^2$;

d) $(\log_5 x)^2 + 5\log_5 x + 6 = 0$;

e) $\log_{1/2} |2x-1| = 1$;

f) $3\log_8 x - 2 = 0$;

g) $5\,(\log_3 x)^2 + 2\log_3 (3x) - 1 = 0$;

Risposte.
a) $x = \pm 6\sqrt{3}$; b) $x = 4$; c) impossibile; d) $x = \dfrac{1}{25}, x = \dfrac{1}{125}$;
e) $x = \dfrac{1}{4}, x = \dfrac{3}{4}$; f) $x = 4$; g) impossibile.

Metodo di risoluzione delle disequazioni esponenziali/logaritmiche.

Se $a > 1$ $\qquad a^x > a^y \Leftrightarrow x > y,$

se $0 < a < 1$ $\qquad a^x > a^y \Leftrightarrow x < y,$

da cui segue che $\forall x, y > 0$

se $a > 1$ $\qquad \log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x > y,$

se $0 < a < 1$ $\qquad \log_a x > \log_a y \Leftrightarrow x < y.$

Inoltre si ricordi che prima di risolvere una disequazione logaritmica occorre porre il campo di esistenza (argomento del logaritmo positivo).

7. Risolvere le seguenti disequazioni esponenziali.

a) $3^x < -4$; b) $5^x > 3$;

c) $2^{x+1} < 4^x$; d) $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3x} > 2$;

e) $2^{2x} + 2^{x+1} - 3 < 0$; f) $10^{-x} > -2$;

g) $2^{x^2} > \left(\dfrac{1}{2}\right)^x$; h) $\sqrt[5]{3^{x-1}} > 1$;

i) $e^x - 3e^{-x} < 2$; l) $\dfrac{1}{5^x} - 5^{x+1} < 4$;

m) $2^{2x} + 5\ 2^x > 0$; n) $3^x - 5\ 3^{-x} < 4$.

Risposte.

a) impossibile; b) $x > \log_5 3$; c) $x > 1$; d) $x < -\dfrac{1}{3}$; e) $x < 0$; f) $\forall x$;
g) $x < -1, x > 0$; h) $x > 1$; i) $x < \log 3$; l) $x > -1$; m) $\forall x$; n) $x < \log_3 5$.

8. Risolvere le seguenti disequazioni logaritmiche.

a) $\log_3 \dfrac{x^2}{4} > 3$; b) $\log_2 3x > 0$;

c) $\log_2 x + \log_2(x-2) < 3$;

d) $\log x + \log(x+2) > 0$;

e) $\log_{1/2} |2x-1| \geq 1$;

f) $3 \log_8 x - 2 > 0$;

g) $3\left(\log_3 x\right)^2 + 2\log_3(3x) - 3 < 0$;

h) $\log_2(x-1) - \log_4(x-1) > 2$.

Risposte.

a) $x < -6\sqrt{3}, x > 6\sqrt{3}$; b) $x > \dfrac{1}{3}$; c) $2 < x < 4$ (attenzione al campo di esistenza); d) $x > -1 + \sqrt{2}$;
e) $\dfrac{1}{4} \leq x \leq \dfrac{3}{4}, x \neq \dfrac{1}{2}$; f) $x > 4$; g) $\dfrac{1}{3} < x < \sqrt[3]{3}$; h) $x > 17$.